

К ТЕОРИИ ОМИЧЕСКИХ ПОТЕРЬ В LC -СИСТЕМАХ

*Б. Я. Балагуров**

*Институт биохимической физики им. Н. М. Эмануэля Российской академии наук
119334, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 22 октября 2021 г.,
после переработки 22 октября 2021 г.
Принята к публикации 25 октября 2021 г.

Рассмотрена низкочастотная проводимость LC -систем — неупорядоченных решеток с индуктивными (L) и емкостными (C) связями в переменном электрическом поле. Выясняются условия, при которых в таких системах возможны реальные (омические) потери энергии.

DOI: 10.31857/S0044451022020146

В ходе исследований электрических свойств двумерных композитов [1] Дыхне, в частности, показал, что для случайно-неоднородных бинарных систем их эффективная проводимость σ_e равна среднему геометрическому от проводимостей компонент, если их концентрации равны. Этот же результат справедлив для системы со структурой шахматной доски, а также для неупорядоченной квадратной решетки с половинным составом. Применение полученной формулы для σ_e к LC -решетке, связи которой представляют собой индуктивность L или электрическую емкость C , привело к неожиданному результату: в системе, состоящей только из недиссипативных элементов, оказались возможны потери энергии. Таким образом система, состоящая из реактивных (L - и C -) сопротивлений, может обладать реальным активным (омическим) сопротивлением.

В настоящей работе проблема существования реальных потерь энергии в LC -системах обсуждается с общих позиций. Показано, что омическим сопротивлением могут обладать как двумерные, так и трехмерные LC -системы. Оказалось, что вещественная часть величины σ_e , отвечающая за потери энергии, непосредственно связана с особенностями σ_e как аналитической функции отношения проводимостей компонент. Поэтому исследование физического явления омических потерь в LC -системах может прояснить некоторые чисто математические вопросы.

1. Сначала рассмотрим двумерную задачу о проводимости изотропного двухкомпонентного композита. Эффективная проводимость σ_e такой системы является функцией трех основных аргументов:

$$\sigma_e = \sigma_e(p; \sigma_1, \sigma_2). \quad (1)$$

Здесь σ_1 и σ_2 — проводимости компонент, p — безразмерная концентрация (доля занимаемой площади) первой компоненты; концентрация второй компоненты равна $1 - p$. Для решеток под концентрацией p понимается доля связей с проводимостью σ_1 .

В работах [1, 2] для величины σ_e получено так называемое соотношение взаимности:

$$\sigma_e(p; \sigma_1, \sigma_2) \sigma_e(p; \sigma_2, \sigma_1) = \sigma_1 \sigma_2. \quad (2)$$

Здесь второй сомножитель в левой части равенства относится к взаимной системе, отличающейся от исходной заменой $\sigma_1 \rightleftharpoons \sigma_2$. Соотношение (2) было выведено в работе [2] для систем с периодическим расположением включений. Применение преобразования симметрии позволило доказать (см. [1]), что соотношение (2) справедливо для двумерных систем произвольной структуры, в том числе и неупорядоченной.

Следуя работе [1], рассмотрим теперь бинарную модель со случайным распределением компонент. Такая система при замене проводимостей $\sigma_1 \rightleftharpoons \sigma_2$ становится взаимной, а при дополнительной замене концентрации ($p \rightarrow 1 - p$) возвращается в исходное состояние. Поэтому при такой двойной замене эффективная проводимость не меняется, так что

$$\sigma_e(p; \sigma_1, \sigma_2) = \sigma_e(1 - p; \sigma_2, \sigma_1). \quad (3)$$

* E-mail: balagurov@deom.chph.ras.ru, byabalagurov@mail.ru

С учетом этого равенства соотношение взаимности (2) для подобных систем принимает вид

$$\sigma_e(p; \sigma_1, \sigma_2) \sigma_e(1-p; \sigma_1, \sigma_2) = \sigma_1 \sigma_2. \quad (4)$$

