

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ СОЛИТОНОВ И КОЛЛАПС ЗВУКОВЫХ ВОЛН В СРЕДАХ С ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ ДИСПЕРСИЕЙ

*Е. А. Кузнецов**

*Физический институт им. П. Н. Лебедева Российской академии наук
119991, Москва, Россия*

*Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау Российской академии наук
142432, Черноголовка, Московская обл., Россия*

*Сколковский институт науки и технологий
143026, Сколково, Москва, Россия*

*Институт космических исследований Российской академии наук
117997, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 28 февраля 2022 г.,
после переработки 28 февраля 2022 г.
Принята к публикации 28 февраля 2022 г.

Представлен краткий обзор результатов исследования коллапса звуковых волн в средах с положительной дисперсией, который описывается в рамках трехмерного уравнения Кадомцева–Петвиашвили (КП) [1]. Рассмотрена неустойчивость КП одномерных солитонов в длинноволновом пределе с помощью разложения для соответствующей спектральной задачи. Продемонстрировано, что неустойчивость КП имеет место также для двумерных солитонов в рамках трехмерного уравнения КП с положительной дисперсией. Согласно [2] эта неустойчивость относится к самофокусирующему типу. Нелинейная стадия этой неустойчивости представляет собой коллапс. Одним из критериев коллапса является неограниченность гамильтониана снизу при фиксированной проекции импульса, совпадающей с L_2 -нормой. Этот факт следует из масштабных преобразований, сохраняющих эту норму постоянной. Коллапс по этой причине можно представлять как процесс падения частицы в самосогласованном неограниченном потенциале. Показано, что излучение волн из области с отрицательным гамильтонианом, благодаря его неограниченности снизу, способствует коллапсу волн. Этот сценарий был подтвержден численными экспериментами [3,4]. Представлены два аналитических подхода исследования коллапса: с помощью вариационного метода и квазиклассического приближения. В отличие от нелинейного уравнения Шредингера с фокусирующей нелинейностью особенность квазиклассического подхода для описания звукового коллапса состоит в том, что этот метод предложен для трехмерного уравнения КП как системы с гидродинамической нелинейностью. В рамках квазиклассического описания найдено семейство автомодельных коллапсов. Верхняя граница этого семейства соответствует сильному коллапсу, при котором энергия, захваченная в особенность, конечна. Существование такого режима подтверждается также с помощью вариационного подхода. Другая граница коллапсирующей иерархии совпадает с автомодельным решением трехмерного уравнения КП, описывающим наиболее быстрый слабый коллапс.

DOI: 10.31857/S0044451022060000

EDN: EFCRQF

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время хорошо известно, какую роль в нелинейной физике играет коллапс волн — процесс

образования особенности за конечное время (см., например, обзор [5]). Если уединенные волны — солитоны — характерны для низкоразмерных нелинейных волновых систем, то коллапсы, в отличие от солитонов, типичны для многомерных систем. Причина такого поведения, как известно, связана с усилением нелинейности с ростом размерности пространства. Например, для одномерных нелинейных волновых систем, таких как уравнения Кортевега–де

*E-mail: kuznetso@itp.ac.ru

Вриза (КДВ) или нелинейные уравнения Шредингера, солитоны играют существенную роль в их динамике. С гамильтоновой точки зрения, солитоны в этих моделях, являясь стационарными точками гамильтониана \mathcal{H} при фиксации соответствующих младших положительно определенных интегралов движения, реализуют минимум \mathcal{H} и тем самым оказываются устойчивыми по Ляпунову. Как правило, гамильтонианы для этих моделей имеют два вклада, соответствующих волновой дисперсии (положительно определенной) и нелинейности. Баланс этих двух факторов приводит к существованию солитонов в таких моделях. В отличие от устойчивых по Ляпунову солитонов коллапс возникает в волновых системах с неограниченными гамильтонианами. Когда гамильтониан является неограниченным функционалом (снизу или сверху), коллапс волн, приводящий к образованию особенности, представляется наиболее вероятным сценарием поведения нелинейной волновой системы. В этом случае коллапс подобен процессу падения частицы в самосогласованном потенциале (см., например, [6, 4, 5]).

Основная цель настоящей статьи — дать краткий обзор результатов, полученных при изучении коллапса звуковых волн в средах со слабой положительной дисперсией. Такой коллапс можно описать в рамках уравнения Кадомцева–Петвиашвили (КП) [1, 2]. Как известно (см., например, [7]), волны акустического типа в жидком гелии He^4 при температурах ниже лямбда-точки для некоторой области давлений имеют положительную дисперсию. Положительной дисперсией обладает также спектр Боголюбова для волн малой амплитуды в газовых бозе-эйнштейновских конденсатах с отталкиванием между атомами в рамках уравнения Гросса–Питаевского [8, 9]. В сильно замагниченной плазме с $\beta = 8\pi r/B^2 \ll 1$ быстрые магнитоакустические волны представляют собой другой пример волн акустического типа с положительной дисперсией, реализующийся практически для всех углов распространения (см. [4], где этот вопрос подробно обсуждается).

Уравнение КП, как известно, представляет собой многомерное обобщение уравнения КДВ. Напомним, что уравнение КДВ для акустических волн со слабой дисперсией может быть выведено исходя из систем гидродинамического типа с помощью многомасштабного разложения (см., например, [10]). Дисперсия разного типа (положительная или отрицательная) для уравнения КДВ проявляется в том, что для солитонов КДВ знак отклонения плотности от среднего значения противоположен знаку дисперсии. При положительной дисперсии это ямы плотно-

сти, которые распространяются со скоростью, меньшей скорости звука c_s . Ситуация для отрицательной дисперсии обратная: солитоны представляют собой горбы плотности, движущиеся со скоростью, большей c_s (в частности, для гравитационных волн в пределе мелкой воды такие солитоны представляют собой движущиеся с постоянной скоростью возвышения водной поверхности). Именно это физическое свойство — корреляция между отклонением плотности от равновесной и знаком дисперсии — является ключевым моментом для понимания происхождения неустойчивости КП одномерных солитонов по отношению к поперечным возмущениям [1]. Солитоны в средах с отрицательной дисперсией оказываются устойчивыми, а при положительной дисперсии — неустойчивыми. Как было указано Кадомцевым [2], эта неустойчивость имеет самофокусирующую природу.

Уравнение КП учитывает не только дисперсию, но и дифракцию звуковых пучков в направлении, поперечном к их распространению. Уравнение КП может быть получено по той же схеме, что и уравнение КДВ, с учетом нелинейной перенормировки скорости звука, линейной дисперсии и дифракции; все эти факторы считаются слабыми по сравнению с основным распространением (скажем, вдоль x) акустических пучков со средней скоростью звука c_s и по этой причине они могут быть учтены пертурбативно. Очевидно, что распространение пучка со скоростью c_s можно исключить с помощью преобразования Галилея. Остальные малые члены, однако, могут быть одного порядка. Гамильтонова структура уравнения КП с учетом дифракционного члена остается такой же, как и в случае уравнения КДВ. Гамильтониан \mathcal{H} уравнения КП из-за дифракции получает дополнительный квадратичный вклад. В случае положительной дисперсии квадратичная часть \mathcal{H} оказывается положительно определенной (в случае отрицательной дисперсии квадратичный вклад не является знакоопределенным). Как и уравнение КДВ, уравнение КП кроме \mathcal{H} сохраняет x -проекцию импульса P , которая является положительно определенной величиной. Динамика звуковых волн с положительной дисперсией, описываемая уравнением КП, существенно зависит от размерности пространства d .

