ЖЭТФ, 2022, том 162, вып. 1 (7), стр. 45–54

ТЕНЗОР ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА МИНКОВСКОГО В НЕЛИНЕЙНОЙ ОПТИКЕ СРЕД С НЕЛОКАЛЬНОСТЬЮ ОПТИЧЕСКОГО ОТКЛИКА

П. С. Рыжиков*[*], В. А. Макаров

Физический факультет, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова 119991, Москва, Россия

Поступила в редакцию 26 февраля 2022 г.,
после переработки 12 марта 2022 г.
Принята к публикации 14 марта 2022 г.

Из уравнений Максвелла, записанных для напряженностей и индукций электрического и магнитного полей в непоглощающей нелинейной среде произвольной симметрии, проявляющей нелокальность оптического отклика, и соотношений внутренней симметрии тензоров, описывающих локальный и нелокальный отклики такой среды, получены аналитические выражения для плотностей энергии и импульса и плотностей потоков энергии и импульса электромагнитного поля. Найденные выражения образуют единый тензор энергии-импульса, соответствующий тензору энергии-импульса Минковского.

DOI: 10.31857/S0044451022070000
EDN: EDDOWV

1. ВВЕДЕНИЕ

Законы сохранения энергии и импульса играют важную роль в становлении различных разделов физики [1]. В нелинейной оптике, в частности, закон сохранения энергии используется для получения дополнительных соотношений, связывающих компоненты тензоров локальных и нелокальных оптических восприимчивостей в среде без диссипации [2–4], а закон сохранения импульса тесно связан с условием синхронизма волновых векторов взаимодействующих волн [2, 5–8]. Математические формулировки этих законов задают соответственно связь плотности энергии с плотностью потока энергии и плотности импульса с плотностью потока импульса. Формулы для этих величин хорошо известны в линейной электродинамике сред с пространственной и временной дисперсией [9–13], а также в оптике нелинейных сред без дисперсии [14]. Возникший в последнее время интерес к особенностям распространения структурированного света, в котором интенсивность и параметры поляризации падающего излучения сложным образом меняются в плоскости поперечного сечения пучка, ставит задачу нахождения аналитических выражений для плотностей энергии и импульса и плотностей потоков энергии и импульса электромагнитного поля, учитывающих нелокальный характер нелинейного оптического отклика среды. При распространении света в этом случае широко проявляются эффекты зависящего от интенсивности изменения поляризации света в процессе распространения, по-разному протекающие в различных точках поперечного сечения пучка [15]. Нелокальность оптического отклика также позволяет происходить процессам, которые в силу симметрии среды не могут протекать в средах без пространственной дисперсии [16, 17].

Аналитические выражения или численные данные, получаемые в результате решения системы нелинейных дифференциальных уравнений, следующих из строящейся математической модели изучаемого нелинейного оптического явления, иногда проверяются их авторами на соответствие закону сохранения энергии, очень редко на соответствие закону сохранения импульса и практически никогда на соответствие закону сохранения момента импульса. Часто эти решения находятся приближенными методами, возможность и корректность применения которых в некоторых случаях не обсуждается. Поэтому непротиворечивость получаемых результатов упомянутым выше законам сохранения

[*] E-mail: ryzhikov.ps14@physics.msu.ru

является убедительным аргументом в пользу создаваемой теории, важнейшим критерием ее истинности. В связи с этим, несомненно, актуально нахождение в настоящее время отсутствующих аналитических выражений для плотности энергии, плотности потока энергии, плотности импульса и плотности потока импульса электромагнитного поля в нелинейных средах, демонстрирующих нелокальность оптического отклика на внешнее световое поле. Нахождение двух последних формул также необходимо для последующего определения аналитических выражений для плотности углового момента и плотности потока углового момента, преобразование которых при распространении структурированного света интенсивно обсуждается в последнее время [18]. Нахождение компонент тензора энергии-импульса электромагнитного поля в нелокальных нелинейных средах является также небольшим, но важным шагом в построении квантовой теории взаимодействия излучения с веществом.

2. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ И ИМПУЛЬСА В ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

Считая в уравнениях Максвелла индукцию магнитного поля $\mathbf{B}$ равной его напряженности $\mathbf{H}$, а индукцию электрического поля $\mathbf{D}$ связанной с его напряженностью $\mathbf{E}$ материальным уравнением, запишем непосредственно следующие из них равенства [12, 19–22]:

$$\mathbf{E}\partial_t\mathbf{D} + \mathbf{B}\partial_t\mathbf{B} + \operatorname{div}[\mathbf{E}\times\mathbf{B}] = 0, \tag{1}$$

$$\partial_t[\mathbf{D}\times\mathbf{B}] + \mathbf{D}\times\nabla\times\mathbf{E} + \mathbf{B}\times\nabla\times\mathbf{B} = 0. \tag{2}$$

Из соотношений (1), (2) можно получить уравнения

$$\partial_t U + \operatorname{div}\mathbf{S} = 0, \tag{3}$$

$$\partial_t g_i + \partial_j G_{ij} = 0, \tag{4}$$

отражающие законы сохранения соответственно энергии и импульса электромагнитного поля. В уравнениях (3), (4) U — плотность энергии, $\mathbf{S}$ — вектор Пойнтинга, $\mathbf{g}$ — плотность импульса, $\hat{G}$ — тензор плотности потока импульса, или тензор напряжений, индексы «i» и «j» принимают значения x, y и z. Формулы (3), (4) можно записать в виде одного уравнения с помощью тензора энергии-импульса $T_{\alpha\beta}$, где индексы «α» и «β» принимают значения 0, x, y и z [23]. Его компоненты связаны с U, $\mathbf{S}$, $\mathbf{g}$ и $\hat{G}$ равенствами

$$T_{00} = U, \quad T_{i0} = S_i, \quad T_{0j} = g_j, \quad T_{ij} = G_{ij}.$$

В случае линейных сред, проявляющих нелокальность оптического отклика на внешнее световое поле, следующие из соотношений (1), (2) формулы для U, $\mathbf{S}$, $\mathbf{g}$ и $\hat{G}$ хорошо известны [9, 11–13]. Целью настоящей работы является нахождение удовлетворяющих уравнениям (3), (4) аналитических выражений для поправок $U^{(n)}$, $S_i^{(n)}$, $g_j^{(n)}$ и $G_{ij}^{(n)}$ к этим величинам, обусловленных доминирующим проявлением нелинейности n-го порядка. Каждая из них состоит из двух слагаемых,

$$U^{(n)} = U^{(n)loc} + U^{(n)nloc}, \quad S_i^{(n)} = S_i^{(n)loc} + S_i^{(n)nloc},$$

$$g_j^{(n)} = g_j^{(n)loc} + g_j^{(n)nloc}, \quad G_{ij}^{(n)} = G_{ij}^{(n)loc} + G_{ij}^{(n)nloc},$$

обусловленных соответственно локальной $\chi^{(n)}_{ii_1i_2\ldots i_n}$ и нелокальной $\gamma^{(n)}_{ii_1i_2\ldots i_nj}$ нелинейными восприимчивостями n-го порядка. Эти поправки позволят записать дополнительные слагаемые в известные выражения для компонент тензора энергии-импульса в линейной среде без диссипации энергии, связанные с проявлением нелокального нелинейного оптического отклика n-го порядка по полю.

3. ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ В НЕЛИНЕЙНОЙ СРЕДЕ

Электрическое поле $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ в среде, наиболее сильно проявляющей оптическую нелинейность n-го порядка ($n \geq 2$), определяется напряженностями полей распространяющихся в ней волн:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \sum_{m=1}^{n+1}\mathbf{E}^{(m)}(\mathbf{r},t) + \text{c.c.} = \sum_{m=1}^{n+1}\tilde{\mathbf{E}}^{(m)}(\mathbf{r},t,\omega_m)\times \\ \times\exp\left(-i\omega_m t + i\mathbf{k}^{(m)}\cdot\mathbf{r}\right) + \text{c.c.} \tag{5}$$

Здесь $\omega_{n+1} = \omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_n$, $\omega_{1,2,\ldots,n}$ — их частоты, в общем случае не равные друг другу и не являющиеся кратными, $\mathbf{k}^{(1),(2),\ldots,(n+1)}$ — волновые векторы распространяющихся волн. Частотный спектр медленно меняющихся во времени амплитуд $\tilde{\mathbf{E}}^{(m)}(\mathbf{r},t,\omega_m)$ каждой из $n+1$ распространяющихся волн будем считать достаточно узким, обеспечивающим возможность пренебрежения частотной дисперсией среды вблизи ω_m. Действительность напряженности электрического поля приводит к равенству $\mathbf{E}^{(m)} = \mathbf{E}^{(-m)*}$.

Индукция нелинейной среды

$$\mathbf{D} = \hat{\varepsilon}\mathbf{E} + \hat{\gamma}\nabla\mathbf{E} + \mathbf{P}^{loc} + \mathbf{P}^{nloc}, \tag{6}$$

где локальная $\mathbf{P}^{loc}$ и нелокальная $\mathbf{P}^{nloc}$ части нелинейной поляризации среды имеют вид

$$\mathbf{P}^{loc,nloc}(\mathbf{r},t) = \sum_{m=1}^{n+1} \mathbf{P}^{loc,nloc}(\omega_m,\mathbf{r},t) + \text{c.c.} = \\ = \sum_{m=1}^{n+1} \tilde{\mathbf{P}}^{loc,nloc}(\mathbf{r},t,\omega_m) \times \\ \times \exp\left(-i\omega_m t + i\mathbf{k}^{(m)}\cdot\mathbf{r}\right) + \text{c.c.} \quad (7)$$

Здесь $\hat{\varepsilon}$ и $\hat{\gamma}$ — тензоры линейной диэлектрической проницаемости и нелокальной восприимчивости среды. Входящая в выражение (7) локальная часть $\mathbf{P}^{loc}(\omega_m)$ комплексной поляризации среды на частоте ω_m задается уравнениями [2, 7, 8, 24]

$$P_i^{loc}(\omega_m) = \chi^{(n)}_{ii_1i_2\ldots i_n}(\omega_m; -\Omega_m^{(1)}, -\Omega_m^{(2)}, \omega_{n+1}) \times \\ \times E_{i_n}^{(n+1)} \prod_{k=1}^{m-1} E_{i_k}^{(k)*} \prod_{k=m+1}^{n} E_{i_{k-1}}^{(k)*} \quad (8)$$

при $m = 1, 2, \ldots, n$ и

$$P_i^{loc}(\omega_{n+1}) = \chi^{(n)}_{ii_1\ldots i_n}(\omega_{n+1}; \Omega_{n+1}^{(1)}) \prod_{k=1}^{n} E_{i_k}^{(k)} \quad (9)$$

при $m = n+1$. По дважды встречающимся индексам, обозначающим декартовы координаты, здесь и далее проводится суммирование. Нелокальная часть $\mathbf{P}^{nloc}(\omega_m)$ комплексной поляризации среды на частоте ω_m в первом приближении по параметру пространственной дисперсии записывается в виде (см. работы [4, 25] и ссылки в них)

$$P_i^{nloc}(\omega_m) = \Gamma_{ijp}(\omega_m; \omega_{n+1})\partial_p E_j^{(n+1)} + \\ + \sum_{s=1}^{n}(1-\delta_{ms})\Gamma_{ijp}(\omega_m; -\omega_s)\partial_p E_n^{(s)*} \quad (10)$$

при $m = 1, 2, \ldots, n$ и

$$P_i^{nloc}(\omega_{n+1}) = \sum_{m=1}^{n} \Gamma_{ijp}(\omega_{n+1}; \omega_m)\partial_p E_j^{(m)} \quad (11)$$

при $m = n+1$. Здесь введены не зависящие от пространственных производных напряженности электрического поля вспомогательные тензоры

$$\Gamma_{ijk}(\omega_{n+1}, \omega_m) = \\ = \gamma^{(n)}_{ii_1i_2\ldots i_{n-1}jk}(\omega_{n+1}; \Omega_m^{(1)}, \Omega_m^{(2)}, \omega_m) \times \\ \times \prod_{p=1}^{m-1} E_{i_p}^{(p)} \prod_{p=m+1}^{n} E_{i_{p-1}}^{(p)}, \quad (12)$$

$$\Gamma_{ijk}(\omega_m, -\omega_s) = \\ = \gamma^{(n)}_{ii_1\ldots i_{n-1}jk}(\omega_m; \omega_{n+1}, -\Omega_{ms}^{(1)}, -\Omega_{ms}^{(2)}, -\Omega_{ms}^{(3)}, -\omega_s) \times \\ \times E_{i_1}^{(n+1)} \prod_{p=1}^{\min(m,s)-1} E_{i_{p+1}}^{(p)*} \prod_{p=\min(m,s)+1}^{\max(m,s)-1} E_{i_p}^{(p)*} \times \\ \times \prod_{p=\max(m,s)+1}^{n} E_{i_{p-1}}^{(p)*}. \quad (13)$$

Индексы «m» и «s» в этих формулах принимают значения от единицы до n. В выражениях (8), (9), (12) и (13) для сокращения записи введены следующие множества частот:

$$\begin{aligned} &\Omega_m^{(1)} = (\omega_1, \ldots, \omega_{m-1}), \\ &\Omega_m^{(2)} = (\omega_{m+1}, \ldots, \omega_n), \\ &\Omega_{ms}^{(1)} = (\omega_1, \ldots, \omega_{\min(m,s)-1}), \\ &\Omega_{ms}^{(2)} = (\omega_{\min(m,s)+1}, \ldots, \omega_{\max(m,s)-1}), \\ &\Omega_{ms}^{(3)} = (\omega_{\max(m,s)+1}, \ldots, \omega_n). \end{aligned} \quad (14)$$

В них элементы (частоты) строго упорядочены по возрастанию индекса. Если индекс последней частоты меньше индекса первой, то множество является пустым, а соответствующее ему произведение полей в формулах (8), (9), (12) и (13) считается равным единице. Заметим, что $\Gamma_{ijk}(\omega_m, \omega_{n+1}) = -\Gamma^*_{jik}(-\omega_{n+1}, -\omega_m)$. Вектор индукции магнитного поля имеет вид аналогичный (5):

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \sum_{m=1}^{n+1} \mathbf{B}^{(m)}(\mathbf{r},t) + \text{c.c.} = \\ = \sum_{m=1}^{n+1} \tilde{\mathbf{B}}^{(m)}(\mathbf{r},t,\omega_m) \exp(-i\omega_m t + i\mathbf{k}_m\cdot\mathbf{r}). \quad (15)$$

4. КОМПОНЕНТЫ ТЕНЗОРА ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА В НЕЛИНЕЙНОЙ СРЕДЕ С ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ДИСПЕРСИЕЙ

Связывающее $\mathbf{D}$ и $\mathbf{E}$ материальное уравнение в нелинейной среде с пространственной дисперсией имеет достаточно сложный вид. В связи с этим при сведении выражений (1), (2) к виду (3), (4) оказывается удобным избавиться в (1) от слагаемого, содержащего $\partial_t \mathbf{D}$, переписав уравнения (1), (2) для декартовых компонент $\mathbf{E}$, $\mathbf{D}$ и $\mathbf{B}$ в следующем виде:

$$\partial_t(D_iE_i) - D_i\partial_tE_i + \frac{1}{2}\partial_t(B_i^2) + \\ + \partial_i(e_{ijk}E_jB_k) = 0, \quad (16)$$

$$\partial_t(e_{pki}D_kB_i) + D_k\partial_pE_k + \frac{1}{2}\partial_p(B_k^2) - \\ - \partial_k(D_kE_p + B_kB_p) = 0. \quad (17)$$

Здесь e_{pki} — тензор Леви-Чивиты, индексы «i», «j», «p» и «k» принимают значения x, y и z. При получении (4) было учтено, что $\partial_iD_i = 0$ и $\partial_iB_i = 0$.

