ЖЭТФ, 2022, том 161, вып. 2, стр. 166–176

Q-РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ДЛЯ ОДНОАТОМНОГО ЛАЗЕРА, РАБОТАЮЩЕГО В «КЛАССИЧЕСКОМ» РЕЖИМЕ

Н. В. Ларионов [*]

Санкт-Петербургский государственный морской технический университет
190121, Санкт-Петербург, Россия

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
195251, Санкт-Петербург, Россия

Поступила в редакцию 5 октября 2021 г.,
после переработки 5 октября 2021 г.
Принята к публикации 11 октября 2021 г.

Теоретически исследуется модель одноатомного лазера с некогерентной накачкой. В стационарном случае из уравнения для оператора плотности системы выводится линейное однородное дифференциальное уравнение для усредненной по фазе Q-функции Хусими. В режиме, при котором связь поля с атомом во много раз сильнее, чем связь поля с резервуаром, обеспечивающим его распад, найдено асимптотическое решение этого уравнения. Это решение позволяет описать некоторые статистические особенности одноатомного лазера, в частности, слабую субпуассоновскую статистику фотонов.

DOI: 10.31857/S004445102202002X

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время источники неклассических состояний света востребованы в таких областях физики, как квантовая информатика, квантовые коммуникации, квантовая криптография и квантовые стандарты частоты [1–5]. Проводятся различные исследования, направленные на создание таких источников. В частности, есть работы, в которых для получения определенных состояний света, а также для создания различных элементов квантовых устройств предлагается использовать системы, состоящие всего из одного или нескольких квантовых излучателей [6–9]. Свойства одиночного излучателя отображаются на состоянии электромагнитного поля, что позволяет получить, к примеру, субпуассоновский свет [10].

Одной из фундаментальных моделей квантовой оптики является модель одноатомного лазера. Данной модели посвящено множество как теоретических [11–27], так и экспериментальных [28–30] работ. Различные эффекты, обнаруженные в этих работах, в основном связаны с сильным проявлением ферми-статистики одиночного излучателя: эффект самотушения, сжатие амплитудной компоненты поля, субпуассоновская статистика фотонов, генерация без инверсии и др.

Существенный вклад в понимание физики одноатомного лазера был сделан группой ученых из Института физики НАН Беларуси, возглавляемой С. Я. Килином (см. [11, 15–18, 20, 27] и ссылки в них). Один из теоретических подходов, используемых этой группой, основан на анализе уравнения для оператора плотности системы, записанного для таких квазивероятностных распределений, как P-функция Глаубера и Q-функция Хусими, позволяющих находить нормально и антинормально упорядоченные корреляционные функции полевых операторов соответственно.

В работе [21] для случая стационарного режима работы одноатомного лазера с некогерентной накачкой было получено линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка для усредненной по фазе P-функции. В предельном случае, когда связь поля с атомом во много раз сильнее, чем связь поля с резервуаром, обеспечивающим его затухание (так называемый «классический» режим — режим, в котором для одноатомного лазера возможно су-

[*] E-mail: larionov.nickolay@gmail.com

ществование порога генерации [19]), было получено приближенное решение этого уравнения. Последнее, являющееся порождающим решением в проблеме малого параметра у старшей производной (сингулярно возмущенная задача, см., к примеру, [31]), для определенных значений параметров лазера дает хорошее согласие с численными расчетами и, более того, содержит в себе некоторые предельные решения, полученные ранее в [15,16]. Дальнейший анализ этого уравнения позволил получить приближенное выражение для P-функции, которая, в отличие от предыдущих решений, демонстрирует существенно неклассическое поведение — становится отрицательно определенной [22].

В силу специфики P-функции, которая может быть отрицательной и/или неограниченной, анализ упомянутого уравнения и его приближенных решений сталкивается с определенными трудностями. В частности, здесь возникает проблема искусственного ограничения области определения P-функции (см., к примеру, [15, 21]). В связи с этим возникает естественное желание получить аналогичное уравнение, но для «хорошего» квазивероятностного распределения. В качестве последнего в представленной статье было выбрано квазивероятностное распределение Q, которое является неотрицательно определенным и ограниченным.

Статья имеет следующую структуру. В разд. 2 для одноатомного лазера с некогерентной накачкой, генерирующего в стационарном режиме, выводится однородное дифференциальное уравнение для усредненной по фазе Q-функции. Раздел 3 посвящен анализу выведенного уравнения в случае «классического» режима работы лазера. Находится асимптотическое решение этого уравнения, которое сравнивается с соответствующим решением для P-функции [21]. В разд. 4 с помощью найденного решения исследуется статистка фотонов в моде резонатора. Основное внимание уделено области значений параметров лазера, для которых ранее была предсказана слабая субпуассоновская статистика [19]. В разд. 5 для определенных значений параметра накачки лазера найденное асимптотическое решение приводится к простому гауссовому виду. Этот гауссов вид решения позволяет легко найти связь с ранее разработанной теорией, основанной на линеаризации уравнений Гейзенберга – Ланжевена по малым флуктуациям вблизи сильного «классического» решения [19]. В Заключении подводятся итоги проведенного исследования.

2. МОДЕЛЬ ОДНОАТОМНОГО ЛАЗЕРА. УРАВНЕНИЕ ДЛЯ УСРЕДНЕННОЙ ПО ФАЗЕ Q-ФУНКЦИИ

Рассматриваемая модель одноатомного лазера представлена одиночным двухуровневым атомом, взаимодействующим с затухающей модой резонатора. Некогерентная накачка атома с нижнего уровня $|1\rangle$ на верхний уровень $|2\rangle$ осуществляется со скоростью $\Gamma/2$. Спонтанный распад атома с верхнего уровня $|2\rangle$ на нижний $|1\rangle$ происходит со скоростью $\gamma/2$. Константа взаимодействия атома с модой резонатора обозначена как g. Затухание моды резонатора происходит со скоростью $\kappa/2$.