Как было показано в работе [11], двумерное уравнение КП принадлежит к интегрируемым моделям, обладающим представлением Лакса, что дает возможность эффективно исследовать эту модель с помощью метода обратной задачи рассеяния. Применение этого подхода позволило аналитически найти

локализованное двумерное солитонное решение, так называемый ламп [12]. Отметим, что впервые такие решения были обнаружены численно Петвиашвили [13]. В виде солитона ламп,двигающийся вдоль оси x с постоянной скоростью, представляет собой стационарную точку гамильтониана при фиксированном импульсе P . Как было показано [14], при фиксированном P гамильтониан оказывается ограниченным снизу функционалом, достигая своего минимума, соответствующего солитонному решению. По этой причине двумерное солитонное решение — ламп — оказывается устойчивым по Ляпунову при $d = 2$.

Однако в трехмерной геометрии ситуация кардинально меняется: гамильтониан КП оказывается неограниченным снизу функционалом (см. [14, 3, 4]), что легко проверяется путем применения двух независимых масштабных преобразований вдоль оси x и в поперечной плоскости, для каждого из которых P остается инвариантным. Именно это свойство стало отправной точкой для проведения численных экспериментов по наблюдению коллапса [3] (см. также [4]).

Результаты этих численных экспериментов показали тенденцию к формированию сингулярности за конечное время. В этих расчетах было изучено влияние излучения волн малой амплитуды на процесс схлопывания. Было показано, что излучение способствует коллапсу, приводящему к образованию особенностей слабого типа, когда волновая энергия, захваченная в особенность, формально стремится к нулю, но в действительности из-за малой диссипации оказывается конечной, но достаточно малой величиной. Как было показано в [4], для сильно замагниченной плазмы коллапс быстрых магнито-звуковых волн играет весьма существенную роль в динамике косых (относительно среднего магнитного поля) ударных волн, определяя тонкую структуру фронта и его ширину. Коллапс в этом случае представляет собой эффективный механизм передачи энергии волн ионам.

Необходимо отметить, что примерно в то же время, когда проводились численные эксперименты по наблюдению коллапса звуковых волн, т. е. около 1985 г., в рамках нелинейного уравнения Шредингера (НУШ) разрабатывалась трехмерная квазиклассическая теория волнового коллапса [6]. В рамках этой теории дана классификация волновых коллапсов, начиная с сильного коллапса, когда захваченная в особенность энергия конечна, и заканчивая слабыми коллапсами. В [6] (см. также обзор [5]) было установлено, что решение в виде сильного кол-

лапса для трехмерного НУШ соответствует квазиклассическому сжатию волнового пакета как целого. Кроме того, было указано на существование целого семейства квазиклассических слабых коллапсов. Верхняя граница этого семейства совпадает с автомодельным решением НУШ, которое описывает наиболее быстрый процесс формирования особенности в режиме слабого коллапса.

В настоящем обзоре представлена квазиклассическая теория акустического коллапса на основе работы [15]. Такого рода описание коллапсов применительно к звуковым волнам с положительной дисперсией имеет ряд особенностей, связанных с нелинейностью гидродинамического типа, отличной от той, которая есть в НУШ. Несмотря на это, удается развить вариационный подход для трехмерного уравнения КП. Как известно, такой подход может претендовать лишь на некоторое качественное описание коллапса. Важно отметить, что решение в рамках вариационного подхода к НУШ дало ту же автомодельность, что и точное квазиклассическое решение, найденное в [6]. Такое же поведение прослеживается и относительно акустического коллапса в квазиклассическом пределе. Для трехмерного уравнения КП, как и для трехмерного НУШ, находятся автомодельности для целого семейства квазиклассических коллапсирующих распределений.

Следует отметить, что в рамках трехмерного уравнения КП можно увидеть много общего в задаче о коллапсе в уравнении КДВ со степенной нелинейностью ($\sim u^{p-2}u_x$), другом примере системы с гидродинамической нелинейностью [16]. Это уравнение демонстрирует критическое поведение при степени $p = 6$. При меньшем значении p гамильтониан оказывается ограниченным снизу при фиксированном импульсе P . В этом случае солитоны реализуют минимум \mathcal{H} и, соответственно, устойчивы по Ляпунову [17] (см. также [5]). При $p \geq 6$ гамильтониан становится неограниченным функционалом, и поэтому в таком случае возникает коллапс, что численно наблюдалось в [16]. Отметим, что для коллапса в уравнении КДВ со степенной нелинейностью так же, как и для трехмерного уравнения КП, находятся автомодельности для целого семейства квазиклассических коллапсирующих распределений, имеется соответствие между квазиклассическим автомодельным решением и предсказаниями вариационного подхода.

Статья организована следующим образом. В разд. 2 обсуждаются общие свойства уравнения КП для сред с положительной дисперсией. Вначале в качестве примера приводится вывод уравнения КП с

помощью дефокусирующего НУШ на основе применения многомасштабного разложения (об этом методе см., например, [10]). В этом случае одномерный солитон (солитонное решение уравнения КДВ) представляет собой яму плотности, распространяющуюся со скоростью, меньшей средней скорости звука. Именно это свойство является ключевым в понимании природы неустойчивости КП [1, 2]. Далее мы обсуждаем гамильтонову структуру уравнения КП и общие свойства солитонов как стационарных точек гамильтониана при фиксированном импульсе P . Найдено, как значение гамильтониана на солитонных решениях при произвольной размерности d выражается через импульс солитонов. Эти соотношения получаются с помощью масштабных преобразований, сохраняющих P . Раздел 3 посвящен неустойчивости КП солитонов относительно длинноволновых поперечных возмущений. Вначале рассмотрена задача об устойчивости одномерных (КДВ) солитонов, ключевая по нашему мнению, с помощью метода, предложенного в работе [14]. Далее этот подход используется при анализе неустойчивости двумерных солитонов КП относительно трехмерных возмущений (аналог трехмерной неустойчивости КП). На основе этого метода была предсказана неустойчивость типа КП для серых/темных солитонов в рамках дефокусирующего НУШ [18]. Факт существования этой неустойчивости был подтвержден экспериментально, а также численно в работах [19, 20] при стационарном распространении электромагнитных волн в дефокусирующих керровских средах. В этих работах было выяснено, что нелинейная стадия этой неустойчивости приводит к образованию периодической цепочки точечных вихрей (см. также [21]).

В этом же разделе рассмотрена задача об устойчивости двумерных солитонов для дефокусирующего НУШ. Солитоны такого типа имеют ряд особенностей. Когда глубина ям плотности солитона достаточно мала, такие солитоны асимптотически совпадают с лампами. С увеличением глубины в солитоне и соответственно уменьшением его скорости V , как было впервые численно показано в [22], существует некоторое критическое значение V_{cr} , при котором плотность в центре солитона обращается в нуль. Ниже этого критического значения солитонное решение претерпевает бифуркацию, связанную с появлением двух нулей в плотности, соответствующих двум вихрям с противоположными циркуляциями. Это дипольная пара, распространяющаяся в направлении, перпендикулярном диполю. При дальнейшем уменьшении скорости солитонов эта пара

превращается в вихревую пару для двумерной гидродинамики Эйлера. Как показано в [23], все это семейство двумерных солитонов неустойчиво относительно поперечных возмущений (вдоль третьей оси z). Для малой амплитуды солитона эта неустойчивость представляет собой аналог неустойчивости КП для лампы; для солитонов, распространяющихся со скоростями меньше критической, эта неустойчивость переходит в неустойчивость Кроу, которая впервые была открыта для дипольной вихревой пары в рамках несжимаемых уравнений Эйлера [24].