Отсюда при $p = 1/2$ получаем [1]

$$\sigma_e(1/2; \sigma_1, \sigma_2) = \sqrt{\sigma_1 \sigma_2}. \quad (5)$$

Этот результат, как следует из его вывода, справедлив для изотропной двумерной бинарной системы со случайным распределением компонент. В то же время для модели со структурой шахматной доски имеем $p = 1/2$, а замена $\sigma_1 \rightleftharpoons \sigma_2$ ее не меняет. Поэтому уже из соотношения взаимности (2) следует, что результат (5) справедлив и для этой упорядоченной модели. Выражение (5) было получено также в ходе непосредственного решения (с определением напряженности электрического поля в каждой ячейке) задачи о проводимости модели со структурой шахматной доски [3]. Можно показать [1] также, что результат (5) справедлив и для квадратной решетки со случайным распределением проводимостей связей при их равной концентрации. Отметим, что во всех трех случаях концентрация $p = 1/2$ является критической (порогом протекания), при которой происходит фазовый переход металл–диэлектрик [4].

Рассмотрим квадратную решетку, связи которой содержат не обычные проводимости или сопротивления, а индуктивность (L -связи) или электрическую емкость (C -связи), случайным образом распределенные. Проводимости таких связей чисто мнимые (бездиссипативные) и имеют вид [5]

$$\sigma_1 = \sigma_L = i \frac{c^2}{\omega L}, \quad \sigma_2 = \sigma_C = -i\omega C, \quad (6)$$

где под частотой ω следует понимать величину $\omega + i0$. В (6) L — индуктивность, C — емкость, c — скорость света.

Эффективная проводимость подобной LC -системы в квазистационарном приближении [5] определяется подстановкой мнимых проводимостей (6) в выражение для σ_e системы той же структуры с обычными проводимостями. Для неупорядоченной квадратной LC -решетки с половинным составом подстановка σ_1 и σ_2 из (6) в формулу (5) дает [1]

$$\sigma_e(1/2; \sigma_L, \sigma_C) = c \sqrt{\frac{C}{L}}. \quad (7)$$

Этот результат кажется парадоксальным. Действительно, согласно формуле (7) LC -система с чисто мнимыми (бездиссипативными) элементами обладает вещественной эффективной проводимостью. Это

означает, что в ней происходит, как и в системе с обычными (активными) сопротивлениями, диссипация энергии, т. е. имеются омические потери.

Объяснение этого феномена дано в работе [1] и состоит в следующем. В неупорядоченной решетке имеются LC -контур с различными собственными частотами. Энергия электрического поля затрачивается на резонансное возбуждение колебаний этих контуров. При этом реальная диссипация энергии происходит при наличии в системе сколь угодно малого поглощения. В бесконечной решетке спектр собственных частот непрерывен, так что поглощение энергии происходит в широком диапазоне изменения частоты ω .

Приведенные рассуждения иллюстрируют результат (7), относящийся к квадратной решетке с критической концентрацией. Однако эта аргументация в равной мере применима к любым LC -решеткам (в том числе трехмерным) и не ограничивается критической концентрацией. Поэтому следует ожидать, что существование омического сопротивления в LC -системах является достаточно общим явлением.

2. Существование омической проводимости в LC -системе было установлено в работе [1] на частном примере неупорядоченной квадратной решетки с критической концентрацией. Для исследования этой проблемы в случае произвольной LC -решетки необходимо выяснить некоторые общие свойства эффективной проводимости σ_e из формулы (1) при комплексных значениях аргументов σ_1 и σ_2 [6, 7]. Для этого введем безразмерную эффективную проводимость f согласно выражению

$$\sigma_e(p; \sigma_1, \sigma_2) = \sigma_1 f(p, h), \quad h = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}. \quad (8)$$

В трехмерном случае под p следует понимать долю объема, занятого первой компонентой, или долю связей с проводимостью σ_1 в решетке.