Уравнение для оператора плотности $\hat\rho$ одноатомного лазера имеет вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial\hat\rho}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar}[\hat V,\hat\rho] + \frac{\kappa}{2}\left(2\,\hat a\hat\rho\hat a^\dagger - \hat a^\dagger\hat a\hat\rho - \hat\rho\hat a^\dagger\hat a\right) + \\ + \frac{\gamma}{2}\left(2\hat\sigma\hat\rho\hat\sigma^\dagger - \hat\sigma^\dagger\hat\sigma\hat\rho - \hat\rho\hat\sigma^\dagger\hat\sigma\right) + \\ + \frac{\Gamma}{2}\left(2\hat\sigma^\dagger\hat\rho\hat\sigma - \hat\sigma\hat\sigma^\dagger\hat\rho - \hat\rho\hat\sigma\hat\sigma^\dagger\right),\end{aligned} \tag{1}$$

где $\hat a^\dagger, \hat a$ — операторы соответственно рождения и уничтожения фотонов в моде резонатора; $\hat\sigma^\dagger = |2\rangle\langle 1|$, $\hat\sigma = |1\rangle\langle 2|$ — операторы атомных переходов; $\hat V = i\hbar g\left(\hat a^\dagger\hat\sigma - \hat\sigma^\dagger\hat a\right)$ — оператор взаимодействия атома с модой резонатора, $\hbar$ — приведенная постоянная Планка. Физический смысл каждого слагаемого в правой части (1) определяется соответствующей скоростной константой.

Будем рассматривать диагональное представление антинормально упорядоченного оператора плотности $\hat\rho\,(z,z^*)$, которое определяется следующим образом:

$$\hat\rho = \int \hat\rho\,(z,z^*)\,|z\rangle\langle z|\,d^2z, \tag{2}$$

где $|z\rangle$ — когерентное состояние поля, $d^2z \equiv d\,\mathrm{Re}[z]d\,\mathrm{Im}[z]$ и $\mathrm{Re}[z]$, $\mathrm{Im}[z]$ — действительная и мнимая части комплексного числа z. Используя известные правила перехода [32]

$$\begin{aligned}&\hat a^\dagger\hat\rho \to z^*\hat\rho\,(z,z^*)\,,\\ &\hat a\hat\rho \to \left(z + \frac{\partial}{\partial z^*}\right)\hat\rho\,(z,z^*)\,,\\ &\hat\rho\hat a \to z\hat\rho\,(z,z^*)\,,\\ &\hat\rho\hat a^\dagger \to \left(z^* + \frac{\partial}{\partial z}\right)\hat\rho\,(z,z^*)\end{aligned} \tag{3}$$

и вводя функции

$$\rho_{ik}\,(z,z^*) = \langle i|\,\hat\rho\,(z,z^*)\,|k\rangle\,,\quad i,k = 1,2,$$
$$D(z,z^*) = \rho_{22}\,(z,z^*) - \rho_{11}\,(z,z^*)$$

и Q-функцию

$$Q(z,z^*) = \rho_{11}(z,z^*) + \rho_{22}(z,z^*),$$

из уравнения (1) можно легко получить систему дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\kappa}{2}\left(zQ + \frac{\partial Q}{\partial z^*}\right) - g\rho_{21}\right] + \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial z^*}\left[\frac{\kappa}{2}\left(z^*Q + \frac{\partial Q}{\partial z}\right) - g\rho_{12}\right], \\
\frac{\partial D}{\partial t} &= (\Gamma-\gamma)Q - (\Gamma+\gamma)D + \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\kappa}{2}zD - g\rho_{21}\right] + \frac{\partial}{\partial z^*}\left[\frac{\kappa}{2}z^*D - g\rho_{12}\right] - \\
&\quad - 2g\left[z^*\rho_{21} + z\rho_{12}\right] + \kappa\frac{\partial^2 D}{\partial z\partial z^*}, \\
\frac{\partial \rho_{21}}{\partial t} &= -\frac{\Gamma+\gamma}{2}\rho_{21} + \frac{\kappa}{2}\left[\frac{\partial}{\partial z}z\rho_{21} + \frac{\partial}{\partial z^*}z^*\rho_{21}\right] + \\
&\quad + g\left[zD + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z^*}(D-Q)\right] + \kappa\frac{\partial^2\rho_{21}}{\partial z\partial z^*}.
\end{aligned} \tag{4}$$

Здесь и далее, для того чтобы избежать громоздкость выражений, у квазивероятностей опущены скобки с комплексными аргументами z, z^*.

Физический смысл дополнительных функций ρ_{21} и D следует из их средних значений:

$$\langle D\rangle = \langle\rho_{22}\rangle - \langle\rho_{11}\rangle \equiv \langle\hat\sigma_z\rangle = \int D\, d^2z$$

— атомная инверсия,

$$\langle\rho_{21}\rangle = \langle\rho_{12}\rangle^* \equiv \langle\hat\sigma\rangle = \int \rho_{21}\, d^2z$$

— среднее значение атомной поляризации.

Первое уравнение в системе (4) можно переписать в виде уравнения неразрывности

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{J} = q, \tag{5}$$

где определены дивергенция $\operatorname{div} = (\partial/\partial z, \partial/\partial z^*)$ и вектор тока квазивероятности $\mathbf{J} = (J, J^*)$, $J = -\kappa/2\,(z + \partial/\partial z^*)\,Q$. Источник $q = -g\,(\partial\rho_{21}/\partial z + \partial\rho_{12}/\partial z^*)$ также может быть записан через дивергенцию некоторого вектора.

Перейдем к новым полярным координатам (I,φ), таким что $z = \sqrt{I}e^{i\varphi}$, и определим усредненные по фазе φ квазивероятностные распределения как

$$\begin{aligned}
Q(I) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Q(I,\varphi)\,d\varphi, \\
D(I) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} D(I,\varphi)\,d\varphi, \\
\rho_{12}(I) &= \rho_{21}^*(I) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i\varphi}\rho_{12}(I,\varphi)\,d\varphi.
\end{aligned} \tag{6}$$

Тогда в стационарном случае из уравнения неразрывности (5) можно получить следующую связь между $Q(I)$ и суммой когерентностей $\rho_\Sigma(I) = \rho_{21}(I) + \rho_{12}(I)$:

$$\rho_\Sigma(I) = \frac{\kappa}{g}\sqrt{I}\left[Q(I) + \frac{dQ(I)}{dI}\right]. \tag{7}$$

Из двух последних уравнений системы (4) в стационарном случае имеем

$$\begin{aligned}
&(\Gamma-\gamma)Q(I) - (\Gamma+\gamma)D(I) - 2g\sqrt{I}\rho_\Sigma(I) = \\
&\quad = \frac{d}{dI}\left[g\sqrt{I}\rho_\Sigma(I) - \kappa I D(I) - \kappa I\frac{dD(I)}{dI}\right], \\
&(\Gamma+\gamma)\rho_\Sigma(I) + \frac{\kappa}{2I}\rho_\Sigma(I) - \\
&\quad - 2g\sqrt{I}\left[2D(I) + \frac{d}{dI}\left(D(I) - Q(I)\right)\right] = \\
&\quad = 2\kappa\frac{d}{dI}I\left[\rho_\Sigma(I) + \frac{d\rho_\Sigma(I)}{dI}\right].
\end{aligned} \tag{8}$$

Используя (7), можно исключить из системы (8) функцию $\rho_\Sigma(I)$ и получить систему двух дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций $Q(I)$ и $D(I)$.