Подставим $\mathbf{E}$, $\mathbf{D}$ и $\mathbf{P}$ в (3), (4) и проведем усреднение по времени, после которого сразу видно, что $S_p^{(n)loc} = 0$, а

$$g_p^{(n)loc} = e_{pki}\left\langle P_k^{loc}B_i\right\rangle = \\ = e_{pki}\sum_{m=1}^{n+1} P_k^{loc}(\omega_m)B_i^{(m)*} + \text{c.c.} \quad (18)$$

Здесь угловые скобки обозначают усреднение по времени, а $P_k^{loc}(\omega_m)$ задается формулами (8) и (9). Из (3), (4) также следует, что полученные после усреднения по времени добавки $U^{(n)loc}$ и $G_{pk}^{(n)loc}$ удовлетворяют уравнениям

$$\partial_tU^{(n)loc} = \sum_{m=1}^{n+1}\Big\{\partial_t[P_i^{loc}(\omega_m)E_i^{(m)*}] - \\ - P_i^{loc}(\omega_m)\partial_tE_i^{(m)*}\Big\} + \text{c.c.}, \quad (19)$$

$$\partial_kG_{pk}^{(n)loc} = \sum_{m=1}^{n+1}\Big\{P_k^{loc}(\omega_m)\partial_pE_k^{(m)*} - \\ - \partial_k[E_p^{(m)*}P_k^{loc}(\omega_m)]\Big\} + \text{c.c.} \quad (20)$$

Для их нахождения необходимо преобразовать в этих уравнениях слагаемые $P_i^{loc}(\omega_m)\partial_tE_i^{(m)*}$ и $P_k^{loc}(\omega_m)\partial_pE_k^{(m)*}$. Это можно сделать, используя известные свойства внутренней симметрии тензора $\chi_{ii_1i_2\ldots i_n}^{(n)}(\omega_{n+1};\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n)$ в среде без диссипации, позволяющие переставлять местами его индексы вместе с соответствующей перестановкой частот [2].

Подставим формулы (8), (9) в $P_i^{loc}(\omega_m)\partial_tE_i^{(m)*}$ и $P_p^{loc}(\omega_m)\partial_kE_p^{(m)*}$, далее переобозначим в каждом из $n+1$ слагаемых индексы таким образом, чтобы во всех слагаемых одной и той же частоте соответствовал одинаковый индекс. Далее проведем в каждом из них перестановку индексов и частот в тензоре $\hat{\chi}^{(n)}$ так, чтобы во всех слагаемых они присутствовали в одном и том же порядке. При этом получившиеся $n+1$ слагаемых оказываются результатом дифференцирования $E_i^{(n+1)*}P_i^{loc}(\omega_{n+1})$ по времени или координатам. Благодаря симметрии тензора $\hat{\chi}^{(n)}$ при одновременной перестановке индексов и соответствующих им частот, это выражение также оказывается равным $E_i^{(m)*}P_i^{loc}(\omega_m)$ при любой частоте ω_m, что позволяет переписать $E_i^{(n+1)*}P_i^{loc}(\omega_{n+1})$ в виде суммы

$$\sum_{m=1}^{n+1}\frac{E_i^{(m)*}P_i^{loc}(\omega_m)}{n+1}.$$

В итоге имеем

$$\sum_{m=1}^{n+1} P_i^{loc}(\omega_m)\partial_{j,t}E_i^{(m)*} + \text{c.c.} = \\ = \frac{1}{n+1}\partial_{j,t}\sum_{m=1}^{n+1} E_i^{(m)*}P_i^{loc}(\omega_m) + \text{c.c.} \quad (21)$$

Соотношение (21) позволяет легко найти $U^{(n)loc}$ и $G_{ij}^{(n)loc}$ из уравнений (5), (6):

$$U^{(n)loc} = \frac{n}{n+1}\sum_{m=1}^{n+1} P_i^{loc}(\omega_m)E_i^{(m)*} + \text{c.c.}, \quad (22)$$

$$G_{pk}^{(n)loc} = \sum_{m=1}^{n+1}\Bigg(\frac{\delta_{pk}}{n+1}P_i^{loc}(\omega_m)E_i^{(m)*} - \\ - P_k^{loc}(\omega_m)E_p^{(m)*}\Bigg) + \text{c.c.} \quad (23)$$

Усреднение по времени выражений, полученных после подстановки $\mathbf{E}$, $\mathbf{D}$ и $\mathbf{P}$ в уравнения (3) и (4), позволяет записать соотношения, которым должны удовлетворять $U^{(n)nloc}$, $S_p^{(n)nloc}$, $g_p^{(n)nloc}$ и $G_{pk}^{(n)nloc}$:

$$\partial_tU^{(n)nloc} + \partial_pS_p^{(n)nloc} = \\ = \sum_{m=1}^{n+1}\Big\{\partial_t\left[P_i^{nloc}(\omega_m)E_i^{(m)*}\right] - \\ - P_i^{nloc}(\omega_m)\partial_tE_i^{(m)*}\Big\} + \text{c.c.}, \quad (24)$$

$$\partial_tg_p^{(n)nloc} = \partial_t\sum_{m=1}^{n+1} e_{pkn}P_k^{nloc}(\omega_m)B_n^{(m)*} + \text{c.c.}, \quad (25)$$

$$\partial_kG_{pk}^{(n)nloc} = \sum_{m=1}^{n+1}\Big\{P_k^{nloc}(\omega_m)\partial_pE_k^{(m)*} - \\ - \partial_k[E_p^{(m)*}P_k^{nloc}(\omega_m)]\Big\} + \text{c.c.} \quad (26)$$

Из (25) легко получить, что

$$g_p^{(n)nloc} = \sum_{m=1}^{n+1} e_{pki}P_k^{nloc}(\omega_m)B_i^{(m)*} + \text{c.c.} \quad (27)$$

Для нахождения $U^{(n)nloc}$ и $S_i^{(n)nloc}$ преобразуем содержащее $P_i^{nloc}(\omega_m)\partial_tE_i^{(m)*}$ слагаемое в (24), в котором присутствуют как производные по времени, так и производные по пространственным координатам. Оказывается, что его можно представить в виде

$$\sum_{m=1}^{n+1} P_i^{nloc}(\omega_m)\partial_t E_i^{(m)*} = \partial_t F + \partial_k R_k. \qquad (28)$$

При этом скаляр

$$F = \frac{1}{n+1}\sum_{m=1}^{n+1} P_i^{nloc}(\omega_m)E_i^{(m)*} + \text{c.c.} \qquad (29)$$

