

О ТЕОРЕМЕ ДЕКОМПОЗИЦИИ ДЛЯ ГЛЮОНОВ

И. В. Аникин ^{a*}, А. С. Жевлаков ^{a,b**}

^a Лаборатория теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова,
Объединенный институт ядерных исследований
141980, Дубна, Московская обл., Россия

^b Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова
664033, Иркутск, Россия

Поступила в редакцию 8 февраля 2022 г.,
после переработки 3 марта 2022 г.
Принята к публикации 3 марта 2022 г.

В последнее время широко обсуждается проблема разделения спинового и орбитального углового момента (УМ). До настоящего времени все дискуссии о возможности отделения спинового УМ от орбитального УМ калибровочно-инвариантным образом основывалась на использовании анзаца о том, что глюонное поле может быть аддитивно представлено в виде разложения на физические глюонные компоненты и компоненты, преобразующейся как чистая калибровка, т. е. $A_\mu = A_\mu^{phys} + A_\mu^{pure}$. В данной статье показано, что для неабелевой калибровочной теории такая декомпозиция глюонного поля имеет строгое математическое доказательство в рамках концепции контурной калибровки. Другими словами, анзац декомпозиции глюонного поля переформулируется как теорема о декомпозиции и доказывается с использованием контурной калибровки. Показано, что контурная калибровка обладает особым классом остаточной калибровки, которая связана с конфигурацией поля на границе и выражается в терминах чистых калибровочных полей. В результате такого разложения тривиальные граничные условия приводят к тому, что глюонное поле имеет только физические глюонные конфигурации, зафиксированные условием контурной калибровки.

DOI: 10.31857/S0044451022070000
EDN: EDZOYD

1. ВВЕДЕНИЕ

В теоретическом и экспериментальном сообществах ведутся дискуссии о возможности выделить составляющие спина нуклона: внутренний партонный спиновый и орбитальный угловой моменты [1]. На данном этапе можно выделить две различные широко обсуждаемые декомпозиции: JM-декомпозиция (Jaffe-Manohar's) [2] и J-декомпозиция (Ji's) [3]. JM-декомпозиция приводит к полному разложению спина нуклона на спиновые и орбитальные части кварков и глюонов по отдельности. В то время как J-декомпозиция, напротив, не приводит к выделению отдельных вкладов от партонов, при этом данное разложение обладает калибровочной инвариантностью.

В работах [4, 5] был предложен калибровочно инвариантный аналог JM-декомпозиции. В рамках кулоновской калибровки утверждалось, что глюонное поле можно формально представить как

$$A_\mu(x) = A_\mu^{phys}(x) + A_\mu^{pure}(x). \quad (1)$$

Стоит отметить что данная декомпозиция глюонного поля всегда рассматривалась как первый шаг в большинстве существующих дискуссий о калибровочно-инвариантном разделении на спиновый и орбитальный угловые моменты в нуклоне (см., например, [6–17]).

В абелевой $U(1)$ калибровочной теории физические компоненты A_μ^{phys} в (1) соответствуют поперечной составляющей A_μ^\perp , которая является калибровочно инвариантной в отличие от продольной компоненты A_μ^L , связанной с A_μ^{pure} , которая преобразуется калибровочно и должна быть устранена калибровочным условием в рамках лагранжевого подхода. Отсюда следует, что в абелевой теории разложение, представленное в (1), является абсолютно есте-

* E-mail: anikin@theor.jinr.ru

** E-mail: zhevlakov@theor.jinr.ru

ственным, и в законности данного разложения нет сомнений.

В случае неабелевой $SU(3)$ калибровочной теории и поперечная, и продольная компоненты калибровочно преобразуются. Следовательно, упомянутое разложение становится как минимум неочевидным, особенно в контексте определения физических компонент. В частности, использование калибровочных условий ковариантного типа неизбежно должно приводить к невозможности разделения спиновых и орбитальных угловых моментов калибровочно-инвариантным образом, поскольку зависимость глюонных конфигураций от координат нельзя определить независимо для каждой из компонент поля, см., например, [18].

Между тем, разложение глюонного поля на физические и нефизические составляющие является краеугольным камнем во многих подходах, посвященных калибровочно-инвариантному разделению спиновых и орбитальных угловых моментов.

В данной работе декомпозиция, представленная в формуле (1), рассматривается как утверждение, которое должно быть доказано, если это возможно в рамках неабелевой теории. Доказательство представления (1) для неабелевого поля может быть реализовано в рамках контурной калибровки, которая обобщает стандартные локальные аксиальные калибровки, и при этом является свободной от грибовских копий [19, 20]. В отличие от локальной калибровки, в контурной калибровке, которая является нелокальным типом калибровки, сначала фиксируется представитель на калибровочной орбите, а затем находится подходящее локальное калибровочное условие для данного представителя на орбите. Особенности контурной калибровки легко понять в рамках гамильтонова формализма, где условие контурной калибровки однозначно определяет поверхность многообразия, которая пересекает слой с групповой орбитой уникальным образом (см. детали в [21]). В качестве нового наблюдения показано наличие специальной остаточной калибровочной свободы, которой обладает контурная калибровка. Однако данная остаточная свобода локализована в нетривиальных граничных условиях, которые связаны с чистыми калибровочными конфигурациями, определенными на бесконечности.