Согласно [5] в переменном электрическом поле проводимость $\sigma(\omega)$ наравне с диэлектрической проницаемостью является аналитической функцией комплексной частоты ω при $\text{Im} \omega > 0$. Кроме того, $\sigma(\omega)$ не имеет в верхней полуплоскости ω нулей. Поэтому безразмерная проводимость f , равная отношению двух аналитических функций σ_e/σ_1 , также аналитична при $\text{Im} \omega > 0$. Зависимость функции

$$f = f(p, \zeta) \quad (9)$$

осуществляется через аргумент

$$\zeta = \zeta(\omega) = \frac{\sigma_2(\omega)}{\sigma_1(\omega)}. \quad (10)$$

В свою очередь, с помощью этого соотношения верхняя полуплоскость ω конформно отображается на некоторую область комплексной плоскости переменной ζ . В этой области величина $f(p, \zeta)$ аналитична уже как функция аргумента ζ . Наибольшую по площади область дает отображение (10) с проводимостями компонент, по форме совпадающими с σ_L и σ_C из формулы (6):

$$\zeta(\omega) = -\frac{\omega^2}{\Omega^2}, \quad \Omega = \frac{c}{\sqrt{LC}}. \quad (11)$$

Однако здесь, в отличие от (6), величина ω является комплексной переменной, определенной на всей верхней полуплоскости; Ω — томсоновская частота. Соотношением (11) верхняя полуплоскость $\text{Im } \omega > 0$ отображается на всю комплексную плоскость ζ за исключением луча $\text{Im } \zeta = 0$ и $-\infty \leq \text{Re } \zeta \leq 0$. Следовательно, безразмерная эффективная проводимость $f(p, \zeta)$ как функция аргумента ζ аналитична на всей комплексной плоскости с разрезом вдоль отрицательной действительной полуоси. При этом любые особенности функции $f(p, \zeta)$ могут находиться только на этом луче.

Согласно [5]

$$\sigma(-\omega^*) = \sigma_*(\omega), \quad (12)$$

так что

$$f(p, \zeta(-\omega^*)) = f^*(p, \zeta(\omega)), \quad (13)$$

или при

$$\zeta = \xi + i\eta \quad (14)$$

имеем

$$f(p, \xi - i\eta) = f^*(p, \xi + i\eta). \quad (15)$$

Положив в (15) $\xi = -t$ и $\eta = 0$, находим следующие соотношения симметрии:

$$\text{Re } f^{(-)}(p, -t) = \text{Re } f^{(+)}(p, -t), \quad (16)$$

$$\text{Im } f^{(-)}(p, -t) = -\text{Im } f^{(+)}(p, -t), \quad (17)$$

где $0 \leq t \leq \infty$. Здесь индексы «плюс» и «минус» обозначают принадлежность функции f к верхнему или нижнему берегу разреза вдоль луча — отрицательной действительной полуоси.

Как известно [4], в двумерном случае имеется одна критическая концентрация p_c (порог протекания). При концентрации первой компоненты $p < p_c$

в бинарной двумерной системе имеется протекание только по второй компоненте, а при $p > p_c$ — только по первой. В трехмерном случае ситуация иная — здесь критических концентраций две: p_{c1} и p_{c2} ($p_{c1} < p_{c2}$). При $p < p_{c1}$ есть протекание только по второй компоненте, в диапазоне $p_{c1} < p < p_{c2}$ сосуществуют протекания по обоим компонентам, а при $p > p_{c2}$ отсутствует протекание по второй компоненте.

Если $\sigma_2 = 0$, то при изменении концентрации первой компоненты от $p > p_{c1}$ до $p < p_{c1}$ в точке $p = p_{c1}$ происходит фазовый переход металл-диэлектрик: эффективная проводимость σ_e при всех $p \leq p_{c1}$ равна нулю. Если же $\sigma_2 \neq 0$, но мала ($\sigma_2/\sigma_1 \ll 1$), то в окрестности критической концентрации p_{c1} в поведении эффективной проводимости имеются известные аномалии, которые описываются в рамках гипотезы подобия [4]. Ниже понадобится выражение для безразмерной эффективной проводимости f в самой критической точке:

$$f(p_{c1}, h) = a_0 h^s, \quad h \ll 1. \quad (18)$$

Здесь s — критический индекс ($0 < s < 1$), $a_0 \sim 1$ — численный коэффициент. В двумерном случае $s = 1/2$, $a_0 = 1$ и для функции f имеем

$$f(1/2, h) = \sqrt{h} \quad (19)$$

— ср. с формулой (5).