войдет в выражение для $U^{(n)nloc}$, а проекция R_k вспомогательного вектора $\mathbf{R}$, задаваемая формулой

$$R_k = \frac{1}{n+1}\sum_{m=1}^{n}\Big[\Gamma_{ijk}(\omega_{n+1};\omega_m)E_j^{(m)}\partial_t E_i^{(n+1)*} + \Gamma_{ijk}(-\omega_m;-\omega_{n+1})E_j^{(n+1)*}\partial_t E_i^{(m)} + \sum_{s=1}^{n}(1-\delta_{ms})\Gamma_{ijk}(-\omega_m;\omega_s)E_j^{(s)}\partial_t E_i^{(m)}\Big] + \text{c.c.}, \qquad (30)$$

войдет в формулу для $\mathbf{S}^{(n)nloc}$. В справедливости равенства (28) можно убедиться, непосредственно подставляя (29) и (30) в (28) и далее применяя соотношения внутренней симметрии тензора $\hat{\gamma}^{(n)}$ [4]:

$$\gamma^{(n)}_{ii_1i_2\ldots i_nm}(\omega_{n+1};\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_{l-1},\omega_{l+1},\omega_{l+2},\ldots,\omega_n,\omega_l) + \gamma^{(n)}_{i_ni_1i_2\ldots i_{n-1}im}(-\omega_l;\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_{l-1},\omega_{l+1},\omega_{l+2},\ldots,\omega_n,-\omega_{n+1}) = 0, \qquad (31)$$

$$\gamma^{(n)}_{ii_1i_2\ldots i_l\ldots i_nm}(\omega_{n+1};\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_l,\ldots,\omega_{n-1},\omega_n) + \gamma^{(n)}_{i_li_1i_2\ldots i_{l-1}i_ni_{l+1}\ldots im}(-\omega_l;\omega_1,\omega_2,\ldots\omega_{l-1},\omega_n,\omega_{l+1},\omega_{l+2},\ldots,\omega_{n-1},-\omega_{n+1}) + \gamma^{(n)}_{i_ni_1i_2\ldots i_{l-1}ii_{l+1}\ldots i_lm}(-\omega_n;\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_{l-1},-\omega_{n+1},\omega_{l+1},\omega_{l+2},\ldots,\omega_{n-1},\omega_l) = 0. \qquad (32)$$

В результате получаем следующие выражения для $U^{(n)nloc}$ и $S_i^{(n)nloc}$:

$$U^{(n)nloc} = \frac{n}{n+1}\sum_{m=1}^{n+1} P_i^{nloc}(\omega_m)E_i^{(m)*} + \text{c.c.}, \qquad (33)$$

$$S_k^{(n)nloc} = -\frac{1}{n+1}\left\{\sum_{m=1}^{n}\Big[\partial_t E_i^{(n+1)*}\Gamma_{ijk}(\omega_{n+1};\omega_m)E_j^{(m)} + \partial_t E_i^{(m)}\Gamma_{ijk}(-\omega_m;-\omega_{n+1})E_j^{(n+1)*} + \sum_{s=1}^{n}(1-\delta_{ms}) \times \partial_t E_i^{(m)}\Gamma_{ijk}(-\omega_m;\omega_s)E_j^{(s)}\Big] + \text{c.c.}\right\}, \qquad (34)$$

Для нахождения $G_{pk}^{(n)nloc}$ аналогичным образом преобразуем содержащее $P_k^{nloc}(\omega_m)\partial_p E_k^{(m)*}$ слагаемое в (26). Оказывается его удается представить в виде производной от суммы двух слагаемых:

$$\sum_{m=1}^{n+1} P_k^{nloc}(\omega_m)\partial_p E_k^{(m)*} = \partial_k(\delta_{pk}F + N_{pk}). \qquad (35)$$

В (35) компоненты вспомогательного тензора $\hat{N}$ имеют вид

$$N_{pk} = \frac{1}{n+1}\sum_{m=1}^{n}\Big[\Gamma_{ijk}(\omega_{n+1};\omega_m)E_j^{(m)}\partial_p E_i^{(n+1)*} + \Gamma_{ijk}(-\omega_m;-\omega_{n+1})E_j^{(n+1)*}\partial_p E_i^{(m)} + \sum_{s=1}^{n}(1-\delta_{ms})\Gamma_{ijk}(-\omega_m;\omega_s)E_j^{(s)}\partial_p E_i^{(m)}\Big] + \text{c.c.} \qquad (36)$$

В справедливости (35) также можно убедиться, подставляя (29) и (36) в (35) и далее применяя соотношения внутренней симметрии тензора $\hat{\gamma}^{(n)}$ (уравнения (31), (8)). Скаляр F и тензор N_{pk} войдут в формулу для $G_{pk}^{(n)nloc}$:

$$G_{pk}^{(n)nloc} = \sum_{m=1}^{n+1}\left(\frac{\delta_{pk}}{n+1}P_i^{nloc}(\omega_m)E_i^{(m)*} - P_k^{nloc}(\omega_m)E_p^{(m)*}\right) + \frac{1}{n+1}\left\{\sum_{m=1}^{n}\Big[\partial_p E_i^{(n+1)*}\Gamma_{ijk}(\omega_{n+1};\omega_m)E_j^{(m)} + \partial_p E_i^{(m)}\Gamma_{ijk}(-\omega_m;-\omega_{n+1})E_j^{(n+1)*} + \sum_{s=1}^{n}(1-\delta_{ms}) \times \partial_p E_i^{(m)}\Gamma_{ijk}(-\omega_m;\omega_s)E_j^{(s)}\Big]\right\} + \text{c.c.} \qquad (37)$$

Сравнивая выражения (18) и (22) с (27) и (33), можно заметить, что плотности энергии и импульса, связанные с локальным и нелокальным нелинейными оптическими откликами среды, различаются только формой зависимости от напряженности электрического поля входящих в них компонент вектора поляризации среды. Первая сумма в выражении (37) также отличается от (23) только различием вида формул для входящих в них $\mathbf{P}^{loc}$ и $\mathbf{P}^{nloc}$. Однако остальная часть выражения (37) и формула (34) являются соответственно дополнительными потоками энергии и импульса, появляющимися только в средах с нелокальным характером нелинейного оптического отклика на внешнее световое поле. Подобная ситуация имеет место и в линейных средах. В них учет нелокальности оптического отклика сводится только к замене входящих в плотности энергии и импульса выражений для поляризации среды на более сложные выражения, учитывающие пространственную дисперсию. При этом в формулах для плотностей потоков энергии и импульса в линейных средах дополнительно возникают принципиально новые, связанные с пространственной дисперсией, слагаемые [9, 11].

5. КОМПОНЕНТЫ ТЕНЗОРА ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА В ПРИБЛИЖЕНИИ МЕДЛЕННО МЕНЯЮЩИХСЯ АМПЛИТУД ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ВОЛН

При решении многих задач нелинейной оптики используется метод медленно меняющихся амплитуд, в рамках которого амплитуды взаимодействующих волн $\tilde{\mathbf{E}}^{(m)}(\mathbf{r},t,\omega_m)$ (см. (5)) удовлетворяют неравенствам

$$|\partial_t\tilde{\mathbf{E}}^{(m)}| \ll |\omega_m\tilde{\mathbf{E}}^{(m)}|, \quad |\partial_j\tilde{\mathbf{E}}^{(m)}| \ll |k_j^{(m)}\tilde{\mathbf{E}}^{(m)}|.$$