Отметим, что физические величины не зависят от выбора калибровки. Аксиальный тип калибровок связан с определенным фиксированным направлением в пространстве. В таком случае независимость от калибровки следует рассматривать как независимость от выбранного направления, кото-

рое обеспечивается дополнительными требованиями [22]. Более того, в рамках гамильтонова формализма использование контурной калибровки подразумевает, что условие калибровки (в качестве дополнительного условия) может быть полностью разрешено относительно калибровочной функции за исключением калибровочных преобразований в конечной области пространства. Поэтому в данном смысле физические наблюдаемые, рассматриваемые в контурной калибровке, являются калибровочно-инвариантными по построению.

2. СВЯЗЬ ЛОКАЛЬНЫХ И НЕЛОКАЛЬНЫХ КАЛИБРОВОЧНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Прежде всего, напомним соответствие между видом калибровочных преобразований и вильсоновским путезависимым функционалом (см. детали в [23]). В дальнейшем, для краткости, используется термин «линия Вильсона» независимо от формы пути, если только данный термин не ведет к заблуждению.

Предположим, что в рамках неабелевой калибровочной теории фермионные и калибровочные поля преобразуются как

$$\psi^\theta(x) = e^{+i\theta(x)}\psi(x) \equiv U(x)\psi(x), \quad (2)$$

$$A_\mu^\theta(x) = U(x)A_\mu(x)U^{-1}(x) + \frac{i}{g}U(x)\partial_\mu U^{-1}(x), \quad (3)$$

где $\theta = \theta^a T^a$, а T^a — генераторы соответствующего представления. При фиксированных локальных преобразованиях, как в уравнениях (2) и (3), можно показать, что ковариантная производная и калибровочно-инвариантный оператор фермионной струны принимает следующий вид:

$$i\mathcal{D}_\mu = i\partial_\mu + gA_\mu(x), \quad (4)$$

$$\mathbb{O}^{g\text{-}inv.}(x, y) = \bar{\psi}(y)[y; x]_A\psi(x).$$

Вильсоновская линия определена как

$$[x; x_0]_A = \mathbb{P} \exp \left\{ ig \int_{P(x_0, x)} d\omega_\mu A_\mu(\omega) \right\} =$$

$$= \mathbf{g}(x|A) \equiv \mathbf{g}(P), \quad (5)$$

где $P(x_0, x)$ обозначает путь, который соединяет начальную точку x_0 и конечную x в пространстве Минковского.

Вставив точку x_0 в линию Вильсона, оператор калибровочно-инвариантной струны, см. уравнение (4), преобразуется как

$$\mathbb{O}^{g.-inv.}(x, y) = \bar{\psi}(y)[y; x_0]_A[x_0; x]_A\psi(x). \quad (6)$$

Из уравнения (6) следует, что зависящее от пути нелокальное калибровочное преобразование фермионов может быть представлено в виде

$$\psi^{\mathbf{g}}(x) = \mathbf{g}^{-1}(x|A)\psi(x), \quad (7)$$

где $\psi^{\mathbf{g}}(x)$ — калибровочно-инвариантное фермионное поле в представлении Мандельштама $\Psi(x|A)$ за исключением глобальных калибровочных преобразований, несущественных для данных рассмотрений [24, 25]. Такое преобразование приводит (из уравнения (3)) к

$$A_{\mu}^{\mathbf{g}}(x) = \mathbf{g}^{-1}(x|A)A_{\mu}(x)\mathbf{g}(x|A) + \frac{i}{g}\mathbf{g}^{-1}(x|A)\partial_{\mu}\mathbf{g}(x|A). \quad (8)$$

Следовательно, связь между локальным и нелокальным калибровочным преобразованием имеет вид

$$U(x) \Leftrightarrow \mathbf{g}^{-1}(x|A), \quad (9)$$

что чрезвычайно важно для дальнейшего рассмотрения, поскольку неправильное соответствие приводит к существенно неверным выводам (см., например, [26]).

3. КОНЦЕПЦИЯ КОНТУРНОЙ КАЛИБРОВКИ

В представленной работе проводится пересмотр разложения (1) в контексте выявления тех условий, для которых декомпозиция становится справедливой (если это вообще возможно осуществить). Рассмотрим разложение (1) как утверждение, которое должно быть доказано, по-крайней мере, в рамках калибровочного условия, наиболее подходящего для проверки (1). С этой целью используется концепция контурной калибровки.

С самого начала напомним, что в гамильтоновой формулировке калибровочной теории [27], расширенная мера функционального интеграла в терминах обобщенных импульсах E_i , и координатах A_i включает два вида функциональных дельта-функций. Первый вид дельта-функции отражает первичные (вторичные и т. д.) связи на E_i и A_i , в то время как второй вид дельта-функции относится к так

называемым дополнительным условиям (или калибровочным условиям), точные формы которых диктуются калибровочной свободой. Если первичные (вторичные и т. д.) связи необходимы для исключения нефизических компонент калибровочного поля, то калибровочные условия, в самом идеальном случае, должны зафиксировать соответствующий фактор Лагранжа, связанный с калибровочной орбитой. В рамках лагранжевой формулировки [28], поскольку бесконечный объем калибровочной орбиты факторизуется в функциональной мере по компонентами калибровочного поля, калибровочные условия обычно позволяют устранить нефизические глюонные компоненты.

В этой связи контурная калибровка подразумевает, что для полного фиксирования калибровочной функции (представителя орбиты) или устранения нефизических глюонов необходимо потребовать, чтобы вильсоновский путезависимый функционал между начальной x_0 и конечной x точками пути $P(x_0, x)$ был равен единице, т. е.

$$\mathbf{g}(x|A) = [x; x_0]_A = \mathbb{I}, \quad (10)$$

где путь $P(x_0, x)$ фиксирован, а точка x_0 определяет специфическую начальную точку, которая может зависеть от конечной точки x (см. также [29]).