В противоположном случае $h \gg 1$ с учетом определения величины p_{c2} для функции $f(p, h)$ имеем следующие асимптотики:

$$p > p_{c2}: \quad f(p, h) \approx f(p, \infty) + \dots, \quad (20)$$

$$p < p_{c2}: \quad f(p, h) \approx hA(p) + B(p) + \dots \quad (21)$$

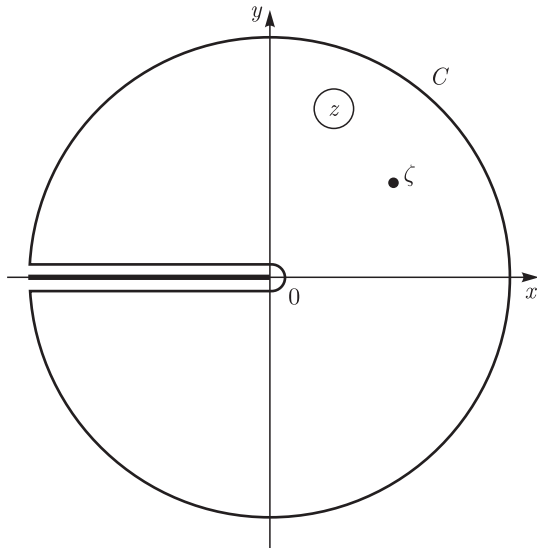
Здесь символ \approx означает асимптотическое выражение. В (21) $A(p)$ и $B(p)$ — некоторые функции концентрации p . Опущенные в (20), (21) члены разложения имеют порядок $1/h$ и выше.

Вычисляя при $p > p_{c2}$ интеграл

$$\int \frac{f(p, z) - f(p, \infty)}{z - \zeta} \frac{dz}{2\pi i}, \quad (22)$$

взятый вдоль контура, представляющего собой окружность бесконечного радиуса, дополненную обходом вокруг разреза (см. рисунок), получим следующее дисперсионное соотношение:

$$p > p_{c2}: \quad f(p, \zeta) = f(p, \infty) - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\text{Im } f^{(+)}(p, -t)}{t + \zeta} dt. \quad (23)$$



Аналогичным образом находим второе дисперсионное соотношение:

$$p < p_{c2} : f(p, \zeta) = \zeta A(p) + B(p) - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\text{Im} f^{(+)}(p, -t)}{t + \zeta} dt. \quad (24)$$

Следовательно, знание величины $\text{Im} f^{(+)}(p, -t)$ как функции действительной переменной t позволяет с помощью этих соотношений находить $f(p, \zeta)$ в любой точке комплексной плоскости ζ . Если безразмерная эффективная проводимость $f(p, h)$ известна во всем интервале $0 \leq h \leq \infty$, то функцию $\text{Im} f^{(+)}(p, -t)$ можно найти из соотношений (23), (24) при $\zeta = h$, рассматривая их как интегральные уравнения.

3. В рассматриваемом квазистационарном приближении выражение для эффективной проводимости LC-системы следует из общей формулы (8) с заменой $h \rightarrow \zeta$ при подстановке величин $\sigma_1 = \sigma_L$ и $\sigma_2 = \sigma_C$ из (6). В результате аргумент ζ примет вид

$$\zeta = \frac{\sigma_C}{\sigma_L} = -\frac{(\omega + i0)^2}{\Omega^2} \quad (25)$$

с Ω из формулы (11). Здесь ω — реальная (вещественная) частота $\omega > 0$. Подстановка (25) вместо h в формулу (8) дает

$$\sigma_e(p; \sigma_L, \sigma_C) = i \frac{c^2}{\omega L} f^{(-)}(p, -\omega^2/\Omega^2). \quad (26)$$

Индекс «минус» у функции f означает, что она должна быть взята на нижнем берегу разреза.