В этом случае имеющими более высокий порядок малости слагаемыми в формулах (27), (33), (34) и (37) можно пренебречь и переписать их с помощью медленно меняющихся амплитуд $\tilde{\mathbf{E}}^{(m)}$:

$$\begin{aligned} U^{(n)nloc} &= \\ &= \frac{in}{n+1}\sum_{m=1}^{n}\Big[k_k^{(m)}\tilde{\Gamma}_{ijk}(\omega_{n+1};\omega_m)\tilde{E}_i^{(n+1)*}\tilde{E}_j^{(m)} - \\ &- k_k^{(n+1)}\tilde{\Gamma}^*_{ijk}(\omega_m;\omega_{n+1})\tilde{E}_i^{(m)}\tilde{E}_j^{(n+1)*} + \sum_{s=1}^{n}(1-\delta_{ms})\times \\ &\times k_k^{(s)}\tilde{\Gamma}_{ijk}(-\omega_m;\omega_s)\tilde{E}_i^{(m)}\tilde{E}_j^{(s)}\Big] + \text{c.c.}, \end{aligned} \qquad (38)$$

$$\begin{aligned} S_k^{(n)nloc} &= \\ &= -\frac{i}{n+1}\Bigg\{\sum_{m=1}^{n}\Big[\omega_{n+1}\tilde{E}_i^{(n+1)*}\tilde{\Gamma}_{ijk}(\omega_{n+1};\omega_m)\tilde{E}_j^{(m)} - \\ &- \omega_m\tilde{E}_i^{(m)}\tilde{\Gamma}^*_{ijk}(\omega_m;\omega_{n+1})\tilde{E}_j^{(n+1)*} - \omega_m\tilde{E}_i^{(m)}\times \\ &\times \sum_{s=1}^{n}(1-\delta_{ms})\tilde{\Gamma}_{ijk}(-\omega_m;\omega_s)\tilde{E}_j^{(s)}\Big]\Bigg\} + \text{c.c.}, \end{aligned} \qquad (39)$$

$$\begin{aligned} g_p^{(n,nloc)} &= \\ &= i\sum_{m=1}^{n}e_{pik}\Big(k_l^{(m)}\tilde{\Gamma}_{ijl}(\omega_{n+1};\omega_m)\tilde{E}_j^{(m)}\tilde{B}_k^{(n+1)*} - \\ &- k_l^{(n+1)}\tilde{\Gamma}^*_{ijl}(\omega_m;\omega_{n+1})\tilde{E}_j^{(n+1)*}\tilde{B}_k^{(m)} + \sum_{s=1}^{n}(1-\delta_{ms})\times \\ &\times k_l^{(s)}\tilde{\Gamma}_{ijl}(-\omega_m;\omega_s)\tilde{E}_j^{(s)}\tilde{B}_k^{(m)}\Big) + \text{c.c.}, \end{aligned} \qquad (40)$$

$$\begin{aligned} G_{pk}^{(n,nloc)} &= \\ &= i\sum_{m=1}^{n}\Bigg\{\frac{1}{n+1}\delta_{pk}\Big[k_l^{(m)}\tilde{\Gamma}_{ijl}(\omega_{n+1};\omega_m)\tilde{E}_i^{(n+1)*}\tilde{E}_j^{(m)} + \\ &+ \sum_{s=1}^{n}(1-\delta_{ms})k_l^{(s)}\tilde{\Gamma}_{ijl}(-\omega_m;\omega_s)\tilde{E}_i^{(m)}\tilde{E}_j^{(s)} - \\ &- k_l^{(n+1)}\tilde{\Gamma}^*_{ijl}(\omega_m;\omega_{n+1})\tilde{E}_i^{(m)}\tilde{E}_j^{(n+1)*}\Big] - \\ &- \Big[k_l^{(m)}\tilde{\Gamma}_{kjl}(\omega_{n+1};\omega_m)\tilde{E}_p^{(n+1)*}\tilde{E}_j^{(m)} - \\ &- \Big(k_l^{(n+1)}\tilde{\Gamma}^*_{kjl}(\omega_m;\omega_{n+1})\tilde{E}_j^{(n+1)*} - \\ &- \sum_{s=1}^{n}(1-\delta_{ms})k_l^{(s)}\tilde{\Gamma}_{kjl}(-\omega_m;\omega_s)\tilde{E}_j^{(s)}\Big)\tilde{E}_p^{(m)}\Big] - \\ &- \frac{1}{n+1}\sum_{m=1}^{n+1}\Big[k_p^{(n+1)}\tilde{E}_i^{(n+1)*}\tilde{\Gamma}_{ijk}(\omega_{n+1};\omega_m)\tilde{E}_j^{(m)} - \\ &- k_p^{(m)}\tilde{E}_i^{(m)}\tilde{\Gamma}^*_{ijk}(\omega_m;\omega_{n+1})\tilde{E}_j^{(n+1)*} - \sum_{s=1}^{n}(1-\delta_{ms})\times \\ &\times k_p^{(m)}\tilde{E}_i^{(m)}\tilde{\Gamma}_{ijk}(-\omega_m;\omega_s)\tilde{E}_j^{(s)}\Big]\Bigg\} + \text{c.c.} \end{aligned} \qquad (41)$$

В этих формулах $\tilde{\Gamma}_{ijk}(\omega_{n+1};\omega_m)$ и $\tilde{\Gamma}_{ijk}(-\omega_m;\omega_s)$ имеют вид соответственно (12) и (13) с точностью до замены в них E на $\tilde{E}$. При записи выражений (38)–(41) возможная расстройка волновых векторов $\Delta\mathbf{k} = \mathbf{k}(\omega_{n+1}) - \mathbf{k}(\omega_1) - \mathbf{k}(\omega_2) - \ldots - \mathbf{k}(\omega_n)$, часто возникающая в реальном эксперименте, считалась равной нулю. Ее учет ($\Delta\mathbf{k} \neq 0$) не вызывает принципиальных трудностей, но делает формулы (38)–(41) существенно более громоздкими.

6. ОДНО ИЗ СЛЕДСТВИЙ ПОЛУЧЕННЫХ ФОРМУЛ

Помимо энергии и импульса, важной характеристикой распространяющегося в нелинейной среде излучения является его угловой момент (момент импульса), закон изменения которого в общем случае приводит к равенству [26]

$$\partial_t J_i + \partial_j M_{ij} = \tau_i. \qquad (42)$$

Здесь J_i — i-я компонента вектора плотности углового момента, M_{ij} — плотность потока углового момента, τ_i — i-я компонента вектора плотности вращательного момента, обусловленного анизотропией среды. Если последняя обладает симметрией относительно вращения вокруг некоторой оси, то компонента вектора плотности вращающего момента, направленная вдоль этой оси, должна быть равна нулю. Поэтому в изотропной среде $\tau_i \equiv 0$. В электродинамике $J_i = e_{ijk}x_j g_k$ (x_j — координаты радиус-вектора), а $M_{ij} = e_{ikl}x_k G_{lj}$ [27, 28]. После подстановки этих выражений в (42) с учетом равенства (4) i-я компонента вектора плотности вращательного момента оказывается равной $\tau_i = e_{ikl}G_{lk}$ [20], из чего в оптике сред, не обладающих пространственной дисперсией, следует утверждение, что если тензор плотности потока импульса $\hat{G}$ несимметричен, то угловой момент не сохраняется [29].