Хорошо известная аксиальная калибровка, $A^+ = 0$, является фактически частным случаем наиболее общей нелокальной контурной калибровки, определенной условием (10), где фиксированный путь соответствует прямой линии, связывающей точки $\pm\infty$ и x .

В прошлом контурная калибровка была объектом интенсивного изучения (см., к примеру, [19, 20]). Очевидным преимуществом использования контурной калибровки является то, что квантовая калибровочная теория свободна от грибовских неоднозначностей. По своей конструкции контурная калибровка не обладает остаточной калибровочной свободой и с технической точки зрения является самым простым способом полного фиксирования калибровки в пределах конечного пространства. Вкратце, в рамках концепции контурной калибровки сначала фиксируется произвольная точка $(x_0, \mathbf{g}(x_0))$ на слое $\mathcal{P}(\mathcal{X}, \pi | G)$ [30]. После определяются два направления: одно направление определяется на базе \mathcal{X} (где направление есть не что иное, как касательный вектор к кривой, идущей через данную точку x_0), другое направление определяется на слое, где направление может быть однозначно определено как касательное подпространство, связанное с параллель-

ным переносом. Эти два направления формируют горизонтальный вектор (или направление)

$$H_\mu = \partial_\mu - igA_\mu^a(x) D^a, \quad (11)$$

который, по построению, инвариантен относительно структуры группы на слое [30]. В уравнении (11) D^a обозначает соответствующий генератор сдвига вдоль группы слоя и может быть представлен как $\mathbf{g}\partial/\partial\mathbf{g}$. Функционал $\mathbf{g}(x|A)$ из уравнения (5), определенный на главном расслоении $\mathcal{P}(\mathcal{X}, \pi | G)$, является решением уравнения параллельного переноса, задаваемого следующим образом:

$$\frac{dx_\mu(s)}{ds} H_\mu(A) \mathbf{g}(x(s)|A) = 0, \quad (12)$$

если $p(s) = (x(s), \mathbf{g}(x(s)))$ определяется кривой $x(s)$ в \mathcal{X} , параметризованной s . Применение условия (10) с целью выполнения (12) ведет либо к $A_\mu^a(x) = 0$ (тривиальный случай), либо к $D^a \mathbb{I} = 0$ (что является естественным требованием $D^a = \mathbf{g}\partial/\partial\mathbf{g}$).

Таким образом, можно уникальным образом определить точку на расслоении, $\mathcal{P}(\mathcal{X}, \pi | G)$, для которого имеется только единственный горизонтальный вектор, соответствующий данному касательному вектору в точке x в \mathcal{X} . Напомним, что касательный вектор в точке x однозначно определяется заданным путем, проходящим через x . Таким образом, в рамках гамильтонова формализма, основанного на геометрической интерпретации глюонов, условие (10) определяет поверхность на $\mathcal{P}(\mathcal{X}, \pi | G)$. Эта поверхность параллельна плоскости базы, где определен путь, и выделяет единичный элемент, $\mathbf{g} = 1$, в каждом слое из расслоения $\mathcal{P}(\mathcal{X}, \pi | G)$ [21].

Контурная калибровка относится к нелокальному классу калибровок и естественным образом обобщает известные локальные калибровки аксиального типа. Также стоит заметить, что две разные контурные калибровки могут соответствовать одной и той же локальной аксиальной калибровке, где остаточная калибровка осталась незафиксированной [31, 32]. Это утверждение отражает тот факт, что в отличие от локальной аксиальной калибровки контурная калибровка не обладает остаточной калибровочной свободой в конечной области пространства. Однако, как показано ниже, граничные глюонные конфигурации могут порождать особый класс остаточных калибровок.

4. КОНТУРНАЯ КАЛИБРОВКА И ДЕКОМПОЗИЦИЯ ГЛЮОННОГО ПОЛЯ

Перейдем к обсуждению контурной калибровки, определенной условием (10). Используя путизависимые калибровочные преобразования для глюонного поля (см. уравнение (8)) и вычислив производную вильсоновской линии [33] в калибровке $[x; -\infty]_A = \mathbb{I}$, получим, что глюонное поле можно представить как декомпозицию в следующем виде:

$$A_\mu^{c.g.}(x) = \int_{-\infty}^x d\omega_\alpha G_{\alpha\mu}(\omega|A^{c.g.}) + A_\mu^{c.g.}(x-n\infty), \quad (13)$$

где $G_{\mu\nu}$ — тензор напряженности глюонного поля; начальная точка определена в $-\infty$ и путь параметризован как

$$\omega \Big|_x^{-\infty} = x - n \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-s\epsilon}}{\epsilon} \Big|_{s=0}^{s=\infty}. \quad (14)$$

Данная параметризация пути включает вектор n , определенный заданным фиксированным направлением. Например, вектор n можно выбрать в минус-направлении на световом конусе, $n = (0^+, n^-, \mathbf{0}_\perp)$, в рамках формализма квантования на световом конусе.

Важно отметить, что разложение (13) существенно отличается от разложения, представленного в [34], отсутствием ϵ -функции в ней. В самом деле, данная контурная калибровка выбирает либо одну θ -функцию, либо другую, подробности см. в [32].