Наша задача состоит в получении одного дифференциального уравнения для функции $Q(I)$. Но первое уравнение в системе (8) (говорим о системе (8), подразумевая, что $\rho_\Sigma(I)$ исключена из нее при помощи (7)) является дифференциальным уравнением второго порядка относительно функции $D(I)$, а второе — первого порядка относительно той же функции $D(I)$. Поэтому, для того чтобы исключить из (8) $D(I)$, $dD(I)/dI$ и $d^2D(I)/dI^2$, нужно добавить к этой системе еще одно уравнение, которое содержало бы вторую производную функции $D(I)$. Это уравнение можно получить, продифференцировав второе уравнение в системе (8).

Опуская промежуточные элементарные вычисления, выпишем окончательный результат:

$$\sum_{\nu=0}^{5} p_\nu(I)\,Q^{(\nu)}(I) = 0, \tag{9}$$

$$
\begin{aligned}
&p_5(I) = b_{02}I^2 + b_{03}I^3,\\
&p_4(I) = b_{11}I + b_{12}I^2 + b_{13}I^3,\\
&p_3(I) = b_{20} + b_{21}I + b_{22}I^2 + b_{23}I^3,\\
&p_2(I) = b_{30} + b_{31}I + b_{32}I^2 + b_{33}I^3,\\
&p_1(I) = b_{40} + b_{41}I + b_{42}I^2,\\
&p_0(I) = b_{50} + b_{51}I + b_{52}I^2,
\end{aligned}
$$

где введено обозначение $Q^{(\nu)}(I) \equiv d^\nu Q(I)/dI^\nu$ и коэффициенты $b_{ik} = b_{ik}(\Gamma, \gamma, \kappa, g)$ выписаны в Приложении.

Таким образом, искомое уравнение для усредненной по фазе Q-функции является однородным дифференциальным уравнением пятого порядка с полиномиальными коэффициентами. Напомним, что соответствующее уравнение для усредненной по фазе P-функции является уравнением второго порядка [21].

3. ФУНКЦИЯ $Q(I)$ ДЛЯ ОДНОАТОМНОГО ЛАЗЕРА, РАБОТАЮЩЕГО В «КЛАССИЧЕСКОМ» РЕЖИМЕ

Далее, как и в работах [19, 21], будем использовать следующие три безразмерных параметра: безразмерный параметр накачки $r = \Gamma/\gamma$, безразмерный коэффициент насыщения $I_s = \gamma/\kappa$ и безразмерную константу связи (кооперативный параметр) $c = 4g^2/\gamma\kappa$.

Как упоминалось выше, в статье [21] для рассматриваемого одноатомного лазера было выведено уравнение для усредненной по фазе P-функции $P(I)$. Это уравнение представляет собой однородное дифференциальное уравнение второго порядка с полиномиальными коэффициентами. В «классическом» режиме, когда произведение $cI_s \gg 1$ (т. е. $g/\kappa \gg 1$), в этом уравнении можно выделить малый параметр $\lambda \approx 1/cI_s$, стоящий при старшей производной. Используя теорию возмущений, авторы статьи [21] нашли порождающее решение $P_0(I)$ этого уравнения (формула (50) в [21]), являющееся решением дифференциального уравнения первого порядка.

В случае «хорошего» резонатора $I_s \gg 1$ функция $P_0(I)$ хорошо описывает статистические свойства одноатомного лазера. В частности, с ее помощью можно описать некоторые результаты, получающиеся из решения системы уравнений Гейзенберга – Ланжевена путем их линеаризации по малым флуктуациям вблизи сильного «классического» решения [19, 21] (далее «линейная» теория). Выпишем результаты этой «линейной» теории:

$$
\begin{aligned}
I_0(r, I_s, c) &= \frac{I_s}{2}\left[(r-1) - \frac{(r+1)^2}{c}\right],\\
Q_f^{lin}(r, c) &= \frac{2c^2 - c(r-5)(r+1) + 3(r+1)^3}{2c^2\left[(r-1) - \dfrac{(r+1)^2}{c}\right]}.
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Здесь $I_0 \approx \langle\hat{n}\rangle \equiv \langle\hat{a}^\dagger\hat{a}\rangle$ — классическая внутрирезонаторная интенсивность (сильное «классическое» решение), а $Q_f^{lin} \approx Q_f = \left(\langle\hat{n}^2\rangle - \langle\hat{n}\rangle^2\right)/\langle\hat{n}\rangle - 1$ — Q-параметр Манделя для поля (верхний индекс «lin» указывает на то, что это результат «линейной» теории).

Формулы (10) имеют смысл для $c > 8$ и для $r \in (r_{th}, r_q)$, где r_{th} — пороговое значение параметра накачки и r_q — значение параметра накачки, при котором происходит эффект самотушения. Явные выражения для r_{th}, r_q получаются из уравнения $I_0 = 0$:

$$
r_{th} = r_m - \frac{c}{2}\sqrt{1 - \frac{8}{c}}, \quad r_q = r_m + \frac{c}{2}\sqrt{1 - \frac{8}{c}}, \tag{11}
$$

где $r_m = c/2 - 1$ значение накачки, когда интенсивность I_0 достигает своего максимума $I_m = I_s(c/8 - 1)$.

Результаты (10) предсказывают незначительную субпуассоновскую статистику фотонов в моде резонатора [21]. При $c \approx 200$ и выше и для значений параметра накачки, близких к $r = c/5$, Q-параметр Манделя Q_f^{lin} становится отрицательным и при $c \to \infty$ принимает значение равное -0.05. P-функция в этой области значений параметров демонстрирует неклассическое поведение [22] — становится отрицательно определенной и неограниченной, а у приближенного решения $P_0(I)$ появляется существенно особая точка, близкая к I_0, не позволяющая подтвердить результаты «линейной» теории.

