

# РЕШЕНИЕ САМООРГАНИЗОВАННО-КРИТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ МАННЫ ДЛЯ РАЗМЕРНОСТЕЙ ПРОСТРАНСТВА 2–4

А. В. Подлазов\*

*Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша Российской академии наук  
125047, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 13 ноября 2021 г.,  
после переработки 22 ноября 2021 г.  
Принята к публикации 23 ноября 2021 г.

Исследуется модель Манны — консервативная изотропная самоорганизованно-критическая модель типа кучи песка. Для нее приводятся результаты компьютерного моделирования в двух-, трех- и четырехмерной постановках, а также аналитическое решение для размерности пространства между нижней и верхней критическими размерностями. Решение основано на построении модели мезоуровня, формулируемой в терминах плотности возбуждения, его корреляционной длины, средней активности лавины и ширины границы ее области. Расчет показателей выполнен двумя независимыми способами: на основе перенормировки стохастических дифференциальных уравнений и путем сведения происходящих процессов к случайным блужданиям.

DOI: 10.31857/S0044451022030117

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В 2021 г. исполнилось 30 лет модели Манны [1], в класс универсальности которой попадают многие стохастические анизотропные консервативные модели теории самоорганизованной критичности [2]. Несмотря на длительную историю исследований и частую встречаемость, этот класс получил частное — для двумерного случая — аналитическое описание лишь сравнительно недавно [3, 4], а общего описания не имел вовсе. В настоящей работе удаётся устранить этот пробел.

Работа построена следующим образом. Далее во Введении приводится краткое описание явления самоорганизованной критичности, моделей типа кучи песка и способов обращения со степенными распределениями вероятностей. В разд. 2 описываются правила рассматриваемой модели и рассчитывается ее верхняя критическая размерность. Разделы 3 и 4 посвящены теоретическому изучению модели на основе двух различных инструментариев, связанных соответственно с ланжевеновскими уравнениями и со случайными блужданиями. В разд. 5 проводится сопоставление полученного решения с результатами

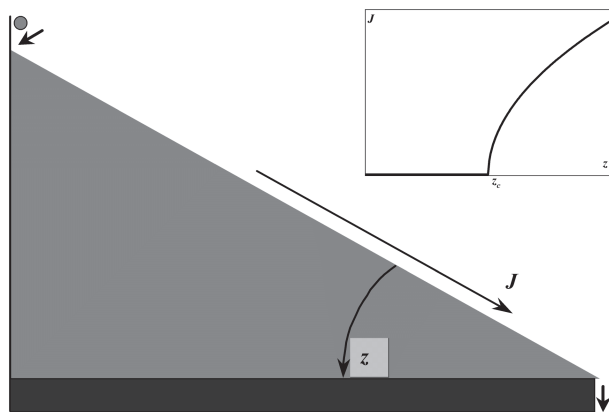
компьютерного эксперимента. Завершается статья обсуждением, включающим введение нового суперуниверсального показателя.

### 1.1. Парадигма самоорганизованной критичности

Базовой моделью теории самоорганизованной критичности является куча песка [5]. Рассмотрим уголок с песком, изображенный на рис. 1. Если считать, что возможно лишь поверхностное перемещение песка, инерцией движения которого можно пренебречь, то состояние системы определяется средним наклоном поверхности  $z$ . Когда он невелик, песок в целом неподвижен. А при превышении наклоном некоторого порогового значения  $z_c$  возникает спонтанный ток песка  $J$  по поверхности, непрерывно возрастающий по мере увеличения  $z$ , как показано на вставке на рис. 1. Таким образом, имеет место непрерывный фазовый переход, в котором наклон поверхности  $z$  является управляющим параметром, а ток песка  $J$  — параметром порядка.

Критическое состояние соответствует моменту отрыва параметра порядка от нуля. Обычные критические системы попадают в это состояние благодаря тонкой подстройке управляющего параметра к заранее неизвестному критическому значению. Однако в ряде систем оказывается возможным, уста-

\* E-mail: Tiger@Keldysh.ru



**Рис. 1.** Фазовый переход для кучи песка. Ее критическое состояние может достигаться как искусственно, так и в результате самоорганизации

навливая параметр порядка в  $+0$ , заставить управляющий параметр самостоятельно отыскать критическую точку, это и называется самоорганизованной критичностью.

Иначе говоря, вместо того, чтобы крутить ручку прибора, можно начать сдвигать с нулевой отметки стрелку на его шкале, вынуждая ручку повернуться до нужного положения [6]. Такое управление параметром порядка обыкновенно достигается при помощи разделения временных масштабов [7], при котором время релаксации системы много меньше времени между последовательными возмущениями, т. е. песок едва перемещается по куче.

Самоорганизация системы в критическое состояние происходит при токе  $J = +0$ . Чтобы обеспечить такую величину параметра порядка, будем добавлять песчинки по одной на вершину кучи (см. рис. 1), дожидаясь завершения процесса релаксации. При этом ток песка через кучу, очевидно, имеет минимально возможное значение — в среднем одна песчинка за время одного события.

Если наклон поверхности мал, то осыпание, вызванное добавленной песчинкой, скорее всего, не достигнет края кучи и наклон ее поверхности увеличится. При большом наклоне возможно возникновение глобального осыпания, в результате которого некоторое количество песка покинет систему и наклон уменьшится. Равновесие между количеством песка, добавляемого в систему, и количеством песка, покидающего ее, достигается при критическом наклоне поверхности, когда возмущение может распространяться по куче сколь угодно далеко, не затухая и не разрастаясь.

Таким образом, возникает отрицательная обратная связь, вынуждающая наклон со временем принять значение  $z = z_c$  вне зависимости от начального профиля поверхности. При этом куча, состоящая из локально взаимодействующих песчинок, начинает вести себя как единое целое. То есть в результате самоорганизации в критическое состояние система приобретает свойства, которых не было у ее элементов.

Поведение самоорганизованно-критической системы является масштабно-инвариантным, что означает отсутствие собственных характерных размеров у описывающих его переменных. Они подчиняются степенным распределениям с плотностью вероятности вида

$$u_X(X) \propto X^{-(1+\alpha_x)}, \tag{1}$$

где  $\alpha_x$  — характеристический показатель распределения величины  $X$ .

Здесь и далее применяются следующие обозначения. При записи переменных заглавные буквы используются для итоговых значений, относящихся к уже завершившимся событиям, а соответствующие строчные — для текущих значений, относящихся к развивающимся событиям. В индексах функций всегда стоят заглавные буквы (распределения имеют смысл лишь для итоговых значений переменных), а в индексах показателей — строчные (это непринципиально, но существенно улучшает читаемость формул).

### 1.2. Свойства реальных степенных распределений

Формула (1) является математической идеализацией и применима лишь в промежуточной асимптотике, протяженность которой ограничена с обеих сторон: сверху — в силу конечности размера рассматриваемой системы, а снизу — в силу конечности размеров слагающих ее элементов. И если отклонение  $u_X(X)$  от степенного вида при малых  $X$  обычно не представляет особого интереса, то при больших оно имеет принципиальное значение.

Нестепенное поведение плотности учитывается с помощью метода конечноразмерного скейлинга, связанного с заменой формулы (1) более общей записью вида

$$u_X(X) = X^{-(1+\alpha_x)} g_X(X/X_1). \tag{2}$$

Скейлинговая функция  $g_X$  полагается примерно постоянной при малых значениях аргумента и убывающей быстрее любой его степени при больших. Из-

за масштабной инвариантности величина  $X_1$ , характеризующая события, крупные настолько, что они уже не помещаются в систему конечного размера  $L$ , растет как некоторая его степень:

$$X_1 \propto L^{\nu_x}. \quad (3)$$

При этом доля событий, не помещающихся в систему, убывает с ее размером как

$$P\{X > X_1\} = \int_{X_1}^{\infty} u_X(X) dX \cong \int_{L^{\nu_x}}^{\infty} X^{-(1+\alpha_x)} g_X(X L^{-\nu_x}) dX \propto L^{-\varepsilon}, \quad (4)$$

где универсальный показатель

$$\varepsilon \equiv \alpha_x \nu_x$$

не зависит от того, какая именно величина используется для его вычисления, поскольку если событие не помещается в систему, то не помещается сразу по всем своим характеристикам.

Сочетание формул (2), (3) и (4) позволяет определить скейлинговое поведение и для среднего события

$$\langle X \rangle = \int X^{-\alpha_x} g_X(X/X_1) dX \propto L^{\sigma_x}, \quad (5a)$$

где

$$\sigma_x = \nu_x - \varepsilon. \quad (5b)$$

При исследовании конкретных моделей для некоторых величин удастся из общих соображений найти скейлинговые показатели  $\nu_x$  и  $\sigma_x$ , связывающие характерные значения  $X_1$  и  $\langle X \rangle$  с обусловившим их появление конечным размером  $L$ , что будет продемонстрировано далее.