Отделяя мнимую и действительную части, получим

$$\text{Im} \sigma_e(p; \sigma_L, \sigma_C) = \frac{c^2}{\omega L} \text{Re} f^{(-)}(p, -\omega^2/\Omega^2), \quad (27)$$

$$\text{Re} \sigma_e(p; \sigma_L, \sigma_C) = -\frac{c^2}{\omega^2} \text{Im} f^{(-)}(p, -\omega^2/\Omega^2). \quad (28)$$

С учетом соотношений симметрии (16), (17) выражения (27), (28) принимают вид

$$\text{Im} \sigma_e(p; \sigma_L, \sigma_C) = \frac{c^2}{\omega L} \text{Re} f^{(+)}(p, -\omega^2/\Omega^2), \quad (29)$$

$$\text{Re} \sigma_e(p; \sigma_L, \sigma_C) = \frac{c^2}{\omega L} \text{Im} f^{(+)}(p, -\omega^2/\Omega^2). \quad (30)$$

Здесь индекс «плюс» означает верхний берег разреза. Таким образом, омическая проводимость $\text{Re} \sigma_e$ LC-системы выражается через ту же функцию $\text{Im} f^{(+)}(p, -t)$, которая входит в дисперсионные соотношения (23), (24).

Величина $\text{Im} f^{(+)}(p, -t)$ может быть найдена в явном виде для некоторых частных случаев. Так, в двумерном случае из формулы (19) следует

$$f^{(+)}(1/2, -t) = i \sqrt{t}, \quad (31)$$

так что

$$\text{Im} f^{(+)}(1/2, -\omega^2/\Omega^2) = \frac{\omega}{\Omega}. \quad (32)$$

Соответствующая действительная часть функции $f^{(+)}(1/2, -\omega^2/\Omega^2)$ в этом случае равна нулю. Подстановка выражения (32) в общую формулу (30) приводит, как и следует, к результату (7).

Из формулы (18) находим

$$f^{(+)}(p_{c1}, -t) = a_0 t^s e^{is\pi}, \quad (33)$$

откуда следует

$$\text{Re} f^{(+)}(p_{c1}, -\omega^2/\Omega^2) = a_0 \left(\frac{\omega}{\Omega}\right)^{2s} \cos s\pi, \quad (34)$$

$$\text{Im} f^{(+)}(p_{c1}, -\omega^2/\Omega^2) = a_0 \left(\frac{\omega}{\Omega}\right)^{2s} \sin s\pi. \quad (35)$$

Подстановка выражения (35) в общую формулу (30) дает

$$\text{Re} \sigma_e(p_{c1}; \sigma_L, \sigma_C) = a_0 \frac{c^2}{L} \frac{\omega^{2s-1}}{\Omega^{2s}} \sin s\pi. \quad (36)$$

В трехмерном случае $s \approx 0.7$ [7] и $2s - 1 \approx 0.4$, так что величина $\text{Re} \sigma_e$ зависит от частоты примерно как $\omega^{1/2}$.

Таким образом, согласно формуле (30) действительная часть эффективной проводимости LC -решетки, ответственная за омические потери, выражается через величину $\text{Im } f^{(+)}(p, -t)$, характеризующую математическую особенность функции $f(p, \zeta)$ на разрезе плоскости комплексного аргумента ζ . Эта же величина входит в дисперсионные соотношения (23), (24), из которых следует, что $\text{Im } f^{(+)}(p, -t)$ отлична от нуля при любой концентрации p . С другой стороны, при фиксированном p величина $\text{Im } f^{(+)}(p, -t) \neq 0$ по крайней мере в некотором диапазоне изменения аргумента t . Следует ожидать поэтому, что для неупорядоченных LC -решеток $\text{Re } \sigma_e \neq 0$ в широкой области изменения как концентрации, так и частоты. Отличие $\text{Re } \sigma_e$ от нуля означает наличие омических потерь энергии, так что должно выполняться неравенство

$$\text{Im } f^{(+)}(p, -t) \geq 0 \quad (37)$$

при всех $0 \leq t \leq \infty$. Справедливость этого неравенства подтверждается частными случаями — см. (32) и (35).