В разд. 4 рассматривается вопрос о коллапсе для трехмерного уравнения КП. Показана неограниченность гамильтониана \mathcal{H} снизу, следующая из скейлинговых преобразований, сохраняющих P . Вследствие неограниченности гамильтониана излучение волн малой амплитуды из области с отрицательным значением \mathcal{H} способствует коллапсу, благодаря чему происходит формирование особенностей слабого типа. Далее представлены два аналитических подхода исследования коллапса: с помощью вариационного метода и квазиклассического приближения. Выяснено, что решение квазиклассических уравнений Уизема для сильного коллапса и анзац в рамках вариационного подхода имеют вблизи особенности одинаковую автомодельную асимптотику. В рамках квазиклассического описания найдено семейство автомодельных коллапсов. Верхняя граница этого семейства соответствует сильному коллапсу, при котором энергия, захваченная в особенность, конечна. Существование такого режима подтверждается также исходя из вариационного подхода. Другая граница коллапсирующей иерархии совпадает с автомодельным решением трехмерного уравнения КП, описывающим наиболее быстрый слабый коллапс.

В Заключении перечислены основные результаты данного обзора и обсуждены проблемы, которые остаются до сих пор нерешенными. Среди этих проблем важная относится к нахождению достаточного условия коллапса. Напомним, что для фокусирующего НУШ впервые такой критерий был получен в двумерном случае Власовым, Петрицевым и Талановым [25], а затем обобщен Захаровым на трехмерное НУШ [26]. Как для $d = 2$, так и для $d = 3$ достаточным условием коллапса является отрицательность гамильтониана \mathcal{H} .

2. ОБЩИЕ СВОЙСТВА УРАВНЕНИЯ КАДОМЦЕВА – ПЕТВИАШВИЛИ И СОЛИТОННЫЕ РЕШЕНИЯ

Рассмотрим вначале общие свойства уравнения КП с положительной дисперсией, часто называемого уравнением КП-I. Прежде всего покажем, как это уравнение выводится исходя из уравнения движения для сред с гидродинамической нелинейностью. В качестве примера рассмотрим дефокусирующее нелинейное уравнение Шредингера:

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{1}{2} \Delta \psi + (1 - |\psi|^2) \psi = 0. \quad (1)$$

Это уравнение записано в безразмерном виде. Применительно к газовым бозе-эйнштейновским конденсатам (БЭК) при температуре $T \rightarrow 0$ величина ψ имеет смысл волновой функции конденсата (в этом контексте уравнение (1) называется уравнением Гросса – Питаевского), $|\psi|^2$ представляет собой плотность конденсата n . В нелинейной оптике ψ — огибающая волнового пакета электрического поля в средах с дефокусирующей керровской нелинейностью.

Будем предполагать, что волновая функция стремится к 1 при $r \rightarrow \infty$, а соответственно плотность $n \rightarrow 1$. В этом случае, как хорошо известно, волны малой амплитуды имеют закон дисперсии

$$\omega = k \sqrt{1 + k^2/4}, \quad (2)$$

это так называемый спектр Боголюбова. При $k \rightarrow 0$ этот спектр преобразуется в закон дисперсии акустического типа с положительной дисперсией

$$\omega = k(1 + k^2/8 + \dots), \quad (3)$$

где скорость звука $c_s = 1$. Чтобы вывести отсюда уравнение КП из (1), рассмотрим пучок звуковых волн малой (но конечной) амплитуды, распространяющийся в основном в одном направлении (скажем, вдоль x) с малым угловым распределением ($k_{\perp}/k_x \ll 1$). Последнее означает, что для таких волновых пучков дисперсионное соотношение (3) записывается в виде

$$\omega = k_x \left[1 + \frac{k_x^2}{8} + \frac{1}{2} \left(\frac{k_{\perp}}{k_x} \right)^2 \right]. \quad (4)$$

В этом случае первый член в скобке может быть исключен с помощью галилеевского преобразования в систему координат,двигающуюся со скоростью звука вдоль оси x , так что (4) имеет стандартный для КП вид закона дисперсии:

$$\Omega = k_x \left[k_x^2/8 + \frac{1}{2} (k_{\perp}/k_x)^2 \right]. \quad (5)$$

Данный закон дисперсии учитывает как слабую положительную дисперсию, так и дифракцию в поперечном направлении. Оба эти члена в (5) становятся одного порядка, если $k_x^4 \propto k_{\perp}^2$. Именно это простое наблюдение является одним из ключевых при выводе уравнения КП.

Для вывода уравнения КП перепишем НУШ в виде системы гидродинамического типа для плотности n и фазы φ ($\psi = \sqrt{n} e^{i\varphi}$):

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} + \nabla(n \nabla \varphi) &= 0, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 + n - 1 &= \frac{\Delta \sqrt{n}}{2\sqrt{n}}. \end{aligned}$$

Далее к этой системе будем применять многомасштабное разложение, следуя работе [10] (см. также [18]).

Введем медленное время и медленные координаты,

$$t' = \varepsilon^3 t, \quad x' = \varepsilon(x - t), \quad r'_{\perp} = \varepsilon^2 r_{\perp},$$

и будем искать решение этой системы в виде ряда по степеням малого параметра ε ,

$$n = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^{2k} n_k(x', r'_{\perp}, t').$$

Первые два порядка легко находятся (см., например, [10, 18]). Уравнение КП-I получается в рамках этой теории возмущений как условие разрешимости третьего порядка ($\sim \varepsilon^3$):

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(n_{1t} + \frac{3}{2} n_1 n_{1x} - \frac{1}{8} n_{1xxx} \right) = -\frac{1}{2} \Delta_{\perp} n_1, \quad (6)$$

где $\Delta_{\perp} = \partial_y^2 + \partial_z^2$ — поперечный оператор Лапласа (штрихи ниже опущены).

Как известно, уравнение КП (6) представляет собой многомерное обобщение одномерного уравнения КДВ ($\Delta_{\perp} = 0$). В последнем случае солитонное решение имеет вид

$$n_1 = -\frac{\nu^2}{\text{ch}^2 \nu(x + \nu^2 t/2 - x_0)}, \quad (7)$$

оно представляет собой ямки плотности ($n_1 < 0$),двигающиеся со скоростью $c_s - \nu^2/2$, меньшей скорости звука. Отметим, что это условие имеет место также и для многомерных солитонов. Это требование эквивалентно отсутствию черенковского резонанса между солитоном и линейными волнами (см., например, [27]). Таким образом, в одномерном случае скорость солитона уменьшается с увеличением амплитуды солитона. Это свойство является

ключевым для понимания происхождения неустойчивости КП [1] относительно возмущений, поперечных солитону КДВ. Как показал Кадомцев [2], эта неустойчивость имеет самофокусирующий характер. Пусть солитон промодулирован в поперечном направлении. Тогда согласно (7) области солитона с большей амплитудой будут двигаться медленнее тех участков, которые имеют меньшую амплитуду. В результате области с меньшей амплитудой будут обгонять области с повышенной амплитудой, что приведет к фокусировке фронта солитона и аккумуляции его энергии. Легко понять, что эти аргументы применимы также на нелинейной стадии неустойчивости, т. е. на стадии формирования коллапса, описываемого в рамках трехмерного уравнения КП (7) (см. следующие разделы).