Из уравнения (13) следует, что контурная калибровка позволяет естественным образом разделить глюонное поле на G -зависимую и G -независимую компоненты. Иначе говоря, вместо формулы (13) удобно представить разделение глюонного поля в виде (см. [17])

$$A_\mu^{c.g.}(x) = A_\mu(x|G) + A_\mu^{b.c}(-\infty), \quad (15)$$

где $A_\mu(x|G)$ есть не что иное как первое слагаемое в (13) и $A_\mu^{b.c}(-\infty) \equiv A_\mu^{c.g.}(x-n\infty)$ — конфигурация поля глюона на границе. Необходимо отметить, что G -зависимая конфигурация глюонного поля $A_\mu(x|G)$ возникает в результате нетривиальной деформации пути [33] и глюонное разделение, представленное уравнением (15), напоминает формулу [17], но слегка отличается по смыслу.

В рамках контурной калибровки (10) граничные глюонные конфигурации должны удовлетворять условию вида

$$\mathbb{P} \exp \left\{ ig A_\mu^{b.c}(-\infty) \int_{-\infty}^x d\omega_\mu \right\} = \mathbb{I}. \quad (16)$$

Таким образом, поскольку интеграл по $d\omega_\mu$ в уравнении (16) расходится как $1/\epsilon$ при ϵ стремящемся к нулю, комбинация $n_\mu A_\mu^{b.c}(-\infty)$ должна вести себя подобно ϵ^2 . Действительно, функция в экспоненте (см. (16)) имеет вид (размерность пространства $D = 4$)

$$A_\mu^{b.c}(-\infty) \int_{-\infty}^x d\omega_\mu \equiv A_\mu^{b.c}(x - \infty n) \int_{-\infty}^x d\omega_\mu = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\epsilon}\right)^{-1} A_\mu^{b.c}(n) n_\mu \frac{1}{\epsilon} = 0. \quad (17)$$

Следовательно, граничные глюонные конфигурации подчиняются условию поперечности

$$n_\mu(\theta_i, \varphi) A_\mu^{b.c}(n(\theta_i, \varphi)) = 0. \quad (18)$$

Здесь, поскольку вектор n определяет фиксированное направление, удобнее использовать сферические координаты в евклидовом пространстве (или псевдосферическую систему в пространстве Минковского), где вектор n зависит только от угловых координат (θ_i, φ) , см. ниже. Если размерность пространства $D > 4$, то условие поперечности, следующее из уравнения (18), не является необходимым для выполнения условия контурной калибровки.

Теперь можно показать, что в контурной калибровке граничные глюонные конфигурации могут быть представлены в виде чистых калибровочных конфигураций. Прежде всего важно отметить, что начальная точка x_0 играет особую роль в рассматриваемом формализме, поскольку все пути начинаются в этой точке, и база \mathcal{X} касается главного расслоения \mathcal{P} только в этой точке.

Для начала рассмотрим точку x_0 , в которой, предположим, начинаются два разных пути, см. рис. 1. Такая стартовая точка имеет два касательных вектора, связанных с $P(x_0, x_1)$ и $P(x_0, x_2)$. В свою очередь, каждый касательный вектор имеет свой уникальный горизонтальный вектор $H_\mu^{(i)}$ определенный на слое. Тогда, воспользовавшись уравнением (10), получаем, что

$$\mathbb{P} \exp \left\{ ig \int_{L(x_0)} d\omega_\mu A_\mu(\omega) \right\} = \mathbb{I}, \quad (19)$$

$$\mathbb{P} \exp \left\{ ig \int_{\Omega} d\omega_\mu \wedge d\omega_\nu G_{\mu\nu}(\omega) \right\} = \mathbb{I}, \quad (20)$$

где под $L(x_0)$ подразумевается петля с началом $x_0 = -\infty$ и Ω является соответствующей поверхно-

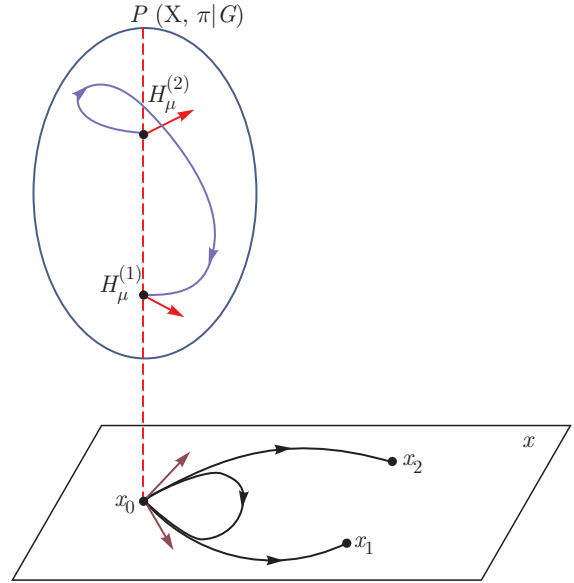


Рис. 1. Голономия: $H_\mu^{(i)}$ с $i = 1, 2$, обозначающими соответствующие горизонтальные векторы, определенные на слое \mathcal{P}

стью, связанной с петлей $L(x_0)$, см. рис. 1. Заметим, что точная форма Ω не важна для нашего исследования. Более того, фиксированная форма Ω может привести к дополнительной неоднозначности [35], которая, однако, не повлияет на выводы данной работы.