В масштабно-инвариантном состоянии взаимосвязь разных характеристик события  $X$  и  $Y$  дается степенной формулой

$$X^{\alpha_x} \propto Y^{\alpha_y}, \quad (6)$$

получаемой из сохранения вероятности для некрупных событий, еще попадающих на степенной участок распределения (2). С другой стороны, сопоставление величин крупных событий  $X_1 \propto L^{\nu_x}$  и  $Y_1 \propto L^{\nu_y}$  приводит к формуле

$$Y^{\nu_x} \propto X^{\nu_y}, \quad (7)$$

в сочетании с зависимостью (6) воспроизводящей тождество (4).

Основной задачей при исследовании самоорганизованно-критических моделей является их решение, т. е. определение характеристических и скейлинговых показателей для распределений всех переменных, описывающих происходящие события.

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

После появления первой модели кучи песка Бака – Танга – Визенфельда (БТВ) [8, 9], заложившей основы теории самоорганизованной критичности, был создан целый ряд моделей этого типа. Описанная выше концептуальная схема с жестко заданным направлением склона кучи порождает сравнительно простые модели [10, 11], которые легко могут быть решены аналитически [10, 12]. Значительно более интересны изотропные модели, одна из которых, предложенная Субраншу Манной [1], и рассматривается в настоящей работе.

### 2.1. Описание правил

Модель Манны формулируется как клеточный автомат (система с дискретными пространством, временем и состояниями) на  $d$ -мерной кубической решетке линейного размера  $L$ . Целые числа  $z$  в ячейках решетки, согласно традиции, интерпретируются как количество содержащихся в них песчинок.

Ячейки, содержащие не менее  $z_c$  песчинок, считаются неустойчивыми и опрокидываются, передавая указанное число песчинок соседним (имеющим общую грань с данной) ячейкам. При этом каждая передаваемая песчинка случайным образом выбирает, в какую из соседних ячеек ей перейти. Значение порога устойчивости  $z_c > 1$  не оказывает принципиального влияния на свойства модели. В оригинальной версии модели было  $z_c = 2$  [1], однако в настоящей работе рассматривается более популярная версия с  $z_c = 2d$  [13], в которой на каждую соседку опрокинувшейся ячейки приходится в среднем по 1 переданной песчинке. При этом правила модели Манны становятся максимально похожи на правила модель БТВ, отличаясь только стохастическим характером раздачи песчинок из опрокинувшейся ячейки.

Краевые условия полагаются открытыми, т. е. при опрокидывании ячеек, находящихся на краю решетки, часть песчинок может выпасть за него, покидая кучу. Потеря кучей песчинок при опрокидывании компенсируется их вбросом, осуществляемым

в состоянии, когда все ячейки устойчивы. Для рассматриваемых здесь решеток четного размера  $L$  песчинки добавляются по одной в ячейку, выбранную случайно среди  $2^d$  центральных ячеек, чем обеспечивается максимальная удаленность от краев точки вброса. Если в его результате происходит нарушение устойчивости ячейки, она опрокидывается, передавая песчинки соседкам и тем самым, возможно, нарушая их устойчивость. Развивается лавина опрокидываний, по завершении которой вбрасывается новая песчинка и все повторяется.

Модель является абелевой, т.е. состояние системы после лавины оказывается одним и тем же при обработке неустойчивых ячеек в любом порядке (при условии, что с каждой ячейкой ассоциирована своя последовательность случайных чисел, определяющих передачу песчинок). Независимо от начального состояния кучи после некоторого количества лавин она переходит в состояние, описываемое степенным распределением лавин по их характеристикам.

Основными характеристиками лавины являются:

$T$  — длительность в параллельном времени (при одновременной обработке всех неустойчивых ячеек);

$N$  — размер — число опрокидываний, или длительность в последовательном времени (при обработке неустойчивых ячеек по одной);

$S$  —  $d$ -мерный объем — число ячеек, где произошли опрокидывания (без учета его кратности);

$C$  — периметр — число ячеек, получивших песчинки, но сохранивших устойчивость, дополненное числом песчинок, выпавших за край решетки.

Наряду с указанными характеристиками лавины будут рассматриваться ее линейная протяженность  $R$ , в предположении компактности области лавины задаваемая формулой  $R \propto S^{1/d}$ , средняя активность  $A = N/T$ , ширина границы области лавины  $W \propto C/R^{d-1}$  и средняя кратность опрокидывания  $M = N/S$ .

## 2.2. Предварительный анализ

Два скейлинговых показателя можно определить непосредственно из правил модели. Во-первых, линейная протяженность и объем наиболее крупных лавин ограничены только размерами решетки, т.е.  $R_1 \propto L$  и  $S_1 \propto L^d$ , или

$$\nu_r = 1 \text{ и } \nu_s = d. \quad (8)$$

Во-вторых, путь каждой песчинки через систему представляет собой случайное блуждание, в силу чего среднее число опрокидываний, в которых

песчинка успевает поучаствовать до того, как покинет решетку, квадратично по ее линейному размеру  $\langle N \rangle \propto L^2$ , или, согласно формулам (5a) и (5b)

$$\sigma_n = \nu_n - \varepsilon = 2. \quad (9)$$

Показатели  $\nu_r$  и  $\sigma_n$  являются суперуниверсальными, т.е. не зависят от размерности пространства.

При рассмотрении четырех основных характеристик лавины ( $T$ ,  $N$ ,  $S$  и  $C$ ) для полного решения модели необходимо определить восемь показателей (четыре пары показателей  $\alpha$  и  $\nu$ ). Формула (4) дает три скейлинговых соотношения, формулы (8) и (9) — еще по одному. Таким образом, остается получить еще три уравнения, связывающие между собой характеристики лавины, на чем и сосредоточены дальнейшие усилия. При этом, чтобы не перегружать текст, базовые скейлинговые соотношения (4), (6), (7), (8) и (9) используются без ссылок.

Поскольку основной интерес представляют показатели распределения, все выкладки здесь проводятся с точностью до коэффициента. Поэтому, предполагая степенной вид зависимостей между всеми характеристиками лавины, деление мы не отличаем от дифференцирования, а умножение — от интегрирования. По тем же причинам коэффициенты во всех уравнениях далее полагаются единичными.

## 2.3. Верхняя критическая размерность

Описание правил завершает определение диапазона изучаемых размерностей пространства  $d$ . Случай  $d = 1$  исключается из рассмотрения в силу его вырожденности, свидетельство чего будет получено далее. Так же не рассматриваются случаи  $d > d_{uc} = 4$ , поскольку при превышении верхней критической размерности  $d_{uc}$  становится неверным предположение о компактности области лавины. Убедиться в этом позволяет элементарный анализ двух процессов.

Сначала рассмотрим распространение лавины по решетке. Если песчинки, передаваемые из опрокинувшейся ячейки ее соседкам, не взаимодействуют друг с другом, то  $r \propto t^{1/2}$ , т.е. линейная протяженность лавины изменяется в параллельном времени диффузионным образом. Для взаимодействующих песчинок (в силу их взаимного отталкивания) зависимость будет иметь больший показатель. Таким образом,

$$\kappa_r \geq 1/2, \quad (10)$$

где использовано обозначение

$$\kappa_x = \nu_x / \nu_t \quad (11)$$

для временной размерности характеристики  $X$ .

Теперь рассмотрим развитие лавины как ветвящийся процесс, участвующие в котором частицы ответственны за потерявшие устойчивость ячейкам. Их число – активность лавины  $a \propto n/t$ . Вследствие самоорганизации кучи в критическое состояние ветвящийся процесс имеет единичный коэффициент размножения частиц. И если они не взаимодействуют друг с другом, то  $a \propto n^{1/2}$ , т. е. активность изменяется в последовательном времени диффузионным образом. Отсюда получаем  $n \propto t^2$ . Для взаимодействующих частиц (в силу обедненности песком соседей неустойчивых ячеек) зависимость будет иметь меньший показатель. Таким образом,

$$\kappa_s \leq \kappa_n \leq 2, \tag{12}$$

где учтено, что объем области лавины не превышает ее размера.

Коль скоро показатель  $\nu_r = 1$  не зависит от размерности пространства, сочетание неравенств (10) и (12) накладывает ограничение на размерность области лавины,

$$\nu_s = \kappa_s / \kappa_r \leq 4.$$

При  $d = d_{uc}$  данное неравенство обращается в равенство, из-за чего начиная с четырехмерного случая следует ожидать среднеполевых значений для всех показателей.

Все отмеченные обстоятельства хорошо известны для модели БТВ [14–16], однако, как можно видеть, ситуация имеет единую природу для любых изотропных консервативных моделей типа кучи песка.

### 3. РЕШЕНИЕ НА ОСНОВЕ ЛАНЖЕВЕНОВСКОГО ФОРМАЛИЗМА

Переход от микроуровня, на котором формулируются правила модели, оперирующие состоянием отдельных ячеек и судьбой отдельных песчинок, к макроуровню, на котором учитываются лишь интегральные характеристики лавин, лежит через мезоуровень, на котором строится промежуточная модель, описывающая коллективную динамику элементов системы. Правила промежуточной модели не выводятся, а угадываются. Поэтому все, сказанное в этом разделе, следует рассматривать, в первую очередь, не как расчет показателей, а как подробное описание промежуточной модели. Общефизическое обоснование ее положений и сопоставление ее результатов с экспериментом вынесены в следующие разделы. Пока же сосредоточимся на вопросе, как

следует проводить расчеты, отложив вопрос, почему это следует делать именно так.