Отметим, что для рассматриваемой модели одноатомного лазера выявленное минимальное значение Q-параметра Манделя равно -0.15 [13, 24]. Такая субпуассоновская статистика связана с эффектом антигруппировки фотонов, который лучше всего проявляется в режиме малого числа фотонов в моде резонатора $rI_s \approx 1$ ($\Gamma \approx \kappa$) [24]. Однако в рассматриваемом нами «классическом» режиме, т. е. в режиме, когда существуют решения (10), этот эффект ослаблен присутствием большого числа фотонов, некогерентно накопленных в моде и обладающих относительно большим стохастическим временем жизни.

Теперь перейдем к выделению малого параметра $\lambda \approx 1/cI_s$ в уравнении (9) и попробуем получить соответствующее порождающее решение для Q-функции. Будем действовать так же, как и в работе [21].

Для этого перепишем полиномы $p_\nu(I)$, выделив в них корни:

$$\begin{aligned} &p_5(I) = b_{03} I^2 (I - I_{00}), \\ &p_4(I) = b_{13} I (I - I_{11})(I - I_{12}), \\ &p_3(I) = b_{23} (I - I_{21})(I - I_{22})(I - I_{23}), \\ &p_2(I) = b_{33} (I - I_{31})(I - I_{32})(I - I_{33}), \\ &p_1(I) = b_{42} (I - I_{-4})(I - I_{+4}), \\ &p_0(I) = b_{52} (I - I_{-5})(I - I_{+5}), \end{aligned} \qquad (12)$$

где в последних двух полиномах обозначения корней аналогичны обозначениям в работе [21].

Коэффициенты при двух последних полиномах $b_{42}, b_{52} \sim cI_s$, а коэффициенты при всех остальных полиномах порядка единицы. Поэтому в режиме $cI_s \gg 1$ заменим уравнение (9) на приближенное уравнение первого порядка

$$b_{42}(I - I_{-4})(I - I_{+4}) Q^{(1)}(I) + \\ + b_{52}(I - I_{-5})(I - I_{+5}) Q(I) = 0. \qquad (13)$$

Решение этого уравнения имеет следующий вид:

$$Q_0(I) = N_0 \left(1 - \frac{I}{I_{-4}}\right)^{f_1} \times \\ \times \left| \left(1 - \frac{I}{I_{+4}}\right) \right|^{f_2} \exp\left(-\frac{b_{52}}{b_{42}} I\right), \qquad (14)$$

$$f_1 = -\frac{b_{52}}{b_{42}} \frac{(I_{-4} - I_{-5})(I_{-4} - I_{+5})}{I_{-4} - I_{+4}},$$
$$f_2 = \frac{b_{52}}{b_{42}} \frac{(I_{+4} - I_{-5})(I_{+4} - I_{+5})}{I_{-4} - I_{+4}},$$

где N_0 — нормировочная константа, а нижний индекс «0» у функции указывает на то, что это решение является порождающим в задаче с малым параметром.

Найденное решение (14) по своей структуре практически полностью совпадает с соответствующим порождающим решением $P_0(I)$ для P-функции (см. формулу (50) в [21]). Однако у решения (14) есть некоторые преимущества, связанные с тем, что Q-функция неотрицательно определена и ограниченна. Так, экспонента в (14), в связи с положительностью отношения $b_{52}/b_{42} > 0$, убывает при возрастании аргумента I. Напротив, функция $P_0(I)$, найденная в [21], экспоненциально возрастает при $I \to \infty$, что явилось одной из причин искусственного ограничения ее области определения.

Первая скобка $(1 - I/I_{-4})$ в правой части (14) всегда положительна, так как корень $I_{-4} < 0$. Вторая скобка $(1 - I/I_{+4})$ становится отрицательной для $I > I_{+4}$ (корень $I_{+4} > 0$), а следовательно, $Q_0(I)$ принимает комплексное значение, что недопустимо для Q-функции. Однако для случая «хорошего» резонатора, $I_s \gg 1$, значение корня I_{+4} близко к тем значениям переменной I, для которых Q-функция — пренебрежимо малая величина. Для случая «плохого» резонатора, $I_s \sim 1$, $I_s \ll 1$, значение корня I_{+4} находится в области значений переменной I, где Q-функция не является малой. Если же ограничивать область определения функции $Q_0(I)$ отрезком $[0, I_{+4}]$, как это было сделано для функции $P_0(I)$ в [21], то это может приводить к нефизическим результатам. Поэтому скобка $(1 - I/I_{+4})$ в (14) взята под знак модуля.

Отметим несколько особенностей решения (14), которые есть и у функции $P_0(I)$. Корень I_{-5} практически полностью повторяет решение для классической внутрирезонаторной интенсивности (10), т. е. $I_{-5} \approx I_0$. В случае «хорошего» резонатора, вблизи максимума классического решения I_0, выполняется приближенное равенство $I_{+4} \approx I_{+5}$.

Анализ уравнения (9) показывает, что решение (14) не может быть использовано для описания работы лазера в случае, когда параметр накачки много меньше порогового значения r_{th}. В этом случае, учитывая, что основные изменения Q-функции происходят в области малых значений переменной I, можно рассмотреть уравнение, получающееся из (9) путем пренебрежения в полиномах всеми степенями переменной I, т. е.

$$b_{20} Q^{(3)}(I) + b_{30} Q^{(2)}(I) + \\ + b_{40} Q^{(1)}(I) + b_{50} Q(I) = 0. \qquad (15)$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$Q(I) = N_0 \exp(I/a), \qquad (16)$$

где константа $a < 0$ является действительным корнем полиномиального уравнения

$$b_{20} x^3 + b_{30} x^2 + b_{40} x + b_{50} = 0.$$

Эта константа при $r \to 0, \infty$ стремится к минус единице, т. е. в этих предельных случаях Q-функция описывает вакуумное состояние моды:

$$Q(I) = e^I/\pi.$$

Таким образом, решение (16) описывает тепловое излучение со средним числом фотонов равным $\langle \hat{n} \rangle = -(a + 1)$.