2.1. Гамильтонова структура и солитоны

Прежде чем обсуждать гамильтонову структуру уравнения КП, солитоны и их устойчивость, перепишем (6) в стандартной форме, которую можно получить с помощью простых замен и перемасштабированием:

$$\frac{\partial}{\partial x} (u_t + 6uu_x + u_{xxx}) = \Delta_{\perp} u. \quad (8)$$

В одномерном случае это уравнение принимает стандартный вид, принятый для уравнения КДВ. Как и уравнение КДВ, уравнение (8) относится к гамильтоновским уравнениям

$$u_t = \frac{\partial \delta \mathcal{H}}{\partial x \delta u}$$

с гамильтонианом

$$\mathcal{H} = \int \left[\frac{u_x^2}{2} + \frac{(\nabla_{\perp} w)^2}{2} - u^3 \right] dr \equiv \frac{1}{2} I_1 + \frac{1}{2} I_2 - I_3, \quad (9)$$

где $w_x = u$. Здесь первый член ответствен за дисперсию волн, второй учитывает дифракцию акустического пучка в поперечном направлении, последний член описывает нелинейность акустических волн. Помимо \mathcal{H} , уравнение КП сохраняет полный импульс, x -компонента которого является положительно определенной величиной,

$$P = \frac{1}{2} \int u^2 dr.$$

Уравнение КДВ отсюда следует при $w = 0$. В переменных u солитон КДВ (7) переписывается как

$$u_s = \frac{2\kappa^2}{\text{ch}^2 \kappa (x - 4\kappa^2 t - x_0)}. \quad (10)$$

Данное решение представляет собой стационарную точку гамильтониана \mathcal{H} при фиксированном P ,

$$\delta(\mathcal{H} + VP) = 0. \quad (11)$$

Эта вариационная задача эквивалентна стационарному уравнению КДВ

$$-Vu_x + 6uu_x + u_{xxx} = 0 \quad (12)$$

с решением (10) в виде солитона, движущегося со скоростью $V = 4\kappa^2$. В многомерном случае, а именно в рамках уравнения КП (8), солитонные решения, распространяющиеся вдоль оси x с постоянными скоростями V , также являются стационарными точками \mathcal{H} при фиксированном P . В двумерном случае это локализованные по всем направлениям так называемые решения в виде лампы со степенной асимптотикой при $r \rightarrow \infty$. Впервые такие решения были обнаружены численно Петвиашвили [13]. Затем в работе [12] лампы были найдены как точные решения уравнения КП на основе применения метода обратной задачи рассеяния.

В трехмерном случае солитоны такого типа могут быть найдены численно, возможно и аналитически, с привлечением схемы Хироты [28]. Представление Хироты, как было выяснено сравнительно недавно в ряде работ (см. [29, 30, 31, 32, 33, 34]), применимо к уравнению КП при произвольной размерности. Однако этот вопрос — вопрос об аналитическом нахождении солитонного решения в трехмерном случае — пока остается открытым.

Несмотря на это, для солитонов уравнения КП (8) при произвольной размерности пространства d можно установить ряд соотношений, в частности связь между значениями гамильтониана и импульса P на солитонном решении. Эти соотношения являются следствиями вариационной задачи (9), которая справедлива при произвольной размерности d . Впервые этот факт был установлен в работе [14] (см. также [3, 4]). Для этого требуется найти связи между интегралами, входящими в \mathcal{H} . Первое такое соотношение между интегралами получается, если уравнение для солитона

$$-Vu_x + 6uu_x + u_{xxx} = \Delta_{\perp} w$$

сначала умножить на w , а затем проинтегрировать по \mathbf{r} . Это дает

$$2VP + I_1 + I_2 - 3I_3 = 0. \quad (13)$$

Два других соотношения следуют из вариационной задачи (11) после применения масштабных преобразований, сохраняющих P ,

$$u(x, r_{\perp}) \rightarrow a^{-1/2} b^{(1-d)/2} u(x/a, r_{\perp}/b).$$

При этих преобразованиях \mathcal{H} становится функцией масштабных параметров a и b :

$$\mathcal{H}(a, b) = \frac{1}{2}a^{-2}I_1 + \frac{1}{2}a^2b^{-2}I_2 - a^{-1/2}b^{(1-d)/2}I_3. \quad (14)$$

В соответствии с вариационной задачей (12) на солитонном решении производные от $\mathcal{H}(a, b)$ относительно a, b должны обратиться в нуль при $a = b = 1$, что приводит к двум дополнительным соотношениям:

$$-I_1 + I_2 + \frac{1}{2}I_3 = 0, \quad (15)$$

$$-I_2 - \frac{1-d}{2}I_3 = 0. \quad (16)$$

Выражая далее I_1, I_2 и I_3 из соотношений (13), (15), (16) через P_s на солитонном решении, для \mathcal{H}_s находим

$$\mathcal{H}_s = \frac{2d-5}{7-2d}VP_s.$$

В одномерном и двумерном случаях гамильтониан на солитонном решении отрицателен, равный соответственно $-(3/5)VP_s$ и $-(1/3)VP_s$. Более того, в обоих случаях гамильтониан оказывается ограниченным снизу при фиксированном P [14] (см. также [5]) не только относительно масштабных преобразований, но и относительно возмущений общего вида. При этом \mathcal{H} достигает своего минимума на солитонном решении в одномерном и двумерном случаях. Это означает, что солитоны при $d = 1$ и 2 устойчивы по Ляпунову. В трехмерном случае ситуация обратная: гамильтониан на солитоне $\mathcal{H}_s = VP_s$ положителен, а соответствующая стационарная точка представляет собой седло (по этой причине трехмерный солитон неустойчив, см. разд. 4) и, кроме того, \mathcal{H} оказывается неограниченным снизу функционалом. Чтобы проверить последнее, достаточно рассмотреть линии наискорейшего спуска функции $\mathcal{H}(a, b)$ $a^2/b = \text{const}$. Неограниченный характер гамильтониана, обусловленный нелинейным членом, приводит к тому, что его роль с уменьшением масштабов a, b становится доминирующей по сравнению как с дисперсионным, так и с дифракционным членами, при этом $\mathcal{H} \rightarrow -\infty$. Как мы увидим в следующих разделах, неограниченность гамильтониана снизу играет весьма существенную роль в формировании сингулярности, т. е. при коллапсе.

3. НЕУСТОЙЧИВОСТЬ КАДОМЦЕВА – ПЕТВИАШВИЛИ

Неустойчивость КП для солитонов КДВ была впервые получена Кадомцевым и Петвиашвили [1, 2]

в длинноволновом пределе. Здесь мы применим метод, несколько отличающийся от того, который использовали Кадомцев и Петвиашвили. Будет показано, как можно исследовать КП-неустойчивость одномерного солитона в длинноволновом пределе с помощью теории возмущений, следуя [14] (см. также [35, 36]). Отметим, что изначально этот метод был применен при исследовании устойчивости двумерных солитонов по отношению к трехмерным возмущениям. Позже он успешно использовался для задач устойчивости одномерных темных/серых солитонов относительно поперечных возмущений в рамках дефокусирующего НУШ [18], а также двумерных солитонов относительно трехмерных возмущений [23]. Впоследствии этот подход показал свою эффективность при исследовании устойчивости одномерных солитонов, распространяющихся в пограничном слое [37], в рамках уравнения Шриры [38] (двумерное обобщение уравнения Бенджамина – Оно).