#### 3.1. Плотность возбуждения и корреляционная длина

Развитие лавины представляет собой распространение по системе возбуждения, инициированного вбросом в нее одной песчинки. Этот процесс будем характеризовать плотностью возбуждения  $\rho(\mathbf{x}, t)$ , агрегированно учитывающей не только пространственное размещение неустойчивых ячеек, но и изменение заполнения ячеек устойчивых, которое прямо влияет на их возбудимость.

Будучи скрытой переменной, плотность возбуждения, тем не менее, напрямую влияет на изменение наблюдаемых величин, поэтому анализ мы начинаем именно с нее. Ее эволюция описывается стохастическим уравнением диффузии

$$\dot{\rho}(\mathbf{x}, t) = \Delta\rho(\mathbf{x}, t) + \eta(\mathbf{x}, \rho) \tag{13}$$

с дельта-коррелированным шумом:

$$\langle \eta(\mathbf{x}, \rho) \cdot \eta(\mathbf{x}', \rho') \rangle \propto \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \cdot \delta(\rho - \rho'). \tag{14}$$

Действие случайных факторов определяется заполнением решетки, которое меняется при изменении возбуждения, в силу чего шумовой член  $\eta$  зависит только от  $d$ -мерной пространственной координаты  $\mathbf{x}$  и текущей плотности  $\rho$ , но не от времени  $t$ . Таким образом, шум в уравнении (13) следует считать закрепленным, если рассматривать это уравнение как описывающее динамику поверхности, движущейся в  $(d + 1)$ -мерном пространстве, на которой и производится усреднение шума в формуле (14).

Следует особо подчеркнуть, что выбор шума свободного вида  $\eta(\mathbf{x}, t)$  здесь был бы грубой ошибкой. Явная зависимость от времени предполагает описание плотности только неустойчивых ячеек, непосредственно участвующих в развитии лавины. Однако для этой величины в модели Манн-сконструировать ланжевеновское уравнение невозможно в принципе. Как показывает компьютерный эксперимент, показатели распределений не меняются, если при опрокидывании неустойчивой ячейки передавать ее соседкам не ровно  $z_c$  песчинок, а вообще все песчинки, оказавшиеся в этой ячейке (разумеется, при этом модель перестает быть абелевой, так что все ячейки, одновременно потерявшие устойчивость, и обрабатывать следует одновременно). Иначе говоря, свойства кучи не зависят от того, отсчитывается количество песчинок  $z$  от произвольного уровня или

от строго фиксированного. Уравнение для плотности неустойчивых ячеек должно быть инвариантно относительно одновременного увеличения порога  $z_c$  и всех  $z$  на одну и ту же величину в первом случае и неинвариантно — во втором, что несовместно. А вот для плотности возбуждения, понимаемого в указанном выше смысле, эти постановки эквивалентны и предполагают инвариантную запись, не содержащую членов, нелинейных по  $\rho$ .

Отмеченное единство свойств абелевой (передача фиксированного числа песчинок) и неабелевой (раздача всех имеющихся песчинок) версий правил иллюстрирует важный принцип, лежащий в основе построения промежуточных моделей: все, что в них можно не учитывать, учитывать не следует. В частности, если на классе универсальности модели никак не сказывается разрушение ее абелевости, значит, нет оснований при построении решений опираться на теоретический аппарат абелевых моделей. Они обладают нетривиальным свойством эквивалентности возвратных конфигураций и остовных деревьев решетки, что позволило получить ряд важных теоретических результатов для модели БТВ [16–21]. И нарушить абелевость этой модели без качественного изменения ее свойств, по всей видимости, нельзя. В то же время модель Манны допускает варьирование правил в широких пределах, что требует максимальной общности подхода как при записи уравнений, так и при их исследовании.

Исследовать ланжевеновские уравнения, описывающие масштабно-инвариантные системы, проще всего с помощью так называемой наивной перенормировки, связанной с огрублением всех масштабов [22]. При согласованном увеличении всех переменных значимые члены уравнения должны изменяться пропорциональным образом, а незначимые — стремиться к нулю (что позволяет при записи уравнений сразу отрешиться от любых деталей устройства системы на микроуровне, исчезающих на макроуровне).

Традиционно перенормировочные выражения привязывают к пространственной координате, однако в рассматриваемой задаче формулы оказываются значительно компактнее, если взять за основу время. При огрублении его масштаба  $t \rightarrow bt$  остальные переменные преобразуются по формулам

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &\rightarrow b^{\kappa_\xi} \mathbf{x}, \\ \rho &\rightarrow b^{\kappa_\rho} \rho, \\ \eta &\rightarrow b^{-(\kappa_\xi d + \kappa_\rho)/2} \eta, \end{aligned}$$

где временные размерности определяются формулой (11), а масштабирование шума рассчитано на основе его корреляции (14).

Для размерности, с которой перенормируется пространственная координата  $\mathbf{x}$ , в качестве индекса здесь указана буква  $\xi$ , а не буква  $r$ . Дело в том, что развитие лавины описывается несколькими пространственными масштабами, из которых динамику плотности возбуждения характеризует именно его корреляционная длина  $\xi$ , много меньшая линейной протяженности области лавины  $r$ .

В результате выполненной перенормировки уравнение (13) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} b^{\kappa_\rho - 1} \dot{\rho}(\mathbf{x}, t) &= \\ &= b^{\kappa_\rho - 2\kappa_\xi} \Delta \rho(\mathbf{x}, t) + b^{-(\kappa_\xi d + \kappa_\rho)/2} \eta(\mathbf{x}, \rho). \end{aligned}$$

Его эквивалентность исходной записи (13) требует выполнения равенств

$$\kappa_\rho - 1 = \kappa_\rho - 2\kappa_\xi = -(\kappa_\xi d + \kappa_\rho)/2,$$

из которых находятся показатели  $\kappa_\xi = 1/2$  и

$$\kappa_\rho = (4 - d)/6, \tag{15}$$

описывающие динамику введенных переменных, связанных между собой формулой

$$\rho \propto \xi^{(4-d)/3}. \tag{16}$$

Эта формула вновь указывает на верхнюю критическую размерность  $d_{uc} = 4$ , при достижении которой плотность возбуждения не возрастает с увеличением корреляционной длины.

### 3.2. Активность и ширина границы

Эволюция средней активности (числа опрокидываний за шаг параллельного времени) как макрохарактеристики описывается обыкновенным стохастическим дифференциальным уравнением

$$\dot{a}(t) = \chi(\rho) \tag{17}$$

с дельта-коррелированным шумом:

$$\langle \chi(\rho) \cdot \chi(\rho') \rangle \propto \delta(\rho - \rho'). \tag{18}$$

Такой вид шума означает, что изменение количества одновременно существующих неустойчивых ячеек определяется исключительно амплитудой плотности возбуждения, которая учитывает локальные флуктуации заполнения ячеек.

Запись (17), (18) лучше всего подходит на роль определения плотности возбуждения, поскольку кроме нее включает только наблюдаемые величины. Однако даже такое определение остается неполным, так как описывает лишь амплитуду плотности, но не ее профиль.

При огрублении масштабов здесь переменные преобразуются по формулам

$$\begin{aligned} t &\rightarrow bt, \\ a &\rightarrow b^{\kappa_a} a, \\ \chi &\rightarrow b^{-\kappa_\rho/2} \chi, \end{aligned}$$

где масштабирование шума рассчитано на основе его корреляции (18). Нечувствительность уравнения (17) к такой перенормировке требует выполнения равенства

$$\kappa_a - 1 = -\kappa_\rho/2,$$

из которого с помощью соотношения (15) получаем первое из скейлинговых соотношений, необходимых для решения модели:

$$\kappa_a = (8 + d) / 12. \quad (19)$$

Развитие лавины связано с ростом ее области — продвижением вовне границы, трактуемым здесь как рост поверхности над некоторой  $(d - 1)$ -мерной подложкой, соответствующей положению границы, сглаженному усреднением. Разложим относительно подложки  $d$ -мерную пространственную координату  $\mathbf{x}$  на  $(d-1)$ -мерную тангенциальную и 1-мерную нормальную составляющие  $\mathbf{x}_\parallel$  и  $\mathbf{x}_\perp$ . Динамика модуля последней описывается стохастическим уравнением

$$\dot{x}_\perp(\mathbf{x}_\parallel, t) = \rho \Delta_\parallel x_\perp(\mathbf{x}_\parallel, t) + \rho^{-1} \zeta(t). \quad (20)$$

В нем амплитуда плотности возбуждения играет роль коэффициента диффузии, т.е. выступает как фактор, способствующий разглаживанию границы, и одновременно задает относительный уровень свободного шума, стремящегося нарушить ее гладкость. Шум, как и в уравнениях (13) и (17), здесь предполагается дельта-коррелированным:

$$\langle \zeta(t) \cdot \zeta(t') \rangle \propto \delta(t - t'). \quad (21)$$

Его зависимость именно и только от времени связана с тем, что в силу фрактальности границы множество ее точек находится над одной и той же точкой подложки, из-за чего действие случайных факторов лишается пространственной привязки. При этом хотя события происходят практически на каждом временном шаге, лишь случающиеся во внешних точках

границы обеспечивают рост ее ширины, что учитывается коэффициентом при шумовом члене. Он возникает как отношение минимально возможного возбуждения, обусловленного дискретностью процессов, происходящих на границе, к амплитуде плотности возбуждения, характеризующей процессы, происходящие в глубине области лавины. За время, уходящее на то, чтобы эти процессы сказались на событиях у границы, профиль плотности возбуждения успевает смазаться. Поэтому в уравнение (20) она входит уже без аргументов — только своей амплитудой.