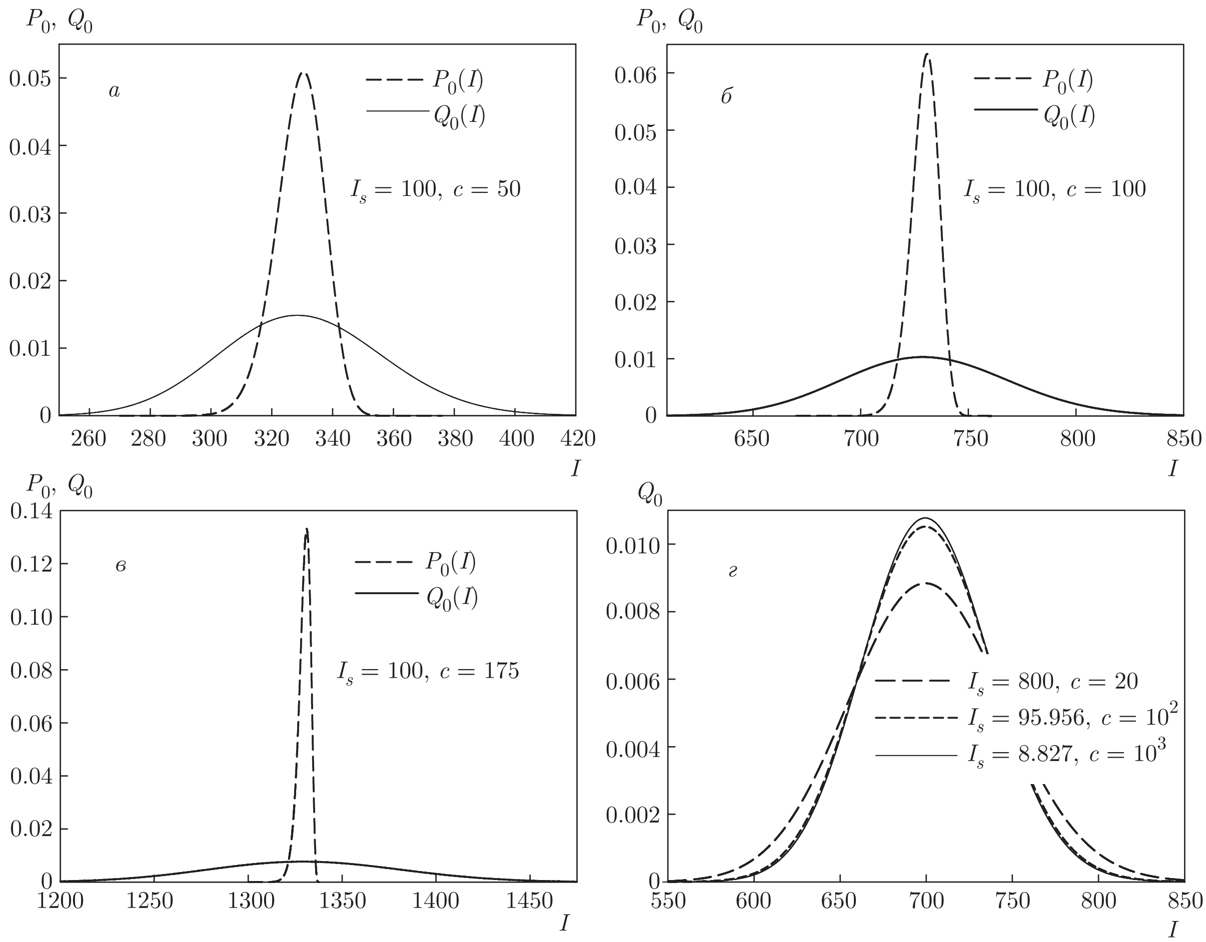

Рис. 1. Сравнение поведения функций $P_0\,(I)$ [21] и $Q_0\,(I)$ (14): *а*) $I_s = 100$, $c = 50$; *б*) $I_s = 100$, $c = 100$; *в*) $I_s = 100$, $c = 175$. *г*) Поведение функции $Q_0\,(I)$ (14) при переходе в режим сильной связи

4. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

На рис. 1 сравнивается поведение функций $P_0\,(I)$ [21] и $Q_0\,(I)$ (14) при переходе в режим, близкий к режиму сильной связи $c \gg I_s$ (т. е. $g \gg \gamma$ — связь атома с полем во много раз сильнее, чем связь атома с резервуаром, обеспечивающим его спонтанный распад вне моды резонатора). Для всех графиков $r = c/5$, т. е. выбрано значение параметра накачки, при котором Q-параметр Манделя Q_f^{lin} (10) принимает минимальное значение. Видно, что увеличение константы связи c при фиксированном I_s приводит к все более узкому и выраженному пику для функции $P_0\,(I)$. При $c = 175$ заметна несимметричность этой функции, связанная с ограниченностью ее области определения. Для $c \approx 200$ у функции $P_0\,(I)$ появляется особенность (аналогичная особенность наблюдалась в [24, 25]), которая не позволяет вычислить интересующие средние величины. При дальнейшем увеличении константы связи c эта особенность уходит за область определения функции $P_0\,(I)$, но вычисление средних дает неправдоподобные результаты. Функция $Q_0\,(I)$, как и следовало ожидать, не имеет никаких особенностей и позволяет легко вычислять интересующие средние величины.

В табл. 1 для значений параметров лазера, соответствующих рис. 1*а,б,в*, представлены результаты «линейной» теории (10) (в таблице обозначены как Lin) и результаты, полученные с помощью функций $P_0\,(I)$ и $Q_0\,(I)$. Видно хорошее согласие между различными подходами.

На рис. 1*г*, все также для $r = c/5$, представлено поведение функции $Q_0\,(I)$ при переходе в режим сильной связи. При этом параметры c, I_s подобраны так, чтобы классическая внутрирезонаторная интенсивность была равна $I_0 = 700$. В табл. 2 приведены соответствующие значения $\langle \hat{n} \rangle$ и Q_f.

В табл. 2 только первые два верхних блока соответствуют графикам на рис. 1*г*. Нижний блок относится к режиму сильной связи и «плохого» ре-

Таблица 1

Рис. 1*а*	$I_s = 100$, $c = 50$
Lin	$I_0 = 329$, $Q_f^{lin} = 0.19$
P_0	$\langle\hat{n}\rangle = 329.1$, $Q_f = 0.19$
Q_0	$\langle\hat{n}\rangle = 329.1$, $Q_f = 0.19$
Рис. 1*б*	$I_s = 100$, $c = 100$
Lin	$I_0 = 729.5$, $Q_f^{lin} = 0.056$
P_0	$\langle\hat{n}\rangle = 729.6$, $Q_f = 0.056$
Q_0	$\langle\hat{n}\rangle = 729.6$, $Q_f = 0.057$
Рис. 1*в*	$I_s = 100$, $c = 175$
Lin	$I_0 = 1329.7$, $Q_f^{lin} = 0.0075$
P_0	$\langle\hat{n}\rangle = 1329.8$, $Q_f = 0.008$
Q_0	$\langle\hat{n}\rangle = 1329.8$, $Q_f = 0.0084$