Тензор плотности потока импульса (37) оказывается несимметричным в изотропной гиротропной среде с пространственной дисперсией квадратичной нелинейности. Но это не означает, например, верность утверждения о несохранении углового момента при генерации суммарной частоты ($n = 2$, $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ в выписанных выше формулах). Чтобы убедиться в этом, подставим в (37) явный вид тензора $\gamma^{(2)}_{ijkl}(\omega_3;\omega_1,\omega_2)$:

$$\gamma^{(2)}_{ijkl}(\omega_3;\omega_1,\omega_2) = \gamma_1(\omega_3,\omega_1,\omega_2)\delta_{ij}\delta_{kl} + \\ + \gamma_2(\omega_3,\omega_1,\omega_2)\delta_{ik}\delta_{jl} + \gamma_3(\omega_3,\omega_1,\omega_2)\delta_{il}\delta_{jk}. \quad (43)$$

Здесь $\gamma_{1,2,3}(\omega_3,\omega_1,\omega_2)$ — функции частот. С помощью полученного выражения величину τ_i можно записать в виде пространственной производной:

$$\tau_i = e_{ikl}G_{lk} = \partial_j Q_{ij},$$

где

$$\begin{aligned} Q_{ij} = {} & \frac{1}{3}e_{ikj} \times \\ & \times \Big\{ [\gamma_3(\omega_3;\omega_1,\omega_2) + \gamma_3(\omega_3;\omega_2,\omega_1)] E^{(3)*}_k E^{(1)}_p E^{(2)}_p + \\ & + [\gamma_3(-\omega_1;\omega_2,-\omega_3) + \gamma_3(-\omega_1;-\omega_3,\omega_2)] E^{(1)}_k E^{(3)*}_p E^{(2)}_p + \\ & + [\gamma_3(-\omega_2;-\omega_3,\omega_1) + \gamma_3(-\omega_2;\omega_1,-\omega_3)] E^{(2)}_k E^{(3)*}_p E^{(1)}_p \Big\} - \\ & - e_{ikl}\Big[\gamma_2(\omega_3;\omega_1,\omega_2) E^{(3)*}_l E^{(1)}_j E^{(2)}_k + \\ & + \gamma_2(\omega_3;\omega_2,\omega_1) E^{(3)*}_l E^{(1)}_k E^{(2)}_j + \\ & + \gamma_3(\omega_3;\omega_1,\omega_2) E^{(3)*}_j E^{(1)}_l E^{(2)}_k + \\ & + \gamma_3(\omega_3;\omega_2,\omega_1) E^{(3)*}_j E^{(1)}_k E^{(2)}_l \Big] + \text{c.c.} \end{aligned} \quad (44)$$

В результате уравнение (42) принимает вид

$$\partial_t J_i + \partial_j (M_{ij} - Q_{ij}) = 0,$$

т. е. угловой момент света в изотропной среде с нелокальностью квадратичного отклика, естественно, сохраняется, но формула для плотности потока углового момента оказывается более сложной, чем в средах без пространственной дисперсии. Нахождение таких поправок для сред, демонстрирующих нелинейность более высокого порядка и обладающих симметрией относительно вращения вокруг только одной оси, достаточно сложная задача, требующая дальнейшей работы.

7. КОМПОНЕНТЫ ТЕНЗОРА ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА В СРЕДАХ С КВАДРАТИЧНОЙ И КУБИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

В качестве примера приведем формулы (38), (39), (40) и (41) для практически важных частных случаев генерации суммарной частоты $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$, $\mathbf{k}^{(3)} = \mathbf{k}^{(1)} + \mathbf{k}^{(2)}$ ($n = 2$) и частоты $\omega_4 = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3$, $\mathbf{k}^{(4)} = \mathbf{k}^{(1)} + \mathbf{k}^{(2)} + \mathbf{k}^{(3)}$ ($n = 3$), из которых легко могут быть получены соответствующие выражения для энергии, векторов потока энергии и импульса, а также тензора плотности потока импульса для других широко распространенных нелинейных оптических эффектов (генерация второй и третьей гармоник, когерентное антистоксово рассеяние света (КАРС) и др.).

При $n = 2$

$$P^{nloc}_i(\omega_3) = \gamma^{(2)}_{ijlk}(\omega_3;\omega_1,\omega_2) E^{(1)}_j \partial_k E^{(2)}_l + \\ + \gamma^{(2)}_{ijlk}(\omega_3;\omega_2,\omega_1) E^{(2)}_j \partial_k E^{(1)}_l, \quad (45)$$

$$P^{nloc}_i(\omega_{1,2}) = \gamma^{(2)}_{ijlk}(\omega_{1,2};\omega_3,-\omega_{2,1}) E^{(3)}_j \partial_k E^{(2,1)*}_l + \\ + \gamma^{(2)}_{ijlk}(\omega_{1,2};-\omega_{2,1},\omega_3) E^{(2,1)*}_j \partial_k E^{(3)}_l \quad (46)$$

и формулы (38)–(41) принимают вид

$$U^{(2)nloc} = 2i\Big(\gamma^{(2)}_{iljp}(\omega_3;\omega_2,\omega_1)k^{(1)}_p + \\ + \gamma^{(2)}_{ijlp}(\omega_3;\omega_1,\omega_2)k^{(2)}_p\Big)\tilde{E}^{(3)*}_i \tilde{E}^{(1)}_j \tilde{E}^{(2)}_l + \text{c.c.}, \quad (47)$$

$$S^{(2)nloc}_k = -i\,[\omega_1\gamma_{jlik}(-\omega_1;\omega_2,-\omega_3) + \\ + \omega_2\gamma_{ljik}(-\omega_2;\omega_1,-\omega_3)]\,\tilde{E}^{(1)}_j \tilde{E}^{(2)}_l \tilde{E}^{(3)*}_i + \text{c.c.}, \quad (48)$$

$$\begin{aligned} g^{(2)nloc}_p = {} & ie_{pik}\Big\{\Big[k^{(2)}_l\gamma^{(2)}_{ijml}(\omega_3;\omega_1,\omega_2) + \\ & + k^{(1)}_l\gamma^{(2)}_{imjl}(\omega_3;\omega_2,\omega_1)\Big]\tilde{B}^{(3)*}_k \tilde{E}^{(1)}_j \tilde{E}^{(2)}_m + \\ & + \Big[k^{(2)}_l\gamma^{(2)}_{ijml}(-\omega_1;-\omega_3,\omega_2) - \\ & - k^{(3)}_l\gamma^{(2)}_{imjl}(-\omega_1;\omega_2,-\omega_3)\Big]\tilde{B}^{(1)}_k \tilde{E}^{(3)*}_j \tilde{E}^{(2)}_m + \\ & + \Big[k^{(1)}_l\gamma^{(2)}_{ijml}(-\omega_2;-\omega_3,\omega_1) - \\ & - k^{(3)}_l\gamma^{(2)}_{imjl}(-\omega_2;\omega_1,-\omega_3)\Big] \times \\ & \times \tilde{B}^{(2)}_k \tilde{E}^{(3)*}_j \tilde{E}^{(1)}_m\Big\} + \text{c.c.}, \end{aligned} \quad (49)$$

$$G_{pk}^{(2)nloc} = i\left\{\left\{\delta_{pk}\left[\gamma_{iljm}^{(2)}(\omega_3;\omega_2,\omega_1)k_m^{(1)} + \gamma_{ijlm}^{(2)}(\omega_3;\omega_1,\omega_2)k_m^{(2)}\right] - \left[\gamma_{iljk}^{(2)}(\omega_3;\omega_2,\omega_1)k_p^{(1)} + \right.\right.\right.$$
$$\left.\left. + \gamma_{ijlk}^{(2)}(\omega_3;\omega_1,\omega_2)k_p^{(2)}\right]\right\}\tilde{E}_i^{(3)*}\tilde{E}_j^{(1)}\tilde{E}_l^{(2)} - \left[(\gamma_{kjlm}^{(2)}(\omega_3;\omega_1,\omega_2)k_m^{(2)} + \gamma_{kljm}^{(2)}(\omega_3;\omega_2,\omega_1)k_m^{(1)}\right] \times$$
$$\times \tilde{E}_p^{(3)*}\tilde{E}_j^{(1)}\tilde{E}_l^{(2)} + \left[\gamma_{kjlm}^{(2)}(-\omega_1;-\omega_3,\omega_2)k_m^{(2)} - \gamma_{kljm}^{(2)}(-\omega_1;\omega_2,-\omega_3)k_m^{(3)}\right]\tilde{E}_j^{(3)*}\tilde{E}_p^{(1)}\tilde{E}_l^{(2)} +$$
$$\left. + \left[\gamma_{kjlm}^{(2)}(-\omega_2;-\omega_3,\omega_1)k_m^{(1)} - \gamma_{kljm}^{(2)}(-\omega_2;\omega_1,-\omega_3)k_m^{(3)}\right]\tilde{E}_j^{(3)*}\tilde{E}_l^{(1)}\tilde{E}_p^{(2)}\right\} + \text{c.c.} \tag{50}$$