С физической точки зрения, принципиально важным отличием уравнения (20) от уравнений (13) и (17) является учет им тех симметрий, которые, присутствуя на микроуровне, на мезоуровне уже подвержены локальным нарушениям. Хотя передача песчинок при опрокидывании неустойчивых ячеек происходит направленным образом, у границы области лавины есть выделенное направление движения — из ее глубины наружу.

Тангенциальная составляющая  $\mathbf{x}_\parallel$  координаты отвечает за протяженность области лавины  $r$ , а разброс смещений вдоль нормальной составляющей  $\mathbf{x}_\perp$  — за ширину границы  $w$ . Поэтому при огрублении масштабов переменные преобразуются по формулам

$$\begin{aligned} t &\rightarrow bt, \\ \rho &\rightarrow b^{\kappa_\rho} \rho, \\ x_\perp &\rightarrow b^{\kappa_w} x_\perp, \\ \mathbf{x}_\parallel &\rightarrow b^{\kappa_r} \mathbf{x}_\parallel, \\ \zeta &\rightarrow b^{-1/2} \zeta, \end{aligned}$$

где масштабирование шума рассчитано на основе его корреляции (21). Чтобы вид уравнения (20) не менялся при такой перенормировке, необходимо выполнение равенств

$$\kappa_w - 1 = \kappa_\rho + \kappa_w - 2\kappa_r = -\kappa_\rho - 1/2,$$

из которых получаются два недостающих скейлинговых соотношения:

$$\kappa_w = (d - 1) / 6, \quad (22)$$

$$\kappa_r = (10 - d) / 12. \quad (23)$$

Дальнейшие выкладки элементарны, но громоздки, поэтому ограничимся их результатом:

$$\begin{array}{l}
 X \quad \kappa_x \quad \nu_x \quad \alpha_x \\
 T \quad 1 \quad \frac{12}{10-d} \quad \frac{d}{4} \\
 N \quad \frac{d+20}{12} \quad \frac{d+20}{10-d} \quad \frac{3d}{d+20} \\
 S \quad \frac{(10-d)d}{12} \quad d \quad \frac{3}{10-d} \\
 C \quad \frac{12-d}{12(d-1)} \quad \frac{(12-d)(d-1)}{10-d} \quad \frac{3d}{(12-d)(d-1)}
 \end{array} \quad (24)$$

и 
$$\varepsilon = 3d / (10 - d). \quad (25)$$

Из упомянутых дополнительных характеристик лавины не рассмотренной осталась только средняя кратность опрокидывания, для которой находим

$$\kappa_m = (4 - d)(5 - d) / 12.$$

Отсюда следует, что уже в четырехмерном случае повторные опрокидывания ячеек оказываются исключительными событиями. Иначе говоря, при  $d \geq d_{uc}$  геометрия решетки несущественна, поскольку реализованная на ней модель практически не отличается от модели со случайным соседством.

Наличие в соотношении (22) и в показателях для  $C$  члена  $d - 1$  демонстрирует, что у модели кроме верхней критической размерности  $d_{uc}$  имеется и нижняя  $d_{lc} = 1$ . При  $d = 1$  решение (24), очевидно, становится нереалистичным, поскольку вытекающая из него формула  $N \propto TC$  предполагает постоянную активность некоторой доли ячеек в области лавины. При этом вынос избытка песчинок на ее границу, состоящую всего из пары ячеек, не может остановить развитие лавины. Поэтому оно прекращается лишь за счет удачного перераспределения песчинок в ее области. А это требует значительного времени и сравнительно низкой активности, в силу чего получаемый в численном эксперименте показатель  $\nu_t = 10/7$  оказывается больше значения  $4/3$ , предсказываемого решением (24), а показатель  $\nu_n = 9/4$  — меньше аналогичного значения  $7/3$ . Будучи вырожденным, одномерный случай требует построения иной промежуточной модели, что выходит за рамки данной работы. Поэтому и скейлинговые показатели для него приведены здесь лишь справочным порядком, без подтверждающих графиков.

#### 4. РЕШЕНИЕ С ПОМОЩЬЮ АНАЛИЗА СЛУЧАЙНЫХ БЛУЖДАНИЙ

В этом разделе используются понятия и обозначения из предыдущего раздела, однако все связывающие их формулы выводятся независимо. И именно

этот вывод следует считать физически обоснованным.

За  $t$  шагов развития лавины песчинки, совершающие случайные блуждания по решетке, смещаются на характерное расстояние

$$\xi \propto \sqrt{t}, \quad (26)$$

которым определяется объем  $\omega \propto \xi^d$ , в котором возбуждение остается скоррелированным.

Как случайное блуждание можно трактовать и изменение линейной протяженности области лавины  $r$ . При рассмотрении в параллельном времени  $t$  частота скачков задается плотностью возбуждения  $\rho$ , т. е.

$$r^2 \propto \rho t. \quad (27)$$

Если же рассматривать процесс в последовательном времени  $n$ , то частота скачков будет определяться локальным избытком песка. Поскольку за время лавины песчинки успевают свободно перемещаться в объеме корреляции  $\omega$ , внутри него имеет значение не их изначальное расположение, а только суммарное количество. Его флуктуации пропорциональны  $\omega^{1/2}$ , т. е. избыток песка, приходящий на одну ячейку, составляет порядка  $\omega^{-1/2} \propto \xi^{-d/2}$ . Таким образом,

$$r^2 \propto \xi^{-d/2} n. \quad (28)$$

Подставив сюда корреляционную длину (26), получаем выражение

$$t^{d/4} \propto n/r^2 \propto r^{\nu_n - 2}.$$

Элементарное преобразование показателя его правой части

$$\nu_n - 2 = \varepsilon = \alpha_r$$

позволяет найти показатель распределения лавин по длительности

$$\alpha_t = d/4. \quad (29)$$

Столь простое выражение, разумеется, может быть получено и без промежуточных выкладок. Лавина доживает до шага  $t$  с вероятностью  $\propto t^{-\alpha_t}$ . Выживание лавины определяется тем, что локальный избыток песка превышает некоторый фиксированный порог, вероятность чего  $\propto \omega^{-1/2}$ . Приравняв эти две вероятности, с помощью формулы (26) и получаем значение (29). Следует отметить, что из него, как и из формулы (16), можно определить верхнюю критическую размерность, если помнить, что продолжительность критического ветвящегося процесса, к которому сводится развитие лавины при случайном соседстве, характеризуется значением  $\alpha_t = 1$  [23].

Сопоставление формул (27) и (28) приводит к выражению



$$a/\rho \propto \omega^{1/2}, \tag{30}$$

означающему, что отношение активности (экстенсивной характеристики) к амплитуде плотности возбуждения (интенсивной характеристике) обусловливается флуктуациями количества песчинок в объеме корреляции, т.е. условиями не на макро-, а на мезомасштабе. Иными словами, условия в области лавины существенно неоднородны.

Ширина границы области лавины  $w$  задает пространственный масштаб корреляции там, где плотность возбуждения приближается к своему минимально возможному значению, обусловленному дискретностью происходящих процессов. А амплитуда плотности возбуждения определяет пространственный масштаб корреляции  $\xi$  в области лавины в целом, т.е.  $\xi \propto w\rho$ , откуда посредством формул (26) и (27) получаем еще одно соотношение пространственных масштабов:

$$r \propto w\rho^{3/2}. \tag{31}$$

В результате выноса песка на границу области лавины каждая ячейка внутри нее теряет в среднем  $c/s \propto w/r$  песчинок. Это означает, что их избыток  $\sqrt{w}$ , имеющийся в объеме корреляции, локализован в  $\sqrt{w} \cdot r/w$  ячейках. События захвата и потери таких ячеек объемом корреляции являются шагами процесса, обуславливающего изменение корреляционной длины. Рассмотрение его в качестве случайного блуждания дает выражение

$$\xi^2 \propto \xi^{d/2} r/w,$$

которое с помощью формулы (31) позволяет воспроизвести зависимость (16) для амплитуды плотности возбуждения. А из нее с помощью выражений (26) и (27) получается и соотношение (23). Его в сочетании с определением (11), соотношением (29) и формулой (31) достаточно для получения полного решения модели (24), (25).