Простейшее решение уравнения (19) имеет вид

$$A_\mu(\omega) = \frac{i}{g} U(\omega) \partial_\mu U^{-1}(\omega), \quad (21)$$

который ведет к $G_{\mu\nu}(\omega) = 0$ и, следовательно, к уравнению (20) после использования теоремы Стокса (вопрос выбора поверхности Ω тут не затрагивается¹⁾). Отметим, что нетривиальное (ненулевое) решение уравнения (20) может существовать априори. Однако такое решение (ведущее к равенству нулю всего интеграла) в любом случае не может быть представлено в форме чистой калибровки. В теории групп путей утверждается, что любая петля как элемент подгруппы петель может быть гомотопически преобразована в «нулевой элемент», который в нашем случае является базовой точкой $x_0 = -\infty$.

В результате чистое калибровочное представление в уравнении (21) может быть связано только с граничными конфигурациями, т. е.

$$A_\mu^{b.c.}(x_0) = \frac{i}{g} U(x_0) \partial_\mu U^{-1}(x_0), \quad (22)$$

¹⁾ Всесторонний анализ неабелевой теоремы Стокса можно найти в [35].

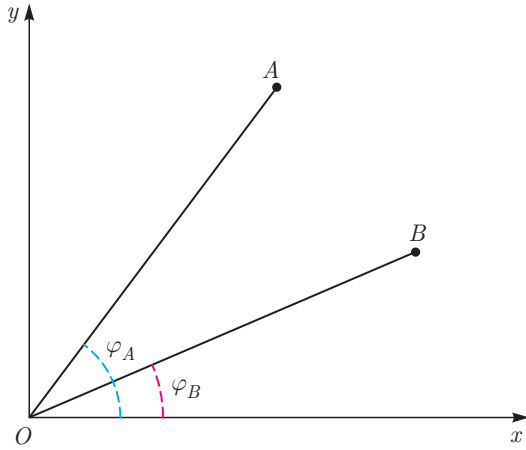


Рис. 2. Угол не зависит от начальной точки O : векторы $A = (R_A, \varphi_A)$ и $B = (R_B, \varphi_B)$; $\lim_{R_A \rightarrow 0} A = \lim_{R_B \rightarrow 0} B = O$, где $O = (0 \cdot \cos \varphi_i, 0 \cdot \sin \varphi_i)$ и $i = A, B$

потому что конфигурация $A_\mu(x|G)$ в уравнении (15) приводит к нулю интегрирование в (19) по определению.

Скомбинировав окончательно уравнения (15) и (22), приходим к доказательству, что в контурной калибровке глюонное поле действительно может быть представлено в виде разложения

$$A_\mu^{c.g.}(x) = A_\mu(x|G) + \frac{i}{g} U(x_0) \partial_\mu U^{-1}(x_0) \Big|_{x_0 = -\infty}, \quad (23)$$

где оба слагаемых перпендикулярны выбранному вектору направления n_μ .

Уравнение (23) показывает, что остаточная калибровка в контурной калибровке полностью локализована на границе. Для того чтобы понять природу остаточной калибровки, связанной с граничными глюонными конфигурациями в рамках контурной калибровки, рассмотрим простейший пример на \mathbb{R}^2 , где A и B имеют одну и ту же начальную точку O , см. рис. 2. Удобнее работать со сферической системой, т. е.

$$A(R_A, \varphi_A) \equiv (R_A \cos \varphi_A, R_A \sin \varphi_A)$$

и т. д. Если радиус-векторы A и B отличаются от нуля даже на бесконечно малое, значит эти два вектора различимы. Однако, если $R_A = R_B = 0$, то начальная точка O теряет информацию о векторах A и B , поскольку

$$O = (0 \cdot \cos \varphi_A, 0 \cdot \sin \varphi_A) = (0 \cdot \cos \varphi_B, 0 \cdot \sin \varphi_B).$$

Важно отметить, что в общем случае углы могут быть произвольными. В этом смысле начальная точка O является точкой, не зависящей от угла.

Поскольку $x_0 = \lim_{R \rightarrow 0} X(R, \theta_1, \theta_2, \varphi)$, получаем что

$$A_\mu^{b.c.}(\bar{\epsilon}n(\theta_i, \varphi)) = \frac{i}{g} U(\bar{\epsilon}n(\theta_i, \varphi)) \partial_\mu U^{-1}(\bar{\epsilon}n(\theta_i, \varphi)), \quad (24)$$

где $\bar{\epsilon} \rightarrow -\infty$, θ_i и φ не фиксированы, что обеспечивает остаточную калибровочную свободу аналогично той, что продемонстрирована на рис. 2.

Наиболее удобный способ фиксации остаточной калибровочной свободы — это предположить, что (см. [31, 32])

$$A_\mu^{b.c.}(\bar{\epsilon}n(\theta_i, \varphi)) \equiv A_\mu^{pure}(\bar{\epsilon}n(\theta_i, \varphi)) = 0. \quad (25)$$

В этом случае декомпозиция глюонного поля, представленная в уравнении (1), будет тривиальной.

Таким образом, использование контурной калибровки дает наиболее естественное разложение глюонных полей на G -зависимую глюонную компоненту, которую можно назвать физической, и нефизическую глюонную компоненту, относящуюся к чистой калибровочной конфигурации. Более того, контурная калибровка не обладает остаточной калибровочной свободой в конечной области пространства, а оставшаяся возможная калибровочная свобода полностью изолирована на бесконечной границе данного пространства.