Как отмечено в разд. 1, в неупорядоченной LC -решетке имеется множество LC -цепочек с различными собственными частотами ω_ν . Поэтому величина $f(p, -\omega^2/\Omega^2)$ как отклик на внешнее переменное электрическое поле представляет собой сумму резонансных слагаемых типа $1/(\omega^2 - \omega_\nu^2)$, чему в функции $f(p, \zeta)$ отвечают слагаемые полюсного вида $1/(\zeta + t_\nu)$, где $t_\nu > 0$. Поэтому при $\zeta = -t + i0$ для мнимой части $f^{(+)}(p, -t)$ получаем

$$\text{Im } f^{(+)}(p, -t) = \sum_\nu F_\nu \delta(t - t_\nu), \quad F_\nu > 0. \quad (38)$$

Для LC -решеток конечного размера спектр частот ω_ν , как и величин t_ν , дискретен, так что $\text{Im } f^{(+)}(p, -t)$ представляет собой сумму дельта-функций. При переходе к решеткам бесконечного размера спектр величин t_ν становится непрерывным, сумма в (38) заменяется на интеграл и зависимость $\text{Im } f^{(+)}(p, -t)$ от аргумента t становится «нормальной» — монотонной. Приведенные частные примеры (32) и (35) относятся к бесконечным системам, так как только для них имеет смысл введение понятия критической концентрации.

Ввиду важности величины $\text{Im } f^{(+)}(p, -t)$ для всей задачи о проводимости двухкомпонентных композитов необходимо найти мнимую часть $f^{(+)}(p, -t)$ для неупорядоченных, например, квадратной и кубической LC -решеток. В принципе это можно сделать, вычисляя в ходе обычного компьютерного эксперимента в режиме постоянного тока эффективную проводимость σ_e решетки с проводимостями $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = -t + i\varepsilon$, где $\varepsilon \rightarrow +0$. Затем величина $\text{Im } f^{(+)}(p, -t)$ определяется из соотношения

$$\sigma_e(p; 1, -t + i\varepsilon) = f(p, -t + i\varepsilon)$$

при достаточно малом ε . Такой подход, однако, весьма трудозатратен, а использование полученной для $\text{Im } f^{(+)}(p, -t)$ «гребенки» не слишком удобно. Более реалистичным представляется определение величины $\text{Im } f^{(+)}(p, -t)$ из дисперсионных соотношений (23), (24) как интегральных уравнений. Аппроксимируя $\text{Im } f^{(+)}(p, -t)$ ступенчатой функцией аргумента t , результат вычислений получим в виде гистограммы. Этот график даст общее представление о зависимости функции $\text{Im } f^{(+)}(p, -t)$ от t при заданной концентрации p .

ЛИТЕРАТУРА

1. А. М. Дыхне, ЖЭТФ **59**, 110 (1970).
2. J. V. Keller, J. Math. Phys. **5**, 548 (1964).
3. Ю. П. Емец, *Электрические характеристики композиционных материалов с регулярной структурой*, Наукова думка, Киев (1986).
4. A. L. Efros and V. I. Shklovskii, Phys. Stat. Sol. (b) **76**, 475 (1976).
5. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, Наука, Москва (1992).
6. Б. Я. Балагуров, ЖЭТФ **88**, 1664 (1985).
7. Б. Я. Балагуров, *Электрофизические свойства композитов. Макроскопическая теория*, URSS, Москва (2015).