При получении формул (47), (48), (49) и (50) из соотношений (38), (39), (40) и (41) с целью достижения максимально компактной записи первых использовались симметрийные соотношения (31), (8), которые в случае среды с квадратичной нелинейностью записываются в виде

$$\gamma_{ijkp}^{(2)}(\omega_3;\omega_2,\omega_1) = -\gamma_{kjip}^{(2}(-\omega_1;\omega_2,-\omega_3), \tag{51}$$

$$\gamma_{ijkp}^{(2)}(\omega_3;\omega_1,\omega_2) + \gamma_{jkip}^{(2)}(-\omega_1;\omega_2,-\omega_3) + \gamma_{kijp}^{(2)}(-\omega_2;-\omega_3,\omega_1) = 0. \tag{52}$$

В среде с кубической нелинейностью ($n = 3$) материальные уравнения (10) и (11), выражения для энергии, векторов потока энергии и импульса, а также тензора плотности потока импульса задаются формулами

$$P_i^{nloc}(\omega_4) = \gamma_{ijlmk}^{(3)}(\omega_4;\omega_1,\omega_2,\omega_3)E_j^{(1)}E_l^{(2)}\partial_k E_m^{(3)} + \gamma_{ijlmk}^{(3)}(\omega_4;\omega_2,\omega_3,\omega_1)E_j^{(2)}E_l^{(3)}\partial_k E_m^{(1)} +$$
$$+ \gamma_{ijlmk}^{(3)}(\omega_4;\omega_3,\omega_1,\omega_2)E_j^{(3)}E_l^{(1)}\partial_k E_m^{(2)}, \tag{53}$$

$$P_i^{nloc}(\omega_{1,2,3}) = \gamma_{ijlmk}^{(3)}(\omega_{1,2,3};\omega_4,-\omega_{2,3,1},-\omega_{3,1,2})E_j^{(4)}E_l^{(2,3,1)*}\partial_k E_m^{(3,1,2)*} + \gamma_{ijlmk}^{(3)}(\omega_{1,2,3};-\omega_{3,1,2},\omega_4,-\omega_{2,3,1}) \times$$
$$\times E_j^{(3,1,2)*}E_l^{(4)}\partial_k E_m^{(2,3,1)*} + \gamma_{ijlmk}^{(3)}(\omega_{1,2,3};-\omega_{2,3,1},-\omega_{3,1,2},\omega_4)E_j^{(2,3,1)*}E_l^{(3,1,2)*}\partial_k E_m^{(4)}, \tag{54}$$

$$U^{(3)nloc} = 3i\left[\gamma_{ilmjp}^{(3)}(\omega_4;\omega_2,\omega_3,\omega_1)k_p^{(1)} + \gamma_{ijmlp}^{(3)}(\omega_4;\omega_1,\omega_3,\omega_2)k_p^{(2)} + \gamma_{ijlmp}^{(3)}(\omega_4;\omega_1,\omega_2,\omega_3)k_p^{(3)}\right] \times$$
$$\times \tilde{E}_i^{(4)*}\tilde{E}_j^{(1)}\tilde{E}_l^{(2)}\tilde{E}_m^{(3)} + \text{c.c.}, \tag{55}$$

$$S_k^{(3)nloc} = -i\left[\omega_1\gamma_{ilmjk}^{(3)}(\omega_4;\omega_2,\omega_3,\omega_1) + \omega_2\gamma_{ijmlk}^{(3)}(\omega_4;\omega_1,\omega_3,\omega_2) + \omega_3\gamma_{ijlmk}^{(3)}(\omega_4;\omega_1,\omega_2,\omega_3)\right] \times$$
$$\times \tilde{E}_i^{(4)*}\tilde{E}_j^{(1)}\tilde{E}_l^{(2)}\tilde{E}_m^{(3)} + \text{c.c.}, \tag{56}$$

$$g_p^{(3)nloc} = ie_{pik}\left\{\left[\gamma_{ijlmn}^{(3)}(\omega_4;\omega_1,\omega_2,\omega_3)k_n^{(3)} + \gamma_{ilmjn}^{(3)}(\omega_4;\omega_2,\omega_3,\omega_1)k_n^{(1)} + \right.\right.$$
$$\left. + \gamma_{imjln}^{(3)}(\omega_4;\omega_3,\omega_1,\omega_2)k_n^{(2)}\right]B_k^{(4)*}E_j^{(1)}E_l^{(2)}E_m^{(3)} + \left[\gamma_{ijlmn}^{(3)}(-\omega_1;-\omega_4,\omega_2,\omega_3)k_n^{(3)} - \right.$$
$$\left. - \gamma_{ilmjn}^{(3)}(-\omega_1;\omega_2,\omega_3,-\omega_4)k_n^{(4)} + \gamma_{imjln}^{(3)}(-\omega_1;\omega_3,-\omega_4,\omega_2)k_n^{(2)}\right] B_k^{(1)}E_j^{(4)*}E_l^{(2)}E_m^{(3)} +$$
$$+ \left[\gamma_{ijlmn}^{(3)}(-\omega_2;\omega_1,-\omega_4,\omega_3)k_n^{(3)} + \gamma_{ilmjn}^{(3)}(-\omega_2;-\omega_4,\omega_3,\omega_1)k_n^{(1)} - \gamma_{imjln}^{(3)}(-\omega_2;\omega_3,\omega_1,-\omega_4)k_n^{(4)}\right] \times$$
$$\times B_k^{(2)}E_j^{(1)}E_l^{(4)*}E_m^{(3)} - \left[\gamma_{ijlmn}^{(3)}(-\omega_3;\omega_1,\omega_2,-\omega_4)k_n^{(4)} - \gamma_{ilmjn}^{(3)}(-\omega_3;\omega_2,-\omega_4,\omega_1)k_n^{(1)} - \right.$$
$$\left.\left. - \gamma_{imjln}^{(3)}(-\omega_3;-\omega_4,\omega_1,\omega_2)k_n^{(2)}\right] B_k^{(3)}E_j^{(1)}E_l^{(2)}E_m^{(4)*}\right\} + \text{c.c.}, \tag{57}$$