3.1. Неустойчивость солитонов Кортевега – де Вриза

Начнем наш анализ с устойчивости одномерных солитонов.

Решение в уравнении КП (8) будем искать в виде

$$u = u_s(x - Vt) + \psi(x - Vt, r_\perp, t),$$

где ψ предполагается малым возмущением по сравнению с солитоном КДВ u_s (10).

Переходя далее в систему координат, двигающуюся со скоростью V , и линеаризуя уравнение (8) на фоне u_s , для возмущения

$$\psi(x, r_\perp, t) = \varphi(x) \exp(-i\omega t + ikr_\perp)$$

приходим к следующей спектральной задаче:

$$-i\omega \frac{\partial}{\partial x} \varphi + k^2 \varphi = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(-V + 6u_s + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \varphi \equiv L\varphi.$$

Ищем решение этого уравнения в длинноволновом пределе, разлагая φ и ω в ряды по малому k :

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + \dots, \\ \omega &= \omega_1 + \omega_2 + \dots \end{aligned}$$

В главном порядке

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(-V + 6u_s + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \varphi_0 \equiv L\varphi_0 = 0.$$

Сравнивая с (12), легко увидеть, что это уравнение выполняется для $\varphi_0 = \partial u_s / \partial x$. Эта нейтрально

устойчивая мода соответствует малому сдвигу солитона как целого.

В следующем порядке имеем

$$-i\omega_1 \frac{\partial}{\partial x} \varphi_0 = L\varphi_1.$$

Чтобы найти φ_1 , рассмотрим уравнение (12), производная по V которого записывается в виде

$$-\frac{\partial u_s}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(-V + 6u_s + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \frac{\partial u_s}{\partial V}.$$

Отсюда из сравнения двух последних уравнений заключаем, что

$$\varphi_1 = i\omega_1 \frac{\partial u_s}{\partial V}.$$

В результате второй порядок записывается как

$$-i\omega_1 \frac{\partial}{\partial x} \varphi_1 + k^2 \varphi_0 = L\varphi_2. \quad (17)$$

Условие разрешимости этого уравнения (для φ_2) состоит в ортогональности левой части этого уравнения собственной функции χ с нулевым собственным значением оператора, сопряженного к L ,

$$\left(-V + 6u_s + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \chi = 0.$$

Легко видеть, что

$$\frac{\partial}{\partial x} \chi = u_s,$$

т. е. χ есть гидродинамический потенциал w_s солитона. Отсюда, подставляя

$$\varphi_0 = \frac{\partial}{\partial x} u_s, \quad \varphi_1 = i\omega_1 \frac{\partial u_s}{\partial V}$$

в (17) и затем скалярно умножая на χ , получаем

$$\omega_1^2 \int \chi \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u_s}{\partial V} dx + k^2 \int \chi \frac{\partial}{\partial x} u_s = 0.$$

Интегрирование по частям в стоящих здесь двух интегралах дает

$$\omega^2 = -k^2 \frac{2P}{\partial P / \partial V}.$$

Для солитона КДВ импульс $P \propto V^{3/2}$, откуда окончательно имеем

$$\omega^2 = -\frac{4V}{3} k^2 < 0. \quad (18)$$

Таким образом, мы приходим к неустойчивости. Это и есть неустойчивость Кадомцева–Петвиашвили.

Следует отметить, что точное выражение для инкремента этой неустойчивости было найдено Захаровым [40] с помощью метода обратной задачи рассеяния (МОЗР), примененного к уравнению КП (8).

Причина этой неустойчивости, как объяснил Кадомцев в своей книге [2], связана с тем, что солитоны звуковых волн с положительной дисперсией представляют собой ямы плотности, скорость которых уменьшается с увеличением амплитуды солитона (см., например, уравнение (7)). Как следствие, если такой солитон модулируется в поперечном направлении, то области с большей амплитудой будут отставать от областей с меньшей амплитудой. Это приводит к неустойчивости самофокусировочного типа, развитие которой ведет к фокусировке фронта солитона и аккумуляции волновой энергии.

Эти аргументы справедливы для всех упомянутых выше неустойчивостей типа КП, а именно, неустойчивостей одномерных темных/серых солитонов в рамках дефокусирующего НУШ относительно поперечных возмущений [18], двумерных солитонов на фоне трехмерных возмущений [23], а также для одномерных солитонов, распространяющихся в пограничном слое [37], в рамках так называемого уравнения Шриры [38]. Поскольку неустойчивость КП относится к самофокусировочному типу, такая аргументация может быть использована и на нелинейной стадии этой неустойчивости в рамках трехмерного уравнения КП с положительной дисперсией. Следует отметить, что в двумерном случае наличие устойчивых двумерных солитонов — лампов — существенно влияет на развитие неустойчивости КП. Как показано в [39], неустойчивость на нелинейной стадии приводит к отщеплению от солитона цепочки лампов, которые, в свою очередь, также испытывают неустойчивость относительно поперечных возмущений.

3.2. Неустойчивость двумерных КП солитонов

Рассмотрим теперь, следуя [14], задачу о линейной устойчивости лампа относительно возмущений по третьей координате z . Решение в виде лампа $u = u_s(x - Vt, y)$, распространяющегося со скоростью V вдоль оси x , удовлетворяет стационарному уравнению КП,

$$\left[-V \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^4}{\partial x^4} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] u_s + 3 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_s^2 = 0. \quad (19)$$

Как отмечалось выше, двумерное солитонное решение этого уравнения впервые численно было полу-

чено Петвиашвили [13]. Позднее точное решение в виде лампа было найдено в [12] с помощью метода обратной задачи рассеяния.

Для решения линейной задачи устойчивости лампа будем считать возмущение малым, зависящим от времени и координаты z экспоненциально:

$$\psi = \psi(x - Vt, y) \exp(-i\omega t + ikz).$$

Тогда линеаризация (8) на фоне стационарного решения уравнения (8) приводит к следующей спектральной задаче:

$$A\psi - i\omega \frac{\partial \psi}{\partial x} = -k^2 \psi, \quad (20)$$

где оператор

$$A = \frac{\partial^2}{\partial x^2} [-V + 6u_s] + \frac{\partial^4}{\partial x^4} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \quad (21)$$

Как и в предыдущем примере, решение этой задачи на собственные значения будем искать в длинноволновом пределе, $k \rightarrow 0$, в виде ряда

$$\psi = \psi_0 + \psi_1 + \psi_2 + \dots$$

Здесь ψ_0 определяется из уравнения

$$A\psi_0 = 0,$$

т. е. ψ_0 есть нейтрально устойчивая мода, которую можно представить как суперпозицию двух бесконечно малых сдвигов солитона как целого вдоль направлений x и y ,

$$\psi_0 = C_1 \frac{\partial u_s}{\partial x} + C_2 \frac{\partial u_s}{\partial y}.$$

Оба сдвига, очевидно, независимые и могут быть рассмотрены по отдельности.