### 5. РЕЗУЛЬТАТЫ КОМПЬЮТЕРНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Из-за того, что плотности распределений имеют степенной вид лишь в промежуточной асимптотике, результаты численного эксперимента оказываются тем надежнее, чем больше размер решетки  $L$ . Здесь используются его значения, даваемые степенью двойки, что способствует оптимизации кода. Максимальные доступные для моделирования значения  $L = 2^{14}; 2^{11}; 2^8$  для  $d = 2; 3; 4$ . В двумерном случае основным фактором, ограничивающим  $L$ , оказывается быстродействие (на решетке максимального размера средняя лавина обсчитывается

несколько секунд, а крупные лавины требуют уже нескольких часов машинного времени), в четырехмерном — доступная память, а в трехмерном — и то, и другое одновременно. Решетку можно считать большой, если отношение ее объема к площади открытого края  $L/2d \gg 1$ . При указанных максимальных  $L$  переход от двумерного случая к трехмерному сопряжен с уменьшением этой величины в 12 раз, а к четырехмерному — в 128 раз, пропорционально чему ухудшаются и ожидания точности экспериментальных результатов.

Общий вид скейлинговых функций  $g_X$  неизвестен, поэтому при обработке результатов моделирования следует исключить его влияние, используя автомодельность формул (2) и (3). Для этого служит процедура скейлинга, т.е. рассмотрение зависимостей  $X^{1+\alpha_x} \cdot u_X(X)$  от  $X/L^{\nu_x}$ , полученных при различных значениях  $L$ . Правые части графиков плотности, перемасштабированных таким образом, должны совмещаться, а средние — выполаживаться, чем подтверждается правильность найденных характеристических и скейлинговых показателей.

Описанная схема кажется очень простой. Однако оказывается, что для каждой анализируемой размерности она сталкивается со специфическими трудностями, требующими отдельного рассмотрения.

Для удобства изложения предсказанные теорией значения скейлинговых и характеристических показателей для основных характеристик лавины сведены в таблицу. В ее последних столбцах, кроме того, даны показатели логарифмических поправок, возникающих в случае верхней критической размерности. Они будут определены далее.

	$d = 2$		$d = 3$		$d \geq 4$		$d = 4$	
$X$	$\nu$	$\alpha$	$\nu$	$\alpha$	$\nu$	$\alpha$	$\tilde{\nu}$	$\tilde{\alpha}$
$T$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{12}{7}$	$\frac{3}{4}$	2	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
$N$	$\frac{11}{4}$	$\frac{3}{11}$	$\frac{23}{7}$	$\frac{9}{23}$	4	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$
$R$	1	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{9}{7}$	1	2	0	1
$S$	2	$\frac{3}{8}$	3	$\frac{3}{7}$	4	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$
$C$	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{18}{7}$	$\frac{1}{2}$	4	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{4}$
	$\epsilon = \frac{3}{4}$		$\epsilon = \frac{9}{7}$		$\epsilon = 2$		$\tilde{\epsilon} = 1$	

Предваряя результаты компьютерного эксперимента, полученные автором и призванные подтвердить правильность выполненных расчетов, уместно кратко обобщить то, что уже известно к настоящему моменту.

Теоретических результатов здесь немного. Если не принимать во внимание тривиальные показатели  $\nu_r$  и  $\nu_s$  и среднеполевые значения в четырехмерном случае, остается упомянуть лишь полное решение модели в двумерном случае, полученное автором на иной методологической основе [3, 4], не обобщаемой на пространства высокой размерности. Все остальные показатели рассчитаны впервые.

В плане результатов моделирования картина существенно богаче — их обширный обзор содержится в работе [2]. Для  $d = 2$  все приведенные показатели очень близки к их экспериментальным оценкам, полученным другими авторами, за исключением величины  $\nu_t$  [1, 13, 14, 24–31] (причем в работе [25] — единственной из всех — дается даже показатель для периметра  $\nu_c$ ). Для  $d = 3$  имеющиеся в литературе оценки скейлинговых показателей (включая тривиальные), как правило, оказываются несколько больше теоретических значений при удовлетворительном совпадении характеристических показателей [25–27, 32]. Наконец, для  $d = 4$  кроме экспериментального подтверждения среднеполевых значений [14], известны и оценки поправочных показателей  $\tilde{\alpha}$  для модели БТВ [16], ожидаемо совпадающие с их теоретическими значениями для модели Манны. Поправочные показатели  $\tilde{\nu}$  ранее численно не определялись.

### 5.1. Двумерный случай

На рис. 2 представлены распределения основных характеристик лавины для  $d = 2$ , построенные по результатам обработки  $8.1 \cdot 10^8$  лавин, в ходе которых произошло  $2.9 \cdot 10^{15}$  опрокидываний. При домножении ординаты на  $X^{1+\alpha}$  и делении абсциссы на  $L^\nu$  графики, полученные для систем различного размера  $L$ , совмещаются при  $1 \ll X$  и выполаживаются при  $1 \ll X \ll X_1$ .

На вставках на рис. 2 показаны немасштабированные плотности вероятности. В двойном логарифмическом масштабе их степенной вид в области промежуточной асимптотики представляется линейным участком графика.

Как можно видеть, скейлинг с теоретическими показателями оказывается практически идеальным для размера, объема и периметра лавин, но графики заметно расходятся в правой части для длительнос-

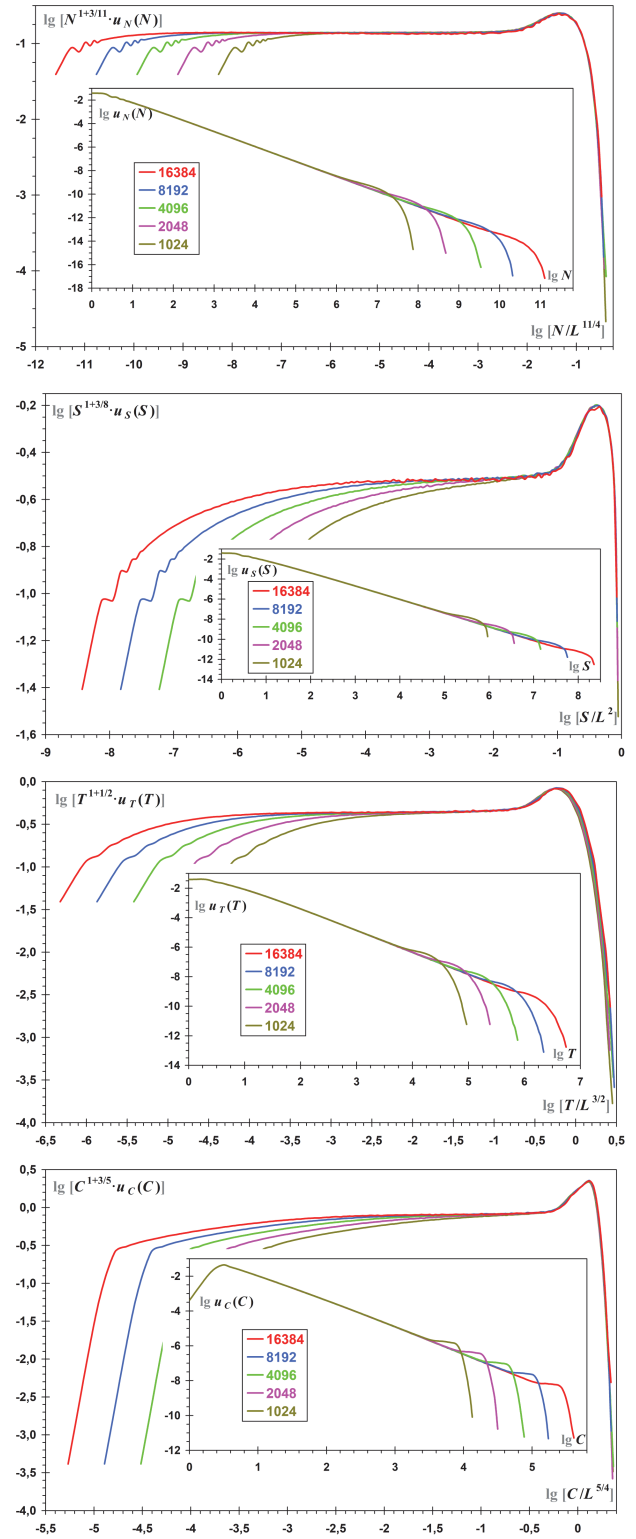


Рис. 2. Плотность распределения лавин по размеру, объему, длительности и периметру для  $d = 2$  для решеток различного размера  $L$

ти. Попытки добиться их совмещения привели бы к значениям  $\nu_t > 3/2$ , хорошо известным из литературы [1, 24–28], но противоречащим построенному решению.

Причина обнаруженного расхождения кроется в том, что теоретическая и экспериментальная длительности лавины — немного разные характеристики. Дело в том, что по мере развития лавины, ее теоретические характеристики, связанные между собой формулами (6) и (7), должны расти одновременно, тогда как для реальных характеристик такая связь может и нарушаться.

В силу стохастичности правил, лавина, захватившая некоторую область, в принципе может продолжаться внутри нее сколь угодно долго. При этом длительность увеличивается при неизменных объеме и периметре. И даже прирост размера лавины оказывается незначительным, поскольку ее область, уже обедненная песком, не может поддерживать высокую активность.