$$\begin{aligned}
G_{pk}^{(3)nloc} = i\Big\{\Big\{\delta_{pk}\Big[\gamma_{ilmjn}^{(3)}(\omega_4;\omega_2,\omega_3,\omega_1)k_n^{(1)} + \gamma_{ijmln}^{(3)}(\omega_4;\omega_1,\omega_3,\omega_2)k_n^{(2)} + \gamma_{ijlmn}^{(3)}(\omega_4;\omega_1,\omega_2,\omega_3)k_n^{(3)}\Big] - \\
- \Big[\gamma_{ilmjk}^{(3)}(\omega_4;\omega_2,\omega_3,\omega_1)k_p^{(1)} + \gamma_{ijmlk}^{(3)}(\omega_4;\omega_1,\omega_3,\omega_2)k_p^{(2)} + \gamma_{ijlmk}^{(3)}(\omega_4;\omega_1,\omega_2,\omega_3)k_p^{(3)}\Big]\Big\}\tilde{E}_i^{(4)*}\tilde{E}_j^{(1)}\tilde{E}_l^{(2)}\tilde{E}_m^{(3)} - \\
- \Big[\gamma_{klmjn}^{(3)}(\omega_4;\omega_2,\omega_3,\omega_1)k_n^{(1)} + \gamma_{kjmln}^{(3)}(\omega_4;\omega_1,\omega_3,\omega_2)k_n^{(2)} + \gamma_{kjlmn}^{(3)}(\omega_4;\omega_1,\omega_2,\omega_3)k_n^{(3)}\Big]\tilde{E}_p^{(\Sigma)*}\tilde{E}_j^{(1)}\tilde{E}_l^{(2)}\tilde{E}_m^{(3)} \\
- \Big[\gamma_{kmiln}^{(3)}(-\omega_1;\omega_3,-\omega_4,\omega_2)k_n^{(2)} + \gamma_{klimn}^{(3)}(-\omega_1;\omega_2,-\omega_4,\omega_3)k_n^{(3)} - \gamma_{klmin}^{(3)}(-\omega_1;\omega_2,\omega_3,-\omega_4)k_n^{(4)}\Big]\tilde{E}_i^{(4)*}\tilde{E}_p^{(1)}\tilde{E}_l^{(2)}\tilde{E}_m^{(3)} - \\
- \Big[\gamma_{kmijn}^{(3)}(-\omega_2;\omega_3,-\omega_4,\omega_1)k_n^{(1)} + \gamma_{kijmn}^{(3)}(-\omega_2;-\omega_4,\omega_1,\omega_3)k_n^{(3)} - \gamma_{kmjin}^{(3)}(-\omega_2;\omega_3,\omega_1,-\omega_4)k_n^{(4)}\Big] \times \\
\times \tilde{E}_i^{(4)*}\tilde{E}_j^{(1)}\tilde{E}_p^{(2)}\tilde{E}_m^{(3)} - \Big[\gamma_{kiljn}^{(3)}(-\omega_3;-\omega_4,\omega_2,\omega_1)k_n^{(1)} + \gamma_{kijln}^{(3)}(-\omega_3;-\omega_4,\omega_1,\omega_2)k_n^{(2)} - \\
- \gamma_{kjlin}^{(3)}(-\omega_3;\omega_1,\omega_2,-\omega_4)k_n^{(4)}\Big]\tilde{E}_i^{(4)*}\tilde{E}_j^{(1)}\tilde{E}_l^{(2)}\tilde{E}_p^{(3)}\Big\} + \text{c.c.} \qquad (58)
\end{aligned}$$

Заметим, что подстановки $k_l^{(3)} = k_l^{(1)} + k_l^{(2)}$ в (49), (50) и $k_l^{(4)} = k_l^{(1)} + k_l^{(2)} + k_l^{(3)}$ в (57), (58) не делают эти формулы более компактными.

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Нами получены аналитические выражения, дополняющие ранее известные формулы для плотностей энергии и импульса, а также для плотностей их потоков слагаемыми, возникающими благодаря наличию нелокальности нелинейного оптического отклика непоглощающей среды на внешнее световое поле. Эти дополнительные слагаемые позволяют обобщить на случай нелинейной среды с пространственной дисперсией формулы для компонент тензора энергии-импульса Минковского. Полученные выражения для плотности энергии и импульса отличаются от ранее известных аналогичных формул, корректных для не проявляющей нелокальность оптического отклика среды, только учетом зависимости входящей в них нелинейной поляризации от пространственных производных напряженности электрического поля. Плотность потока импульса, помимо этого отличия, включает дополнительное слагаемое, связанное с тензором, определяющим нелокальный нелинейный оптический отклик толщи среды. Подобное слагаемое также присутствует и в выражении для плотности потока энергии. Таким образом, нелокальность нелинейного оптического отклика среды приводит к возникновению дополнительных потоков энергии и импульса электромагнитного поля.

Результаты работы позволяют начать поиск связанных с пространственной дисперсией оптической нелинейности возможных дополнительных слагаемых в выражениях для плотности углового момента и его потока. Уже сейчас можно сказать, что, например, в частном случае изотропной среды с нелокальностью квадратичного по полю оптического отклика такие слагаемые возникают.

Благодарности. Авторы благодарны К. С. Григорьеву за полезные обсуждения.

Финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС» .

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Н. Розанов, Р. М. Архипов, М. В. Архипов, УФН **188**, 1347 (2018).

2. R. Boyd, *Nonlinear Optics*, Elsevier, Amsterdam (2020).

3. P. S. Pershan, Phys. Rev. **130**, 919 (1963).

4. P. S. Ryzhikov and V. A. Makarov, Laser Phys. Lett. **19**, 035401 (2022).

5. D. Andrews, Symmetry **12**, 1466 (2020).

6. N. Bloembergen, J. Opt. Soc. Amer. **70**, 1429 (1980).

7. С. А. Ахманов, Р. В. Хохлов, *Проблемы нелинейной оптики*, Изд-во Академии наук, Москва (1964).

8. N. Bloembergen, *Nonlinear Optics*, World Sci. Publ. (1965).

9. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, *Теоретическая физика. Том 8. Электродинамика сплошных сред*, Физматлит, Москва (2005).

10. А. А. Рухадзе, В. П. Силин, УФН **74**, 223 (1961).

11. В. М. Агранович, В. Л. Гинзбург, *Кристаллооптика с учетом пространственной дисперсии и теория экситонов*, Наука, Москва (1965).

12. И. Н. Топтыгин, К. Левина, УФН **186**, 2 (2016).

13. Yu. A. Kirochkin and K. N. Stepanov, ЖЭТФ **104**, 3955 (1993).

14. S. Serulnik and Y. Ben-Aryeh, Quantum Opt. B **3**, 63 (1991).

15. V. A. Makarov, in *Quantum Photonics*: *Pionering Advances and Emerging Applications*, ed. by R. W. Boyd, S. G. Lukishova, and V. N. Zadkov, Springer, Berlin (2019), Vol. 217, p. 317.

16. С. Н. Волков, Н. И. Коротеев, В. А. Макаров, ЖЭТФ **113**, 1261 (1998).

17. K. S. Grigoriev, N. Yu. Kuznetsov, E. B. Cherepetskaya, and V. A. Makarov, Opt. Express **25**, 6253 (2017).

18. H. Sroor, C. Moodley, V. Rodríguez-Fajardo et al., J. Opt. Soc. Amer. A **38**, 1443 (2021).

19. P. W. Milonni and R. W. Boyd, Adv. Opt. Photon. **2**, 519 (2010).

20. I. Campos-Flores, J. L. Jimenez-Ramirez, and J. Roa-Neri, J. Electromagn. Analysis and Appl. **9**, 203 (2017).

21. A. Shevchenko and M. Kaivola, J. Phys. B **44**, 175401 (2011).

22. M. Mansuripur and A. Zakharian, Opt. Comm. **283**, 3557 (2012).

23. D. E. Soper, *Classical Field Theory*, Dover Publ. New York (2008).

24. Y. R. Shen, *Principles of Nonlinear Optics*, Wiley, New York (1984).

25. S. V. Popov, Yu. P. Svirko, and N. I. Zheludev, *Susceptibility Tensor for Nonlinear Optics*, Taylor & Francis, New York (2015).

26. J. Schwichtenberg, *Physics from Symmetry*, Springer, Berlin (2018).

27. S. M. Barnett, J. Opt. **13**, 064010 (2011).

28. K. Y. Bliokh, J. Dressel, and F. Nori, New J. Phys. **16**, 093037 (2014).

29. O. Yamashita, Opt. Comm. **284**, 2532 (2011).