В следующем порядке для первой моды имеем

$$A\psi_{01} - i\omega \frac{\partial}{\partial x} u_{sx} = 0.$$

Как и в одномерном случае, дифференцирование стационарного уравнения (19) по V позволяет найти ψ_{11} :

$$\psi_{11} = i\omega \frac{\partial u_s}{\partial V}.$$

Следующий порядок записывается как

$$A\psi_2 = -\omega^2 \frac{\partial^2 u_s}{\partial x \partial V} - k^2 \frac{\partial u_s}{\partial x}.$$

Чтобы найти $\omega(k)$ из этого уравнения, нужно воспользоваться условием разрешимости — ортогональностью правой части этого уравнения к собственной функции ϕ_0 с нулевым собственным значением для оператора, сопряженного к A . Легко найти, что $\phi_0 = w_s$. Отсюда имеем

$$\omega^2 \int w_s \frac{\partial^2 u_s}{\partial x \partial V} dx dy = -k^2 \int w_s \frac{\partial u_s}{\partial x} dx dy.$$

Интегрирование по частям дает

$$\omega^2 \frac{\partial P}{\partial V} = -2k^2 P.$$

Для решения в виде лампа $P \sim V^{1/2}$. В результате мы получаем неустойчивость:

$$\omega^2 = -4k^2 V < 0.$$

Для нейтрально устойчивой моды $\partial u_s / \partial y$ такого рода процедура приводит к устойчивости.

3.3. Неустойчивость Кадомцева – Петвиашвили серых/темных солитонов

Для НУШ (1) решение в виде серого/темного солитона $\psi_0(x - \kappa t)$ находится в виде уединенной одномерной волны, двигающейся со скоростью κ . В этом случае $\psi_0(x - \kappa t)$ удовлетворяет следующему обыкновенному дифференциальному уравнению:

$$-i\kappa \frac{\partial \psi_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial x^2} + (1 - |\psi_0|^2) \psi_0 = 0, \quad (22)$$

$$|\psi_0|^2 \rightarrow 1 \text{ при } |x| \rightarrow \infty.$$

Его решение записывается как

$$\psi_0 = \nu \operatorname{th} \nu(x - \kappa t - x_0) + i\kappa, \quad \kappa^2 + \nu^2 = 1. \quad (23)$$

Когда $\kappa = 0$, это решение представляет собой темный солитон (или доменную стенку). Если $\kappa \neq 0$, мы имеем серые солитоны. Когда κ стремится к скорости звука (равной в наших переменных 1), эти решения трансформируются в солитоны КДВ (7).

Для решения задачи устойчивости таких солитонов будем следовать работе [18]. Предполагая малые возмущения $\phi_1 = \delta\psi$, $\phi_2 = \delta\psi^*$, распространяющиеся со скоростью κ и зависящие от времени и координаты y экспоненциально, $\propto \exp(-i\omega t +iky)$, приходим к следующей спектральной задаче для матричного дифференциального оператора:

$$\omega \sigma_3 u - \frac{1}{2} k^2 u + Lu = 0, \quad (24)$$

где

$$\sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

— матрица Паули,

$$u = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$$

и

$$L = -i\kappa\sigma_3 \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \begin{pmatrix} 2|\psi_0|^2 - 1 & \psi_0^2 \\ \psi_0^{*2} & 2|\psi_0|^2 - 1 \end{pmatrix}$$

— эрмитовский оператор.

Решение этой задачи на собственные значения будем искать, как и прежде, в длинноволновом пределе ($k \rightarrow 0$) в виде степенных рядов относительно k ,

$$u = u_0 + u_1 + u_2 + \dots, \quad \omega = \omega_1 + \omega_2 + \dots$$

Здесь u_0 — нейтрально устойчивая мода, $Lu_0 = 0$, соответствующая бесконечно малым сдвигам солитона как целое,

$$u_0 = \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_0^* \end{pmatrix}.$$

В следующем порядке имеем

$$\omega\sigma_3 u_0 + Lu_1 = 0.$$

Что касается u_1 , то оно находится с помощью того же трюка, который мы использовали в предыдущем разделе. Дифференцируя уравнение (22) по скорости κ , получаем

$$u_1 = i\omega \frac{\partial}{\partial \kappa} \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_0^* \end{pmatrix}. \quad (25)$$

Если подставить (23) в это выражение, то получится, что u_1 стремится к постоянному значению при $|x| \rightarrow \infty$. На первый взгляд поэтому кажется, что u_1 принадлежит непрерывному спектру и не может обеспечить неустойчивость, поскольку возмущения из непрерывного спектра, очевидно, устойчивы. На самом деле, как было продемонстрировано в [18], в этом случае необходимо учитывать более аккуратно асимптотическое поведение этой функции на бесконечности на основе точного линеаризованного уравнения (24) путем решения задачи сшивки асимптотик. Проведенный анализ [18] дает, что u_1 при $|x| \rightarrow \infty$ затухает экспоненциально с показателем $\sim k$

и по этой причине принадлежит связанному состоянию.

Второй порядок записывается как

$$\omega\sigma_3 u_1 - \frac{1}{2} k^2 u_0 = -Lu_2.$$

Разрешимость этого уравнения приводит к следующей зависимости $\omega(k)$:

$$\omega \langle u_0 | \sigma_3 | u_1 \rangle = \frac{k^2}{2} \langle u_0 | u_0 \rangle,$$

что дает неустойчивость

$$\omega^2 = -\frac{k^2 \nu^2}{3} < 0.$$

Отметим, что при малых $\nu^2 = 1 - \kappa^2 \ll 1$ инкремент этой неустойчивости совпадает с найденным для солитона КДВ (ср. с (18)). Данная неустойчивость представляет собой естественное продолжение неустойчивости КП для серых (темных) солитонов. В заключение этого раздела необходимо отметить, что неустойчивость темных солитонов была подтверждена экспериментально, а также численно [19, 20]. В этих работах, в частности, показано, что нелинейная стадия неустойчивости солитона приводит к образованию дорожки точечных вихрей, аналогичных вихревой дорожке фон Кармана в жидкостях.

3.4. Двумерные солитоны НУШ и их устойчивость

В заключение этого раздела рассмотрим двумерные солитоны НУШ в рамках уравнения (1). Эти солитоны имеют много общих свойств с решением в виде лампов.

Мы ограничимся рассмотрением только осесимметричных солитонов

$$\psi_0(x', y) = \psi_0(x', -y), \quad x' = x - Vt,$$

которые представляют собой стационарные точки гамильтониана \mathcal{H} при фиксированном полном импульсе P (очевидно, имеющим только одну ненулевую x -проекцию):

$$\delta(H - VP) = 0, \quad (26)$$

где

$$H = \frac{1}{2} \int [|\nabla\psi|^2 + (|\psi|^2 - 1)^2] dx dy, \quad (27)$$

$$P = \frac{i}{2} \int \left[\psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x} - \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} \right] dx dy. \quad (28)$$

Пусть ε есть энергия солитона — значение гамильтониана на солитонном решении, и P — его импульс. Тогда, согласно (26), скорость солитона V записывается через ε и P в следующем виде:

$$V = \frac{\partial \varepsilon}{\partial P}. \quad (29)$$

Вариационная задача (26) позволяет так же, как для лампов, выразить все интегралы в (27) на солитонном решении через ε и P (28).