Таблица 2

Рис. 1*г*	$I_s = 95.95$, $c = 10^2$
Lin	$I_0 = 700$, $Q_f^{lin} = 0.056$
P_0	$\langle\hat{n}\rangle = 700.1$, $Q_f = 0.056$
Q_0	$\langle\hat{n}\rangle = 700.1$, $Q_f = 0.057$
Рис. 1*г*	$I_s = 8.83$, $c = 10^3$
Lin	$I_0 = 700$, $Q_f^{lin} = -0.04$
P_0	$\langle\hat{n}\rangle = \mathrm{UnPh}$, $Q_f = \mathrm{UnPh}$
Q_0	$\langle\hat{n}\rangle = 700.1$, $Q_f = -0.039$
	$I_s = 0.87$, $c = 10^4$
Lin	$I_0 = 700$, $Q_f^{lin} = -0.049$
P_0	$\langle\hat{n}\rangle = \mathrm{UnPh}$, $Q_f = \mathrm{UnPh}$
Q_0	$\langle\hat{n}\rangle = 700.1$, $Q_f = -0.047$

зонатора, $I_s = 0.87$ (график не приведен, так как он практически совпадает с графиком для случая $c = 10^3$). Из приведенных значений видно, что найденная Q-функция $Q_0(I)$ (14) хорошо описывает слабую субпуассоновскую статистику, предсказанную «линейной» теорией. Случай «плохого» резонатора и случаи $c \approx 200$, $c > 200$ функция $P_0(I)$ описать не может (аббревиатура UnPh в табл. 2 означает нефизический результат, Unphysical result).

На рис. 2 сравниваются результаты «линейной» теории с результатами, полученными с помощью решений (14), (16). Для случая «хорошего» резонатора, $I_s \gg 1$, и для значений параметра накачки, лежащих между r_{th} и r_q (рис. 2*а,б,в*), оба подхода полностью согласуются друг с другом. Характерный пороговый пик для Q-параметра Манделя [19] и пик, обусловленный эффектом «запирания» атома в возбужденном состоянии, хорошо описывается найденной функцией (14). Для значений параметра накачки, лежащих много ниже классического порога r_{th}, решение (14) дает нефизический результат для Q-параметра Манделя. Для получения результатов в этом случае использовано решение (16) (синяя пунктирная кривая).

На рис. 2*б* рассматривается переход в режим сильной связи, когда возникает слабая субпуассоновская статистика фотонов, предсказанная «линейной» теорией. Как видно из рисунка, найденная функция $Q_0(I)$ (14) полностью описывает этот квантовый эффект.

Режим «плохого» резонатора $I_s \sim 1$ рассмотрен на рис. 2*г*. Графики для Q-параметра Манделя Q_f^{lin} (10), в силу его естественной зависимости только от параметров r, c, полностью совпадают с графиками на рис. 2*б*. Из сравнения с численными расчетами видно, что результаты, полученные с помощью «линейной» теории (10), лучше описывают переход в субпуассоновский режим. Для «плохого» резонатора функция $Q_0(I)$ (14) дает только качественный результат. Однако в пределе $c \to \infty$ результаты, полученные с помощью функции $Q_0(I)$ (14), совпадут с результатами «линейной» теории.

5. АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИИ $Q_0(I)$ ГАУССОВЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ

Рассмотрим режим «хорошего» резонатора, $I_s \gg 1$, и значения параметра накачки, близкие к r_m (10), (11). Учтем, что в рассматриваемом случае $I_{+4} \approx I_{+5}$ и $I_{-5} \approx I_0$. Отсюда $f_1 \approx (b_{52}/b_{42})(I_0 - I_{-4})$, $f_2 \approx 0$ и (14) можно переписать следующим образом:

$$Q_0(I) = N_0 \left(1 + \frac{\Delta I}{I_0 - I_{-4}}\right)^{(b_{52}/b_{42})(I_0 - I_{-4})} \times \exp\left(-\frac{b_{52}}{b_{42}}\Delta I\right), \quad (17)$$