5. СООТВЕТСТВИЕ МЕЖДУ ЛОКАЛЬНОЙ И НЕЛОКАЛЬНОЙ КАЛИБРОВКАМИ

Поскольку контурная калибровка как нелокальный вид калибровки обобщает стандартную локальную калибровку аксиального типа, кратко обсудим соответствие между локальными и нелокальными калибровочными преобразованиями. Как уже упоминалось, локальная калибровка аксиального типа не является свободной от остаточных калибровочных преобразований, в то время как нелокальная контурная калибровка фиксирует всю калибровочную свободу в конечном пространстве при условии, что начальная точка $x_0 = -\infty$. Действительно, если рассмотреть локальную аксиальную калибровку, $A^{+, \theta}(x) = 0$, как уравнение для калибровочной функции $\theta(x)$ (см. уравнение (3)), то получим решение этого уравнения в виде

$$U_0(x^-, \tilde{x}) = C(\tilde{x}) \bar{U}(x^-, \tilde{x}),$$

$$\bar{U}(x^-, \tilde{x}) = \mathbb{P} \exp \left\{ -ig \int_{x_0^-}^{x^-} d\omega^- A^+(\omega^-, \tilde{x}) \right\}, \quad (26)$$

где $\tilde{x} = (x^+, 0^-, \mathbf{x}_\perp)$, x_0^- — фиксирована и $C(\tilde{x})$ — произвольная функция, которая не зависит от x^- и определяется как

$$\mathcal{U}_0(x^- = x_0^-, \tilde{x}) = C(\tilde{x}). \quad (27)$$

Произвольность $C(\tilde{x})$ -функции также отражает тот факт, что здесь имеем дело с произвольной фиксированной начальной точкой x_0 . Для определения остаточной калибровочной свободы требуется, чтобы выполнялось $A^{+, \theta}(x) = 0$ и $A^+(x) = 0$. Иными словами, имеем, что

$$\mathcal{U}_0(x^-, \tilde{x}) \Big|_{\bar{u}=1} \equiv \mathcal{U}^{res}(\tilde{x}) = C(\tilde{x}) \equiv e^{i\tilde{\theta}(\tilde{x})}. \quad (28)$$

Видно, что функция $C(\tilde{x})$ определяет остаточные калибровочные преобразования.

Нелокальная контурная калибровка обобщает локальную калибровку аксиального типа и требует, чтобы полный интеграл в экспоненте уравнения (10) равнялся нулю²⁾. С помощью контурной калибровки в рамках гамильтонова формализма остаточная калибровочная функция $\tilde{\theta}(\tilde{x})$ может быть связана с конфигурациями A^- и A_\perp^i , которые также исчезают, уничтожая всю калибровочную свободу (подробности см. в [23, 36]). Таким образом, восстанавливая полный путь в вильсоновской линии, для данного процесса получаем, что

$$C(\tilde{x}) = \tilde{C}(x_0^+, x_0^-, \mathbf{x}_0^\perp) \times \mathbb{P} \exp \left\{ ig \int_{\mathbf{x}_0^\perp}^{\mathbf{x}^\perp} d\omega_\perp^i A_\perp^i(x_0^+, x_0^-, \omega_\perp) \right\} \times \mathbb{P} \exp \left\{ -ig \int_{x_0^+}^{x^+} d\omega^+ A^-(\omega^+, x_0^-, \mathbf{x}_\perp) \right\} \quad (29)$$

и тогда, используя соответствующую контурную калибровку, приходим в конце к тому, что

$$C(\tilde{x}) \Big|_{c.g.} = \tilde{C}(x_0^+, x_0^-, \mathbf{x}_0^\perp). \quad (30)$$

Уравнение (30) означает, что калибровочная свобода вообще отсутствует. Точное значение фиксированной начальной точки x_0 зависит от рассматриваемого нами физического процесса [36, 37].

²⁾ В локальной калибровке соответствующий экспоненциальный фактор исчезает благодаря тому, что зануляется подынтегральная функция $A^+ = 0$.

6. НЕНУЛЕВЫЕ ГРАНИЧНЫЕ ГЛЮОННЫЕ КОНФИГУРАЦИИ

Данная часть работы посвящена изучению влияния ненулевых граничных конфигураций глюонного поля на определения различных распределений партонов. Прежде всего, важно подчеркнуть, что разложение в уравнениях (13) и (15) по смыслу относится к декомпозиции предложенной в работе [17]. Действительно, уравнение (15) можно переписать как (здесь рассматривается предел $\bar{\epsilon} \rightarrow -\infty$)

$$\tilde{A}_\mu^{l.c.}(k^+; \tilde{x}) = G_\mu(k^+; \tilde{x}) + \delta(k^+) A_\mu^{b.c.}(\bar{\epsilon}n^-(\pi/4, 0, 0); \tilde{x}), \quad (31)$$

где глюонное поле на световом конусе $\tilde{A}_\mu^{l.c.}$ — это фурье-образ $A_\mu^{l.c.}$ только по отношению к x^- , т. е.

$$A_\mu^{l.c.}(x^-; \tilde{x}) \stackrel{\mathcal{F}}{=} \tilde{A}_\mu^{l.c.}(k^+; \tilde{x}), \quad (32)$$

и, следовательно,

$$G^\mu(k^+; \tilde{x}) \stackrel{\mathcal{F}}{=} \int_{-\infty^-}^{x^-} d\omega^- G^{+\mu}(\omega^-, \tilde{x} | A^{c.g.}), \quad (33)$$

$$\delta(k^+) A_\mu^{b.c.}(\bar{\epsilon}n^-; \tilde{x}) \stackrel{\mathcal{F}}{=} A_\mu^{b.c.}(\bar{\epsilon}n^-; \tilde{x}).$$

Важно подчеркнуть, что уравнение (31), как и уравнение (15), было получено прямым образом с учетом контурной калибровки, см. уравнение (10). Как уже отмечалось ранее, важным результатом данной работы является то, что несмотря на факт полного фиксирования калибровочной свободы в конечной области пространства с помощью контурной калибровки, тем не менее, остаточная калибровочная свобода связана с граничными конфигурациями глюонного поля. Нетривиальные топологические эффекты, связанные с граничными конфигурациями глюонных полей, — предмет отдельного рассмотрения.