Для этого выполним два независимых масштабных преобразования вдоль осей x и y :

$$\psi_0(x, y) \rightarrow \psi_0(ax, y), \quad \psi_0(x, y) \rightarrow \psi_0(x, by),$$

где a и b — скейлинговые параметры. Отсюда благодаря (26) легко получить два соотношения:

$$\frac{\partial}{\partial a}(H - VP)|_{a=1} = \frac{\partial}{\partial b}(H - VP)|_{b=1} = 0,$$

из которых следуют значения интегралов на солитонном решении:

$$\begin{aligned} \int \left| \frac{\partial \psi}{\partial x} \right|^2 dx dy &= \varepsilon, \\ \int \left| \frac{\partial \psi}{\partial y} \right|^2 dx dy &= \varepsilon - VP, \\ \int (|\psi|^2 - 1)^2 dx dy &= VP. \end{aligned}$$

Сравнивая с (29), отсюда мы получаем неравенство

$$\frac{\varepsilon}{P} > \frac{\partial \varepsilon}{\partial P},$$

которое для линейных волн в соответствии со спектром Боголюбова (2) имеет противоположный знак,

$$\frac{\omega}{k} < \frac{\partial \omega}{\partial k}.$$

Отметим еще раз, что скорость солитона должна быть меньше минимальной фазовой скорости линейных волн, в нашем случае это скорость звука ($c_s = 1$). Напомним, что это требование эквивалентно отсутствию черенковского резонанса между солитоном и линейными волнами.

Легко видеть, что вариационная задача (26) сводится к нахождению решения стационарного уравнения для солитонов

$$-iV \frac{\partial \psi_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \nabla^2 \psi_0 + (1 - |\psi_0|^2) \psi_0 = 0. \quad (30)$$

Когда ямы плотности (интенсивности) малы, но $c_s - V > 0$, решение этого уравнения будет приближаться к двумерному солитону КП (лампу) и соответственно уравнение (30) переходит в стационарное уравнение КП (19). Отсюда сразу можно сделать вывод, что эти двумерные солитоны в пределе мелких ям будут подвержены КП-неустойчивости относительно модуляций вдоль направления z . Для большей амплитуды солитона данный вопрос требует дополнительного анализа.

Увеличение глубины этих ям и соответственно уменьшение скорости солитона V , как впервые было численно показано в работе [22], происходит вплоть до некоторого критического значения V_{cr} . Для этого значения скорости плотность в центре солитона обращается в нуль. Ниже этого критического значения солитонное решение претерпевает бифуркацию, связанную с появлением двух нулей плотности, соответствующих двум вихрям с противоположными циркуляциями. Это дипольная пара, распространяющаяся в направлении, перпендикулярном диполю. При дальнейшем увеличении скорости солитона эта пара нулей превращается в вихревую пару для двумерной гидродинамики Эйлера.

Покажем теперь, следуя [23], что все семейство двумерных солитонов неустойчиво по отношению к поперечным (относительно оси z) возмущениям. Очевидно, что при малой амплитуде солитона эта неустойчивость совпадает с КП-неустойчивостью лампы в полном согласии с результатами предыдущих разделов. Для солитонов, распространяющихся со скоростями ниже критической, эта неустойчивость с ростом расстояния между вихрями переходит в неустойчивость, открытую впервые Кроу для диполей двух точечных вихрей в случае идеальных несжимаемых жидкостей [24].

В длинноволновом пределе инкремент для всего семейства солитонных решений находится по той же схеме, что и выше. Для малых возмущений, распространяющихся со скоростью V , которые в этой системе отсчета зависят от z и t экспоненциально, $\sim \exp(-i\omega t + ikz)$, мы приходим к следующей задаче на собственные значения:

$$\omega \sigma_3 u - \frac{1}{2} k^2 u + Lu = 0, \quad (31)$$

где вместо второй производной по x в операторе L для спектральной задачи (24) стоит оператор Лапласа относительно x и y :

$$L = -ik\sigma_3 \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2} \Delta - \begin{pmatrix} 2|\psi_0|^2 - 1 & \psi_0^2 \\ \psi_0^{*2} & 2|\psi_0|^2 - 1 \end{pmatrix}.$$

В этом случае, как и раньше, ищем решение (31) в виде степенных рядов относительно малых k :

$$u = u_0 + u_1 + u_2 + \dots, \quad \omega = \omega_1 + \omega_2 + \dots$$

В нулевом приближении, $Lu_0 = 0$, мы имеем две безразлично устойчивых моды, соответствующих двум независимым малым сдвигам солитона,

$$u_0 = C_1 u_{01} + C_2 u_{02},$$

где

$$u_{01} = \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_0^* \end{pmatrix}, \quad u_{02} = \frac{\partial}{\partial y} \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_0^* \end{pmatrix},$$

C_1 и C_2 — константы.

Уравнение следующего порядка для первой моды, соответствующей малому сдвигу u_{01} ,

$$\omega \sigma_3 u_{01} + Lu_{11} = 0,$$

имеет решение, аналогичное (25),

$$u_1 = i\omega \frac{\partial}{\partial V} \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_0^* \end{pmatrix}.$$

Последующая процедура нахождения инкремента, аналогичная предыдущей, дает следующее выражение для ω^2 :

$$\omega^2 = \frac{\varepsilon}{\partial P / \partial V} k^2.$$

Как было показано аналитически в работе [23], производная $\partial P / \partial V$ отрицательна в двух предельных случаях: для лампы и для солитонов с малыми скоростями $V \ll c_s = 1$. В первом случае

$$\gamma^2 = 2(1 - V)k^2 > 0,$$

что совпадает с квадратом инкремента неустойчивости для лампы. Для малых скоростей $V \rightarrow 0$ расстояние L между вихрями растет пропорционально V^{-1} , а энергия $\varepsilon \approx 2\pi \log(1/V)$. Тогда из определения скорости (29) следует отрицательность искомой производной: $\partial P / \partial V = -2\pi V^{-2}$. В результате в этом пределе мы получаем неустойчивость с инкрементом γ , квадрат которого

$$\gamma^2 = 2(kV)^2 \log(1/V) > 0.$$

Этот инкремент совпадает с выражением для инкремента неустойчивости Кроу [24] для двух антипараллельных точечных вихрей для идеальных несжимаемых жидкостей.

В общем случае, согласно численным результатам [22], производная $\partial P / \partial V$ отрицательна для всего семейства двумерных солитонов.

Таким образом, две неустойчивости, т. е. неустойчивости КП и Кроу, в некотором смысле аналогичны друг другу. Неустойчивость КП при уменьшении скорости солитона переходит в неустойчивость Кроу, и поэтому эти неустойчивости следует объединить. Обе эти неустойчивости относятся к самофокусирующему типу.

В заключение этого раздела хотелось бы отметить, что неустойчивость типа КП может быть получена также для одномерных солитонов [37] в рамках так называемого уравнения Шриры [38], описывающего длинноволновые нелинейные возмущения в пограничном слое.