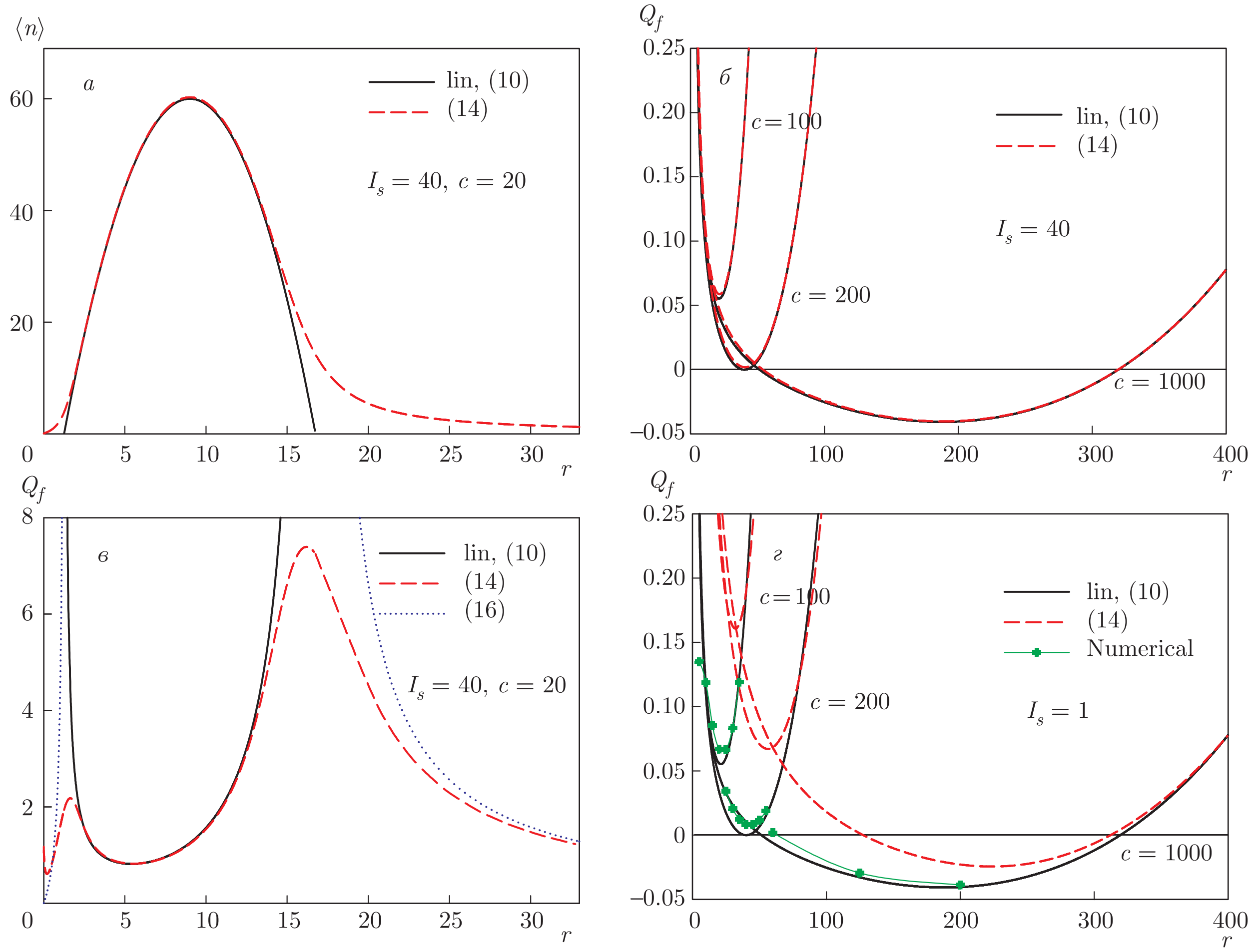

Рис. 2. (В цвете онлайн) Сравнение результатов «линейной» теории (10) с результатами, полученными с помощью функции $Q_0(I)$ (14). *а,в*) Зависимости среднего числа фотонов $\langle n(r)\rangle$ и Q-параметра Манделя $Q_f(r)$ от параметра накачки r; $I_s = 40$, $c = 20$. *б,г*) Зависимости Q-параметра Манделя $Q_f(r)$ от параметра накачки r. Переход в режим сильной связи: *б*) «хороший» резонатор, $I_s = 40$; *г*) «плохой» резонатор, $I_s = 1$. Зеленые точки — численный расчет

где $\Delta I = I - I_0$ и $I_0 - I_{-4} \gg 1$. Функция (17) имеет максимум, соответствующий значениям I, близким к классическому решению I_0, т. е. для $\Delta I \approx 0$. Тогда в области значений переменной I, для которых (17) не является пренебрежимо малой, т. е. для I, не слишком удаленных от значения I_0, можно сделать следующее разложение предэкспоненциального множителя:

$$\left(1 + \frac{\Delta I}{I_0 - I_{-4}}\right)^{-(I_0 - I_{-4})} = \\ = \exp\left[-(I_0 - I_{-4})\ln\left(1 + \frac{\Delta I}{I_0 - I_{-4}}\right)\right] \approx \\ \approx \exp\left[-\Delta I + \frac{(\Delta I)^2}{2(I_0 - I_{-4})}\right]. \tag{18}$$

Подставляя (18) в (17) видим, что Q-функция принимает вид гауссовой функции:

$$Q_0(I) = N_0 \exp\left[-\frac{(\Delta I)^2}{2\sigma^2}\right], \tag{19}$$

где дисперсия $\sigma^2 = (I_0 - I_{-4})\, b_{42}/b_{52}$ определяется решениями (10),

$$\sigma^2 = \pi\int_0^\infty I^2 Q_0(I)\, dI - \left(\pi\int_0^\infty I Q_0(I)\, dI\right)^2 = \\ = 1 + I_0\left(2 + Q_f^{lin}\right). \tag{20}$$

Таким образом, как это следует из (20), решение (19) описывает слабую субпуассоновскую статистику фотонов в моде резонатора. В самом деле, по определению Q-параметра Манделя имеем

$$Q_f = \frac{\pi \int\limits_0^\infty I^2 Q(I)\,dI - \left(\pi \int\limits_0^\infty I Q(I)\,dI\right)^2 - \pi \int\limits_0^\infty I Q(I)\,dI}{\pi \int\limits_0^\infty I Q(I)\,dI - 1} - 1 \approx \frac{\sigma^2 - I_0 - 1}{I_0} - 1 = Q_f^{lin}. \qquad (21)$$

Отметим, что для функции $P_0(I)$ в работе [21] также было получено гауссово выражение, типа (19). Однако дисперсия σ^2 в этом случае была равна произведению $I_0 Q_f^{lin}$, которое для субпуассоновской статистики фотонов становилось отрицательным, что делало функцию $P_0(I)$ неограниченной.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе на основе уравнения для усредненной по фазе Q-функции (9) исследовался стационарный режим работы одноатомного лазера с некогерентной накачкой. В «классическом» режиме ($g/\kappa \gg 1$) получено приближенное решение этого уравнения (14), (16). Это решение описывает основные особенности одноатомного лазера, в частности, позволяет описать слабую субпуассоновскую статистику фотонов в моде резонатора, ранее обнаруженную с помощью подхода, основанного на линеаризации уравнений Гейзенберга – Ланжевена вблизи сильного классического решения (10) [19, 21].

Подытоживая, можно сказать, что анализ стационарного режима работы одноатомного лазера с некогерентной накачкой может быть сведен к анализу одного линейного однородного дифференциального уравнения. Так, в случае P-функции это уравнение (41) в [21], а для Q-функции — уравнение (9) данной статьи. В рассмотренном здесь и в работе [21] предельном случае $g/\kappa \gg 1$ в упомянутых дифференциальных уравнениях появляется малый параметр, который относительно легко позволяет найти приближенные решения этих уравнений.

В конце отметим, что уравнение (9) также анализировалось в работе [25], где рассматривался частный случай $\Gamma \approx \kappa$, т. е. случай малого числа фотонов в моде резонатора. Для произвольных значений отношения g/κ анализ уравнения (9) был затруднителен. Только в предельном случае $g/\Gamma \approx g/\kappa \to \infty$ были найдены точные аналитические решения уравнения (9), одно из которых совпадает с решением (16). В случае малого числа фотонов более плодотворным оказался подход, основанный на анализе бесконечной системы алгебраических уравнений для различных моментов полевых операторов [33]. Возможно, именно этот подход для некоторых частных случаев позволит найти точные решения для средних величин, характеризующих одноатомный лазер [34].