Описанный процесс догорания лавины уместно рассматривать как блуждание по ее области отдельных точек активности, уже не взаимодействующих друг с другом. Характерная длительность их существования в наиболее удачных условиях пропорциональна времени развития лавины  $T$ , поскольку при более долгом сохранении активности она бы наверняка вышла за границы лавины, продолжив ее развитие. Если предположить, что число точек активности, оказавшихся в удачных условиях, дается какой-то степенью  $T$ , то активность полностью угаснет за порядка  $T \ln T$  шагов, так как максимум по выборке возрастает как логарифм ее объема. При этом для характерной длительности крупных лавин формула (3) заменится выражением вида

$$T_1 \propto L^{\nu_t} (1 + \theta \ln L),$$

где коэффициент  $\theta \ll 1$ , поскольку длительное догорание лавины обуславливается редким стечением обстоятельств. При доступных для моделирования значениях  $L$  эта зависимость практически неотличима от зависимости  $T_1 \propto L^{\nu_t + \theta}$ , что и приводит к небольшому завышению показателя  $\nu_t$ , получаемого по результатам моделирования.

К сожалению, способ аналитического расчета коэффициента  $\theta$  неизвестен. Поэтому предложенное объяснение расхождения между теорией и экспериментом пока следует считать гипотезой, требующей дополнительной проверки.

### 5.2. Трехмерный случай

На рис. 3 представлены распределения основных характеристик лавины для  $d = 3$ , построенные по результатам обработки  $2.6 \cdot 10^{10}$  лавин, в ходе которых произошли  $9.4 \cdot 10^{14}$  опрокидываний. Если бы перемасштабирование на этом рисунке выполнялось так же, как для  $d = 2$ , то для всех рассматриваемых характеристик совмещение графиков по оси абсцисс оказалось бы столь же посредственным, как и для длительности на рис. 2. Улучшить скейлинг возможно двумя способами.

Можно было завязать универсальный показатель  $\varepsilon$ , а с ним — и все скейлинговые показатели  $\nu_x$  по сравнению со значениями, предсказанными решением модели. При этом удастся добиться вполне удовлетворительного скейлинга. Более того, подобная попытка анализа, хотя и выполненная с помощью другого инструментария, уже была предпринята в работе [25]. На этом пути есть только одна проблема: неизбежно получается абсурдное значение  $\nu_s > 3$ , означающее превышение объемом лавины объема решетки при достаточно большом линейном размере последней. Вероятно, по этим причинам в других работах [26, 27, 32], где были получены завышенные показатели для трехмерного случая, распределение лавин по объему не рассматривалось.

Разумным представляется иной подход, связанный с масштабированием абсциссы по формуле (3) на степень не реального размера решетки  $L$ , а эффективного размера

$$\Lambda = L (1 - h/L^\phi).$$

Здесь показатель  $\phi = 1/7$  (он рассчитывается далее), а значение коэффициента  $h \approx 0.3$  просто подбирается из соображений наилучшего совмещения графиков. Эффективный размер, разумеется, меньше реального. Но поскольку он меньше на величину, которая убывает с ростом  $L$ , то при проведении расчетов с точностью до коэффициента эффективный размер кажется превосходящим реальный, что и приводит к завышению показателей при обработке результатов эксперимента без оглядки на предсказания теории.

Следует отметить, что, несмотря на использование эффективного размера решетки для масштабирования, графики распределений лавин по размеру и длительности совмещаются на рис. 3 неидеально. Для  $N$  это связано с тем, что средний размер лавины остается пропорционален квадрату реального размера решетки, что влечет отклонения плотности

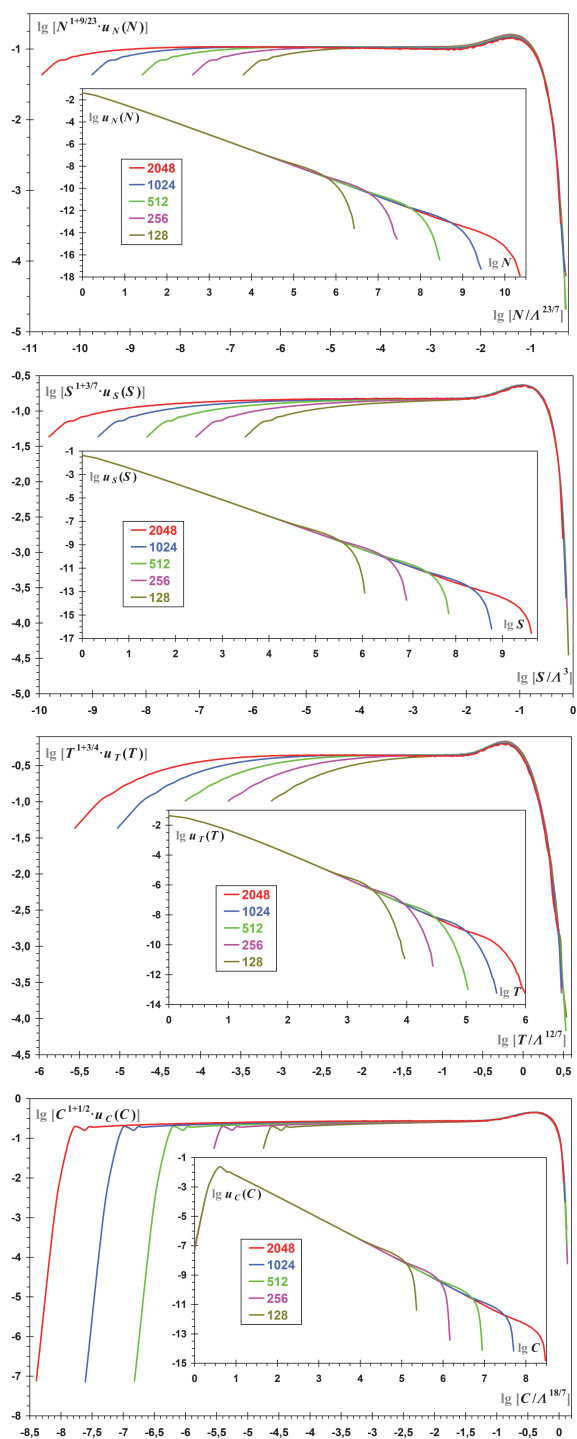


Рис. 3. Плотность распределения лавин по размеру, объему, длительности и периметру для  $d = 3$  для решеток разного размера  $L$ . В отличие от рис. 2 здесь абсцисса масштабируется на степень не реального, а эффективного размера решетки

от вида (2) при  $N \sim N_1$ . А для  $T$  сохраняется эффект догорания лавины, делающий ее длительность несоразмерной остальным характеристикам, хотя он и оказывается много слабее из-за меньшей кратности опрокидывания.

Понять причины, потребовавшие введения эффективного размера решетки, помогает рассмотрение средней кратности опрокидывания. Для  $d = 2$  выполнено  $s^2 \propto nc$  или, что то же самое,  $r \propto tw$ . Это позволяет схематично рассматривать область лавины как набор вложенных слоев убывающей (из глубины к периферии) кратности опрокидывания, так что линейная протяженность лавины дается просто суммой ширины границ эти слоев [3, 4]. В тривиальном виде эта же ситуация воспроизводится и для  $d = 4$  в силу пренебрежимо малой доли повторных опрокидываний ячеек и расположения практически всех ячеек области лавины у ее границы. Но для  $d = 3$  выполнено  $s^2 \propto ncr^\phi$  с указанным выше показателем  $\phi$ . Поэтому если попытаться разложить область лавины на слои разной кратности опрокидывания, то окажется, что сумма ширины их границ  $tw$  меньше линейной протяженности  $r$ .

Область двумерной лавины увеличивается только за счет продвижения ее границы вовне, тогда как граница трехмерной лавины, образуя боковые выпячивания, оказывается столь изрезанной, что представление о глобальном направлении ее движения теряет смысл. В результате область лавины может иметь пустоты, не захватываемые даже при повторных опрокидываниях. Недоступность для лавины некоторых ячеек решетки и означает уменьшение ее эффективного размера по сравнению с реальным.

### 5.3. Четырехмерный случай

На рис. 4 представлены распределения основных характеристик лавины для  $d = 4$ , построенные по результатам обработки  $5.2 \cdot 10^{10}$  лавин, в ходе которых произошли  $3.6 \cdot 10^{13}$  опрокидываний. Здесь малость размеров решетки, доступных для моделирования, становится наглядной. Можно видеть, как совмещение графиков улучшается при переходе от малых решеток к большим. Однако ключевой особенностью верхней критической размерности является появление мультипликативных логарифмических поправок к степенным зависимостям. Без их введения не удастся добиться какого бы то ни было совмещения перемасштабированных графиков.