В работе [17] представление, которое формально похоже на нашу формулу (31), по существу было угадано для случая локальной аксиальной калибровки $A^+ = 0$, где соответствующая остаточная калибровочная свобода включена в неоднородный член с $\delta(k^+)$. В свою очередь, калибровка $A^+ = 0$ с фиксированной остаточной калибровочной свободой в конечной области пространства фактически идентична контурной калибровке [32].

В рамках формализма группы путей можно воспользоваться следующим путезависимым преобразованием, которое порождает обычное преобразование сдвига,

$$[\mathbb{U}^{P(x, x+y)} \psi](x) = [x + y; x]_A^{-1} \psi(x + y), \quad (34)$$

где $\psi(x)$ принадлежит спинорному фундаментальному представлению и определена на пространстве Минковского $M = P/L$ (P обозначает соответствующую группу путей, L — подгруппа петель на P) как инвариантная функция классов сопряженности [30], т. е.

$$\psi(x) = \mathbf{g}(p)\Psi(p), \quad p = (x, \mathbf{g}) \in \mathcal{P}.$$

Кроме того, в уравнении (34) оператор \mathbb{U} , действующий на спинорном многообразии, имеет вид

$$\mathbb{U}^{P(x,x+y)} = \mathbb{P} \exp \left\{ -ig \int_x^{x+y} d\omega_\mu \mathcal{D}_\mu \right\}. \quad (35)$$

В контурной калибровке, где вильсоновская линия зафиксирована из уравнения (34) и равна единице, оператор группы трансляций $\mathbb{U}_q(y)$ принимает тривиальную форму

$$\mathbb{U}^{P(x,x+y)} \Big|_{c.g.} = \mathbb{P} \exp \left\{ -ig \int_x^{x+y} d\omega_\mu \partial_\mu \right\}. \quad (36)$$

Такой оператор не содержит никакой информации о граничных конфигурациях даже если $y \rightarrow \pm\infty$, поскольку конфигурации граничных полей все равно подчиняются уравнению (10). Более того, в данном случае вильсоновская линия в уравнении (34) равна единице из-за равенства нулю интегранта, т. е. $A^+ = A^- = 0$, и равенства нулю целого интеграла по A_\perp .

Следовательно, если введем кварк-глюонные операторы, ответственные за спиновые и орбитальные угловые моменты, как операторы, которые инвариантны относительно остаточных калибровочных преобразований, то необходимо использовать ковариантную производную в виде

$$i\mathcal{D}_{\mu}^{b.c.} = i\partial_\mu + gA_\mu^{b.c.}(-\infty).$$

В этом смысле полученные здесь результаты и результаты [17] не сильно расходятся. Например, следуя [17], можно получить структурную функцию, отвечающую оператору углового момента кварка:

$$f_{L_q}(x) = \mathcal{N} \int_{-\infty}^{+\infty} dz^- e^{ixP^+z^-} \int_{-\infty}^{+\infty} d^2\mathbf{y}_\perp \times \\ \times \langle P | \bar{\psi}(y_\perp) \gamma^+ y_\perp^i i\mathcal{D}_{b.c.}^j \psi(y_\perp + z^-) | P \rangle, \quad (37)$$

где введено обозначение $[ij]$ для антисимметричной комбинации индексов $i, j = 1, 2$ и \mathcal{N} — это нормировочный фактор, ранее введенный в статье [17].

Как уже говорилось ранее, $f_{L_q}(x)$ это физическая величина и не зависит от выбора калибровки. В то же время калибровки аксиального типа (локальные или нелокальные) связаны с фиксированным направлением, необходимым для процедуры факторизации [22]. Поэтому калибровочную инвариантность физической величины можно трактовать в том числе как независимость от выбора направления. В рамках гамильтоновского формализма предполагается, что калибровочное условие (или дополнительное условие) может быть полностью разрешено относительно калибровочной функции, за исключением калибровочных преобразований в конечной области. В этом смысле, физические кварк-глюонные операторы, рассматриваемые в контурной калибровке, являются «калибровочно-инвариантными» по своей конструкции, поскольку в данном случае нет связи ни с какими калибровочными преобразованиями в конечной области из-за фиксации калибровочной функции θ_{fix} (как обсуждалось выше, это следует из выбора $\mathbf{g} = 1$ в слое для всей базы \mathcal{X}), подробности см. в [21].

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Было показано важное соответствие между локальными и нелокальными калибровками, что чрезвычайно важно для избежания существенно неверных выводов, которые тем не менее можно найти в литературе.