Финансирование. Работа выполнена в рамках Государственного задания на проведение фундаментальных исследований (код темы FSEG-2020-0024).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Коэффициенты b_{ik} из уравнения (9) равны

$$b_{02} = -\frac{1}{2}\left[1 + I_s(r+1)\right], \quad b_{03} = 1;$$

$$b_{11} = -3\left[1 + I_s(r+1)\right],$$

$$b_{12} = \frac{1}{2}\left[7 - 3I_s(r+1)\right], \quad b_{13} = 3;$$

$$b_{20} = -3\left[1 + I_s(r+1)\right],$$

$$b_{21} = \frac{1}{4}\left[-21 - 26I_s(r+1) + 3I_s^2(r+1)^2\right],$$

$$b_{22} = -3\left[-4 + I_s(r+1)\right], \quad b_{23} = 3;$$

$$b_{30} = \frac{1}{2}\left[-15 - 8I_s(r+1) + 3I_s^2(r+1)^2\right],$$

$$
\begin{aligned}
&b_{31} = -\frac{1}{2}I_s\Big[c(1+I_s(r+1)) - (r+1)(-13+3I_s(r+1))\Big],\\
&b_{32} = \frac{1}{2}\left[23 + I_s(2c - 7(r+1))\right], \quad b_{33} = 1;\\
&b_{40} = \frac{1}{4}\Big[-24+I_s(r+1-3c) - I_s^3(r+1)(c+(r+1)^2) + I_s^2(8(r+1)^2 - c(3r+4))\Big],\\
&b_{41} = \frac{1}{4}\Big[15-2I_s(c+10(r+1)) + I_s^2(5(r+1)^2 - 2c(2r+1))\Big],\\
&b_{42} = \frac{1}{2}\left[7 + I_s(4c - 3(r+1))\right];\\
&b_{50} = \frac{1}{4}\Big[-6 + I_s(5(r+1) - 3c) + I_s^3(r+1)(c(r-1) - (r+1)^2) + I_s^2(2(r+1)^2 - 4c)\Big],\\
&b_{51} = \frac{1}{2}\left[3 - 4I_s(r+1) + I_s^2((r+1)^2 - 2cr)\right], \quad b_{52} = cI_s.
\end{aligned}
\tag{22}
$$

ЛИТЕРАТУРА

1. I. R. Berchera and I. P. Degiovanni, Metrologia **56**, 024001 (2019).
2. V. D'ambrosio, N. Spagnolo, L. Del Re et al., Nat. Commun. **4**, 2432 (2013).
3. S. Pogorzalek, K. G. Fedorov, M. Xu et al., Nat. Commun. **10**, 2604 (2019).
4. К. С. Тихонов, А. Д. Манухова, С. Б. Королёв, Т. Ю. Голубева, Ю. М. Голубев, Опт. и спектр. **127**, 811 (2019).
5. J. Shi, G. Patera, D. B. Horoshko, and M. I. Kolobov, J. Opt. Soc. Amer. B **37**, 3741 (2020).
6. S. Ritter, C. Nolleke, C. Hahn et al., Nature **484**, 195 (2012).
7. С. О. Тарасов, С. Н. Андрианов, Н. М. Арсланов, С. А. Моисеев, Изв. РАН, сер. физ. **82**, 1148 (2018).
8. Е. Н. Попов, В. А. Решетов, Письма в ЖЭТФ **111**, 846 (2020).
9. A. A. Sokolova, G. P. Fedorov, E. V. Il'ichev, and O. V. Astafiev, Phys. Rev. A **103**, 013718 (2021).
10. Д. Ф. Смирнов, А. С. Трошин, УФН **153**, 233 (1987).
11. S. Ya. Kilin and T. B. Krinitskaya, J. Opt. Soc. Amer. B **8**, 2289 (1991).
12. Yi Mu and C. M. Savage, Phys. Rev. A **46**, 5944 (1992).
13. А. В. Козловский, А. Н. Ораевский, ЖЭТФ **115**, 1210 (1999).
14. B. Jones, S. Ghose, J. P. Clemens, P. R. Rice, and L. M. Pedrotti, Phys. Rev. A **60**, 3267 (1999).
15. Т. Б. Карлович, С. Я. Килин, Опт. и спектр. **91**, 374 (2001).
16. С. Я. Килин, Т. Б. Карлович, ЖЭТФ **122**, 933 (2002).
17. Т. Б. Карлович, С. Я. Килин, Опт. и спектр. **103**, 288 (2007).
18. Т. Б. Карлович, Опт. и спектр. **111**, 758 (2011).
19. N. V. Larionov and M. I. Kolobov, Phys. Rev. A **84**, 055801 (2011).
20. S. Ya. Kilin and A. B. Mikhalychev, Phys. Rev. A **85**, 063817 (2012).
21. N. V. Larionov and M. I. Kolobov, Phys. Rev. A **88**, 013843 (2013).
22. E. N. Popov and N. V. Larionov, Proc. SPIE **9917**, 99172X (2016), DOI:10.1117/12.2229228.
23. В. А. Бобрикова, Р. А. Хачатрян, К. А. Баранцев, Е. Н. Попов, Опт. и спектр. **127**, 976 (2019).

24. N. V. Larionov, *Proc. 2020 IEEE Int. Conf. on Electrical Engineering and Photonics* (*EExPolytech*), 265 (2020), DOI: 10.1109/EExPolytech50912.2020.9243955.

25. N. V. Larionov, J. Phys.: Conf. Ser. **2103**, 012158 (2021), DOI: 10.1088/1742-6596/2103/1/012158.

26. B. Parvin, Eur. Phys. J. Plus **136**, 728 (2021).

27. D. B. Horoshko, Chang-Shui Yu, and S. Ya. Kilin, J. Opt. Soc. Amer. B **38**, 3088 (2021).

28. J. McKeever, A. Boca, A. D. Boozer, J. R. Buck, and H. J. Kimble, Nature **425**, 268 (2003).

29. M. Nomura, N. Kumagai, S. Iwamoto, Y. Ota, and Y. Arakawa, Opt. Express **17**, 15975 (2009).

30. F. Dubin, C. Russo, H. G. Barros A. Stute, C. Becher, P. O. Schmidt, and R. Blatt, Nat. Phys. **6**, 350 (2010).

31. А. Найфэ, *Введение в методы возмущений*, Мир, Москва (1984).

32. Л. Мандель, Э. Вольф, *Оптическая когерентность и квантовая оптика*, Физматлит, Москва (2000).

33. G. S. Agarwal and S. Dutta Gupta, Phys. Rev. A **42**, 1737 (1990).

34. Ф. М. Федоров, *Бесконечные системы линейных алгебраических уравнений и их приложения*, Наука, Новосибирск (2011).