Формулы (2) и (3) сменяются более сложными выражениями [14–16]

$$u_X(X) = X^{-(1+\alpha_x)} \ln^{\tilde{\alpha}_x} X \cdot g_X(X/X_1),$$

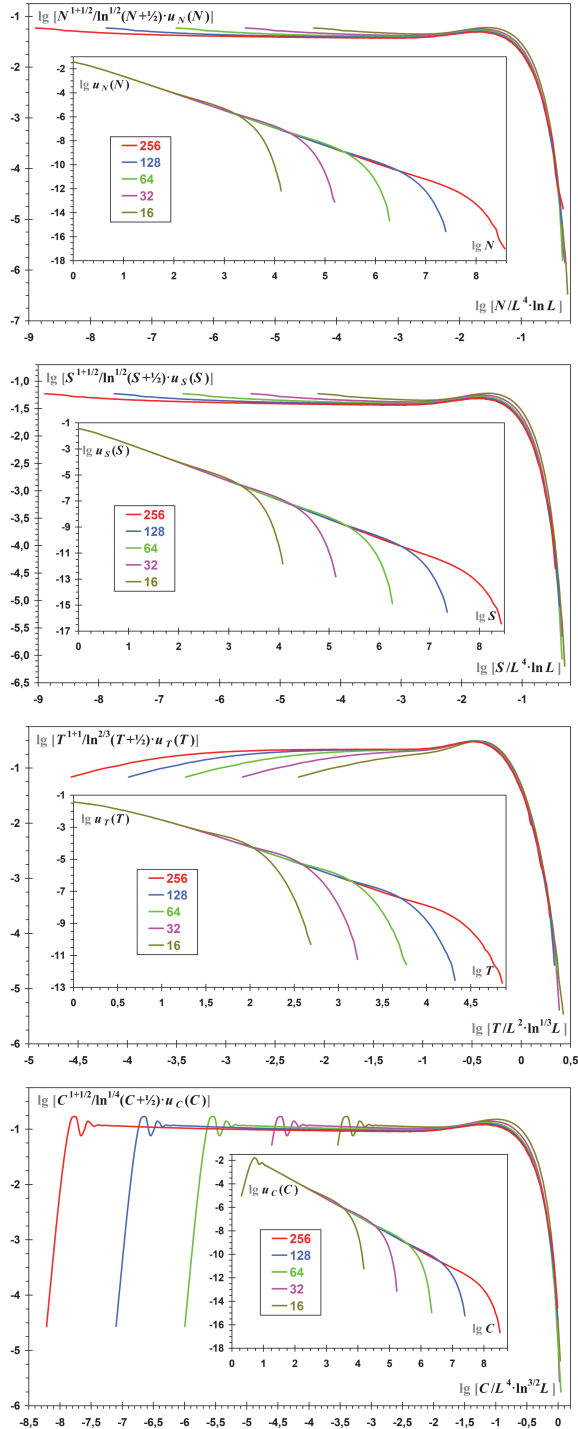


Рис. 4. Плотность распределения лавин по размеру, объему, длительности и периметру для  $d = 4$  для решеток разного размера  $L$ . Чтобы при перемасштабировании ординат избежать деления на ноль, для всех характеристик введена искусственная добавка. Ее величина не принципиальна, поскольку сказывается только на левых частях графиков

$$X_1 \propto L^{\nu_x} / \ln^{\tilde{\nu}_x} L,$$

требующими нахождения еще двух показателей  $\tilde{\alpha}_x$  и  $\tilde{\nu}_x$  для каждой характеристики события  $X$ . При анализе этих формул следует помнить, что логарифмические поправки в них — это лишь первый порядок приближения, не претендующий на полную самосогласованность. Поэтому далее мы пренебрегаем логарифмами логарифмов, считая логарифмы разных характеристик взаимно пропорциональными величинами.

Рассмотрение по аналогии с выводом формулы (4) доли событий, не помещающихся в решетку, позволяет ввести универсальный поправочный показатель

$$\tilde{\varepsilon} = \alpha_x \tilde{\nu}_x + \tilde{\alpha}_x,$$

значение которого, как и значение универсального показателя  $\varepsilon$ , не зависит от рассматриваемой характеристики.

Формула взаимосвязи разных характеристик события (6) усложняется до записи

$$Y^{\alpha_y} / \ln^{\tilde{\alpha}_y} Y \propto X^{\alpha_x} / \ln^{\tilde{\alpha}_x} X.$$

Формулы (5a) и (5b) заменяются выражениями

$$\langle X \rangle \propto L^{\sigma_x} / \ln^{\tilde{\sigma}_x} L,$$

$$\tilde{\sigma}_x = \tilde{\nu}_x - \tilde{\varepsilon}.$$

Здесь при расчетах используется то, что при  $\alpha < 1$  интеграл для среднего набирает свое основное значение в диапазоне крупных событий.

Зависимость  $\langle N \rangle \propto L^2$ , точная для пространства любой целой размерности, приводит к значению  $\tilde{\sigma}_n = 0$ , т. е.  $\tilde{\varepsilon} = \tilde{\nu}_n$ . Точной остается и формула  $R_1 \propto L$ , дающая показатель  $\tilde{\nu}_r = 0$ , однако рассчитывать на отсутствие логарифмических поправок к формуле  $S_1 \propto L^d$  уже не приходится, т. е. про  $\tilde{\nu}_s$  ничего априори сказать нельзя. Таким образом, анализ правил модели для поправочных показателей дает чуть меньше информации, чем для обычных. Однако, с другой стороны, исключительность повторных опрокидываний позволяет полагать  $N \approx S$ , т. е.  $\tilde{\nu}_n = \tilde{\nu}_s$ .

Для получения нетривиальных поправочных показателей сначала рассмотрим подробнее природу неравенства (10), связанного с перемещением песчинок по решетке. Коль скоро их взаимодействие в многомерном случае сводится к простому отталкиванию, адекватной моделью этого процесса является случайное блуждание без самопересечений. Если

его траектория из  $t$  звеньев размещается в пространственной области характерного размера  $r$ , то установившийся режим роста описывается уравнением

$$dr/dt = \partial U/\partial r,$$

где энергия отталкивания звеньев

$$U \propto \int_1^t t'/r^d dt'$$

находится суммированием их пространственной плотности вдоль траектории [33]. Это описание применимо к блужданию без самопересечений в пространстве любой размерности. Так, при  $d < 4$  получается классическая формула  $r^{d+2} \propto t^3$ , а при  $d > 4$  — тривиальная зависимость  $r^2 \propto t$ . Однако нас интересуют лишь размерности  $d \geq 4$ , в которых данный процесс описывает развитие лавины. В частности, для  $d = 4$  находим нетривиальную связь

$$r^2 \propto t \cdot \ln^{1/3} t,$$

т. е.  $\tilde{\alpha}_r - \tilde{\alpha}_t = 1/3$ , откуда  $\tilde{\nu}_t = 1/3$ .

Теперь рассмотрим подробнее природу неравенства (12), связанного с размножением неустойчивых ячеек. Здесь рассуждения аналогичны приведенным в предыдущем абзаце с той разницей, что моделью служит развивающийся на решетке критический ветвящийся процесс, в котором частицы взаимно отталкиваются, избегая попадания в одни и те же ячейки (по всей видимости, специального названия такой процесс не имеет). Установившийся режим роста числа частиц  $a$  описывается в последовательном времени  $n$  уравнением

$$da/dn = \partial U/\partial a,$$

где энергия отталкивания частиц

$$U \propto \int_1^a a'/r^d da'$$

находится суммированием их пространственной плотности по всем местам их расположения. Для случая  $d = 4$  получаем связь

$$a^2 \propto n/\ln^{1/3} n,$$

которую удобнее переписать в виде

$$t^2 \propto n \cdot \ln^{1/3} n,$$

т. е.  $\tilde{\alpha}_t - \tilde{\alpha}_n = 1/6$ , откуда  $\tilde{\nu}_n = 1$ . Это позволяет определить универсальный поправочный показатель  $\tilde{\varepsilon} = 1$  и на его основе — остальные поправочные показатели для объема, размера, длительности и протяженности лавин:

$$\tilde{\nu}_s = 1,$$

$$\tilde{\alpha}_n = \tilde{\alpha}_s = \frac{1}{2},$$

$$\tilde{\alpha}_t = \frac{2}{3},$$

$$\tilde{\alpha}_r = 1.$$

Ненайденными остаются только показатели для периметра, т. е. чисто геометрической, а не динамической характеристики лавины. Чтобы ввести здесь динамику, рассмотрим отношение числа ячеек в объеме  $v \propto r^4$ , ограниченном линейной протяженностью области лавины  $r$ , к числу ячеек, собственно затронутых лавиной,  $s \propto r^4/\ln r$ . На каждую опрокинутую ячейку в пределах линейной протяженности лавины приходится  $k \propto v/s \propto \ln r$  ячеек, в остальных из которых опрокидываний не случилось из-за неспособности лавины захватить все пространство большой размерности. Динамика коэффициента  $k$  описывается уравнением  $dk \propto dv/v$ , пусть априори и неочевидным, но апостериори понятным. Однако интерес представляет динамика отношения  $s/c$ , т. е. того числа ячеек, с которых одна песчинка выносится на границу области лавины. По мере роста  $k$  это отношение совершает симметричное случайное блуждание, т. е.  $s/c \propto \sqrt{k}$ , откуда и получаются показатели

$$\tilde{\alpha}_c = 1/4 \quad \text{и} \quad \tilde{\nu}_c = 3/2.$$

## 6. ОБСУЖДЕНИЕ И ВЫВОДЫ

Исследователи моделей кучи песка обыкновенно пренебрегают рассмотрением границы области лавины, по-видимому, полагая периметр второстепенной характеристикой. Однако именно его изучение оказывается ключевым моментом в обоих способах решения. При использовании ланжевеновского формализма уравнение для ширины границы оказывается единственным, содержащим нелинейность, без которой явление самоорганизованной критичности невозможно. А при сведении динамики к случайным блужданиям вынос песка из объема области лавины на ее границу выступает процессом, связывающим между собой все пространственные масштабы.