В данной работе было предложено доказательство следующего утверждения для неабелевой теории: в контурной калибровке глюонное поле может быть представлено в виде разложения на глюонную конфигурацию $A_\mu(x|G)$, являющуюся физической степенью свободы, и на глюонную конфигурацию чистой калибровки $A_\mu^{pure}(x_0)$, которая полностью изолирована на границе и представляет собой особый тип остаточной калибровочной свободы. Показано, что контурная калибровка не может окончательно устранить новый вид остаточной калибровочной свободы, найденной и подробно проиллюстрированной в данной работе.

В случае тривиальных граничных условий, т. е. $A_\mu^{b.c.} = 0$, в рамках применения контурной калибровки декомпозиция (1) не имеет смысла в неабелевой теории, поскольку только граничные глюонные конфигурации могут быть представлены в виде чистых калибровочных глюонных конфигураций. Более того, если граничные конфигурации положить равными нулю, то калибровочная свобода отсутствует,

и, следовательно, операторы калибровочно-инвариантны по построению, за исключением глобальных калибровочных преобразований, которые не существенны для билинейных форм.

В качестве последнего замечания важно отметить, что декомпозиция глюонного поля, предложенная в работе [4] и формально схожая с (1), имеет статус анзаца, а не строгого вывода, как было сформулировано и доказано в данной работе. Также, отличительной особенностью является то, что глюонные поля разделяются на физические и чистые калибровочные глюонные конфигурации еще до того, как калибровочное условие зафиксировано. Следовательно, чтобы сформулировать анзац нужно было наложить дополнительное требование для извлечения слагаемого $A_\mu^{pure}(x)$, которое, в конечном итоге, определяется условием $G_{\mu\nu}^{pure}(x) = 0$. В свою очередь, такое требование естественно работает в рамках концепции контурной калибровки, см. уравнение (23). Равенство (37) формально не противоречит [4, 17], но в некотором смысле не имеет согласия с [3, 14], где был представлен «динамический» тип разложений углового момента.

Благодарности. Авторы благодарны С. Лорсэ, Д. Г. Паку, М. В. Полякову и Л. Шимановскому за обсуждения. И. В. Аникин выражает благодарность О. В. Теряеву за плодотворные комментарии на ранней стадии работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. X. Ji, F. Yuan, and Y. Zhao, *Nature Rev. Phys.* **3**, 27 (2021).
2. R. L. Jaffe and A. Manohar, *Nucl. Phys. B* **337**, 509 (1990).
3. X. D. Ji, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 610 (1997).
4. X. S. Chen et al., *Phys. Rev. Lett.* **100**, 232002 (2008).
5. X. S. Chen et al., *Phys. Rev. Lett.* **103**, 062001 (2009).
6. X. Ji, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 259101 (2011).
7. M. Wakamatsu, *Int. J. Mod. Phys. A* **29**, 1430012 (2014).
8. M. Wakamatsu, *Eur. Phys. J. A* **51**, 52 (2015).
9. M. Wakamatsu et al., *Annals Phys.* **392**, 287 (2018).
10. C. Lorce, *Phys. Lett. B* **719**, 185 (2013).
11. C. Lorcé, *Phys. Rev. D* **88**, 044037 (2013).
12. E. Leader and C. Lorcé, *Phys. Rep.* **541**, 163 (2014).
13. M. Wakamatsu, *Phys. Rev. D* **84**, 037501 (2011).
14. M. Wakamatsu, *Phys. Rev. D* **83**, 014012 (2011).
15. M. Wakamatsu, *Phys. Rev. D* **81**, 114010 (2010).
16. P. M. Zhang and D. G. Pak, *Eur. Phys. J. A* **48**, 91 (2012).
17. S. Bashinsky and R. L. Jaffe, *Nucl. Phys. B* **536**, 303 (1998).
18. A. V. Belitsky and A. V. Radyushkin, *Phys. Rep.* **418**, 1 (2005).
19. S. V. Ivanov et al., *Yad. Fiz.* **44**, 230 (1986).
20. S. V. Ivanov and G. P. Korchemsky, *Phys. Lett. B* **154**, 197 (1985).
21. I. V. Anikin, arXiv:2105.09430 [hep-ph].
22. I. V. Anikin et al., *Nucl. Phys. B* **828**, 1 (2010).
23. I. V. Anikin et al., *Phys. Rev. D* **95**, 034032 (2017).
24. S. Mandelstam, *Annals Phys.* **19**, 1 (1962).
25. B. S. DeWitt, *Phys. Rev.* **125**, 2189 (1962).
26. C. Lorce, *Phys. Rev. D* **87**, 034031 (2013).
27. L. D. Faddeev and A. A. Slavnov, *Front. Phys.* **50**, 1 (1980).
28. L. D. Faddeev and V. N. Popov, *Usp. Fiz. Nauk* **111**, 427 (1973).
29. H. Weigert and U. W. Heinz, *Z. Phys. C* **56**, 145 (1992).
30. M. B. Mensky, *Theor. Math. Phys.* **173**, 1668 (2012).
31. I. V. Anikin and O. V. Teryaev, *Phys. Lett. B* **690**, 519 (2010).
32. I. V. Anikin and O. V. Teryaev, *Eur. Phys. J. C* **75**, 184 (2015).
33. L. Durand and E. Mendel, *Phys. Lett. B* **85**, 241 (1979).
34. Y. Hatta, *Phys. Rev. D* **84**, 041701 (2011).
35. Y. A. Simonov, *Sov. J. Nucl. Phys.* **50**, 134 (1989).
36. A. V. Belitsky et al., *Nucl. Phys. B* **656**, 165 (2003).
37. M. Burkardt, *Phys. Rev. D* **88**, 014014 (2013).