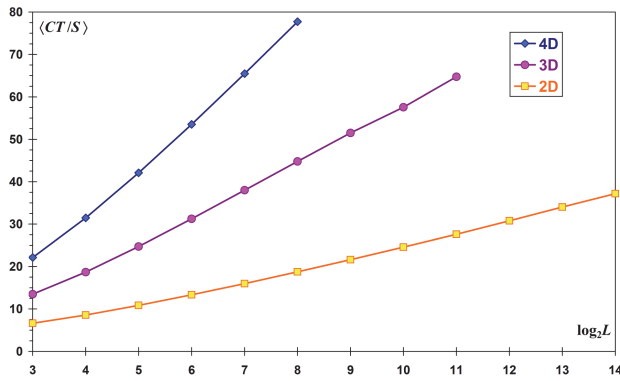


Рис. 5. Среднее время, необходимое границе области лавины для прохождения своей ширины

Чтобы лучше понять роль границы области лавины, рассмотрим время, за которое граница проходит свою ширину  $q \propto wr/r$ . С помощью формул (22) и (23) находим временную размерность  $\kappa_q = d/4 = \alpha_t$ , дающую показатели

$$\alpha_q = 1 \text{ и } \nu_q = \varepsilon, \tag{32}$$

первый из которых суперуниверсален. Из полученных соотношений на основе записи (2) возникает зависимость

$$\langle Q \rangle \propto \log L.$$

С учетом очевидного выражения

$$Q \propto CT/S$$

она легко проверяется по результатам моделирования, как показано на рис. 5.

Представление о величине  $q$  позволяет сделать более понятными некоторые сложные формулы. Так выражение (30) принимает вид  $a \propto qr$ . В самом деле, ситуация во всей области лавины изменяется лишь за то время, за которое ее граница проходит свою ширину. В силу этого величина  $q$  оказывается коэффициентом пересчета возбуждения в активность. Аналогично, и формула (28) упрощается до вида  $r^2 \propto n/q$ , что и интерпретировать можно схожим образом. Рост линейной протяженности области лавины связан с изменениями, происходящими на ее границе, где их темп замедлен в  $q$  раз по сравнению с ее объемом, на который приходится основная масса опрокидываний.

Выведенные здесь формулы апостериори кажутся очевидным. В самом деле, по мере развития лавины время прохождения ее границей своей ширины должно возрастать, но возрастать чрезвычайно медленно, коль скоро периферия области лавины характеризуется минимально возможной плотностью возбуждения. А самым медленным законом

роста характеристики является тот, при котором ее среднее значение зависит от размера системы с нулевым показателем, т.е. логарифмически. Однако использование соотношения (32) при расчете показателей нельзя полагать добросовестным подходом, поскольку вряд ли возможно додуматься до введения характеристики  $Q$ , еще не имея на руках полного решения модели. Во всяком случае, автору не известно примеров прозрения подобного рода.

Вместе с тем, если добавить значение (32) к значениям (8) и (9), получаемым непосредственно из правил модели, то для ее решения останется найти еще только два скейлинговых соотношения. И если выбирать их из соображений простоты итоговой записи, а не математического вывода или физического обоснования, то это, несомненно, будут формулы (29) и (22). Первая из них содержит информацию о верхней критической размерности модели, а вторая — и о нижней (явным образом), и о верхней (неявным — при  $d = d_{uc}$  изменение ширины границы представляет собой случайное блуждание, для которого  $\kappa_w = 1/2$ ). Набор из этих пяти изящных соотношений, дополненный тождеством (4), позволяет восстановить полное решение (24), (25), являющееся намного более громоздким.

Кроме ширины границы  $w$  принципиальной для построения промежуточной модели оказалась корреляционная длина  $\xi$ . И хотя использование этой величины, напротив, типично для описания критических систем, с ней был связан другой нехарактерный прием — перенормировка ланжевеновского уравнения (13) на ее масштабе, а не на масштабе протяженности лавины  $r$ . Структура ее области полностью описывается с помощью этих трех пространственных масштабов, соотношение которых

$$w : \xi : r = 1 : \rho : \rho^{3/2}$$

задается амплитудой плотности возбуждения  $\rho$ . Не будучи определенной явно, она не допускает непосредственного измерения, однако оказывается непосредственно связанной с активностью  $a$  двумя способами — как на макроуровне через уравнение (17), так и на мезоуровне через формулу (30). Введение, описание и успешное использование скрытой переменной  $\rho$  представляется методически важнейшим результатом данной работы.

## ЛИТЕРАТУРА

1. S. S. Manna, J. Phys. A **24**, L363 (1991).

2. G. Pruessner, *Self-Organised Criticality: Theory, Models and Characterisation*, Cambridge University Press, New York (2012).
3. А. В. Подлазов, Изв. вузов: ПНД **21**, 69 (2013).
4. А. В. Подлазов, Изв. вузов: ПНД **24**, 39 (2016).
5. П. Бак, *Как работает природа: Теория самоорганизованной критичности*, URSS, Москва (2015) [P. Bak, *How Nature Works: The Science of Self-Organized Criticality*, Springer-Verlag, Inc., New York (1996)].
6. D. Sornette, A. Johansen, and I. Dornic, J. Phys. I (France) **5**, 325 (1995).
7. S. Clar, B. Drossel, and F. Schwabl, J. Phys.: Cond. Mat. **8**, 6803 (1996).
8. P. Bak, C. Tang, and K. Wiesenfeld, Phys. Rev. Lett. **59**, 381 (1987).
9. P. Bak, C. Tang, and K. Wiesenfeld, Phys. Rev. A **38**, 364 (1988).
10. D. Dhar and R. Ramaswamy, Phys. Rev. Lett. **63**, 1659 (1989).
11. R. Pastor-Satorras and A. Vespignani, J. Phys. A **33**, L33 (2000).
12. M. Kloster, S. Maslov, and C. Tang, Phys. Rev. E **63**, 026111 (2001).
13. E. Milshtein, O. Biham, and S. Solomon, Phys. Rev. E **58**, 303 (1998).
14. S. Lübeck and K. D. Usadel, Phys. Rev. E **56**, 5138 (1997).
15. V. B. Priezzhev, J. Stat. Phys. **98**, 667 (2000).
16. D. V. Ktitarov, S. Lübeck, P. Grassberger, and V. B. Priezzhev, Phys. Rev. E **61**, 81 (2000).
17. D. Dhar, Phys. Rev. Lett. **64**, 1613 (1990).
18. S. N. Majumdar and D. Dhar, Physica A **185**, 129 (1992).
19. D. Dhar and S. S. Manna, Phys. Rev. E **49**, 2684 (1994).
20. V. B. Priezzhev, D. V. Ktitarov, and E. V. Ivashkevich, Phys. Rev. Lett. **76**, 2093 (1996).
21. C.-K. Hu, E. V. Ivashkevich, C.-Y. Lin, and V. B. Priezzhev, Phys. Rev. Lett. **85**, 4048 (2000).
22. H. G. E. Hentschel and F. Family, Phys. Rev. Lett. **66**, 1982 (1991).
23. Т. Харрис, *Теория ветвящихся процессов*, Мир, Москва (1966) [T. E. Harris, *The Theory of Branching Processes*, Springer-Verlag (1963)].
24. R. Dickman, T. Tomé, and M.J. de Oliveira, Phys. Rev. E **66**, 016111 (2002).
25. S. Lübeck, Phys. Rev. E **61**, 204 (2000).
26. M. Alava and M. A. Muñoz, Phys. Rev. E **65**, 026145 (2002).
27. S. Lübeck and P. C. Heger, Phys. Rev. E **68**, 056102 (2003).
28. H. N. Huynh, G. Pruessner, and L. Y. Chew, J. Stat. Mech. P09024 (2011).
29. S. Lübeck and K. D. Usadel, Phys. Rev. E **55**, 4095 (1997).
30. A. Chessa, H. E. Stanley, A. Vespignani, and S. Zapperi, Phys. Rev. E **59**, R12 (1999).
31. A. Chessa, A. Vespignani, and S. Zapperi, Comput. Phys. Commun. **121–122**, 299 (1999).
32. R. Pastor-Satorras and A. Vespignani, Eur. Phys. J. B **19**, 583 (2001).
33. Y.-C. Zhang, Phys. Rev. Lett. **63**, 470 (1989).