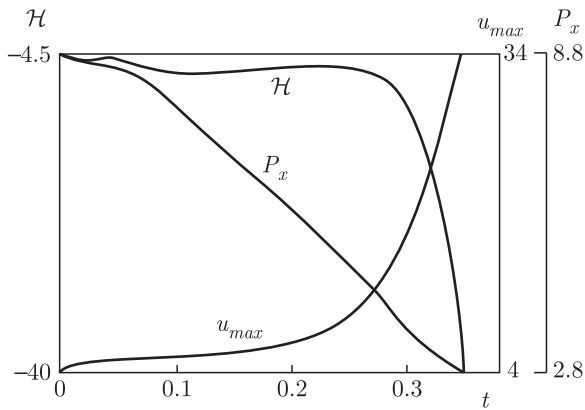
4. КОЛЛАПС

Как было показано в разд. 2, гамильтониан (9) для трехмерного уравнения КП с положительной дисперсией при фиксированном P представляет собой неограниченный снизу функционал, что следует из скейлинговых преобразований для $\mathcal{H}(a, b)$ (14). Неограниченность \mathcal{H} возникает на малых масштабах благодаря нелинейному члену. Хорошо известно (см., например, обзор [5]), что неограниченность гамильтониана для нелинейных волновых систем является одним из основных критериев возникновения коллапса. Коллапс в этом случае можно понимать как процесс падения частицы в самосогласованном неограниченном потенциале.

Обратим внимание на то, что при масштабных преобразованиях вдоль парабол $b \propto a^2$ первые два члена в (14) ведут себя как a^{-2} , а кубический член, ответственный за нелинейность, меняется пропорционально $a^{-5/2}$. По этой причине возможный коллапс не является критическим — он должен быть слабым, как мы увидим ниже, соответствует автомодельному коллапсу. В таких режимах излучение волн малой амплитуды из области коллапса способствует коллапсу, что опять-таки связано с неограниченностью \mathcal{H} .

Чтобы это показать, рассмотрим некоторую область Ω с отрицательным гамильтонианом, $\mathcal{H}_\Omega < 0$. Используя теорему о среднем значении, мы можем записать оценку для максимального значения $|u|_{max}$ в этой области:

$$\int_\Omega u^3 d\mathbf{r} \leq |u|_{max} \int_\Omega u^2 d\mathbf{r}.$$



Зависимости гамильтониана \mathcal{H} , P_x и максимальной амплитуды от времени

Используя это неравенство при выполнении условия $\mathcal{H}_\Omega < 0$, можно получить следующую оценку для $|u|_{max}$ [4]:

$$|u|_{max} \geq \frac{|\mathcal{H}_\Omega|}{2P_\Omega}. \quad (32)$$

Отсюда видно, что за счет излучения волн из этой области отношение в правой части этого неравенства со временем будет только расти. Во-первых, излученные волны уносят положительную часть гамильтониана, поскольку вдали от этой области они становятся линейными, для которых нелинейность стремится к нулю. Это приводит к уменьшению \mathcal{H}_Ω (т. е. гамильтониан становится более отрицательным из-за неограниченности \mathcal{H}) и, соответственно, увеличению $|\mathcal{H}_\Omega|$. Во-вторых, в то же время P_Ω как положительная величина уменьшается. Отсюда следует, что отношение в (32) растет, а значит, увеличивается $|u|_{max}$. Этот процесс, подобный испарению капель воды, приводит к формированию слабых сингулярностей, когда энергия захваченных в особенность звуковых волн E (с точностью до постоянного множителя совпадающая с P) формально в момент коллапса обращается в нуль.

Численный эксперимент [3, 4] по моделированию звукового коллапса полностью подтвердил, что излучение из области каверны способствует коллапсу. В этих численных экспериментах для цилиндрически-симметричных распределений ($P_\perp = 0$) ставились нулевые граничные условия для u по r и x , которые в силу нелокальности уравнения КП не сохраняют ни \mathcal{H} , ни P_x . Это позволило выяснить, как излучение из области коллапса влияет на изменения гамильтониана, импульса и максимального значения u .

На рисунке представлены зависимости гамильтониана \mathcal{H} и P_x , вычисленные по области интегрирования, и максимальной амплитуды от времени. Видно, что со временем происходит уменьшение импульса P_x и увеличение $|\mathcal{H}|$ при одновременном росте $\max_x u$, это как раз свидетельствует о том, что коллапс является слабым.

Таким образом, можно сказать, что излучение волн из области коллапса способствует коллапсу, ускоряет его, что приводит к образованию слабых особенностей.

4.1. Вариационный анзац

Все изложенные выше соображения, однако, не дают ответа на главный вопрос о конечности времени формирования особенности. Мы приведем некоторые аргументы в пользу конечности этого времени, используя так называемый вариационный метод. Следует отметить, что этот подход является достаточно грубым. Например, в задаче о релаксации солитонов в одномерном НУШ с фокусирующей нелинейностью, допускающим интегрирование методом обратной задач рассеяния, применение вариационного подхода дает неправильный ответ. Вместо колебаний солитона, предсказываемых при применении этого метода, точное решение дает затухающие со временем колебания релаксационного типа [41]. Однако в задаче коллапса для трехмерного НУШ оказалось, что применение вариационного подхода продемонстрировало качественно правильное поведение для описания режима сильного коллапса [6].

Как известно, действие для уравнения КП (8) может записываться как

$$S = \int \left[\frac{1}{2} w_t w_x - \frac{1}{2} w_{xx}^2 - \frac{1}{2} (\nabla_\perp w)^2 + w_x^3 \right] dt dr, \quad (33)$$

так что $\delta S = 0$ эквивалентно уравнению (8). Тестовую функцию выберем в автомодельном виде:

$$w = a^{1/2} b^{-1} f(\xi_\parallel, \xi_\perp), \quad u = a^{-1/2} b^{-1} U(\xi_\parallel, \xi_\perp), \quad (34)$$

где предполагается, что скейлинговые параметры a и b являются неизвестными функциями времени t , $\xi_\parallel = x/a$ и $\xi_\perp = r_\perp/b$ — автомодельные переменные. Функция $U(\xi_\parallel, \xi_\perp) = \partial f / \partial \xi_\parallel$ есть решение (8) для трехмерного солитона с известными значениями интегралов I_1 , I_2 и I_3 , определяемых (13), (15), (16):

$$I_1 = 6VP, \quad I_2 = I_3 = 4VP.$$

Подставляя тестовую функцию (34) в (33) и усредняя по пространственным переменным, получаем

следующее выражение для лагранжиана в переменных a и b :

$$L = a \frac{b_t}{b} M - \mathcal{H}(a, b).$$

Здесь константа

$$M = \frac{1}{2} \int f \xi_{\perp} \nabla_{\xi_{\perp}} U d^3 \xi,$$

а $\mathcal{H}(a, b)$ — уже известная функция, задаваемая (14) при $d = 3$, исходя из скейлинговых преобразований.

Для данного лагранжиана уравнения Эйлера–Лагранжа записываются в виде

$$M a_t = -b \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial b} = a^2 b^{-2} I_2 - a^{-1/2} b^{-1} I_3, \quad (35)$$

$$\begin{aligned} M b_t &= b \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial a} = \\ &= \beta \left[-a^{-3} I_1 + a b^{-2} I_2 + \frac{1}{2} a^{-3/2} b^{-1} I_3 \right]. \end{aligned} \quad (36)$$

Эти уравнения по построению имеют стационарное решение в виде трехмерного солитона при $a = b = 1$. Линейная устойчивость этого решения определяется из линеаризованных уравнений (35), (36) для малых возмущений α, β ($a = 1 + \alpha$, $b = 1 + \beta$):

$$\begin{aligned} M \alpha_t &= VP(10\alpha - 4\beta), \\ M \beta_t &= VP(19\alpha - 10\beta). \end{aligned}$$

Отсюда следует, независимо от знака M , неустойчивость этого решения с инкрементом

$$\gamma = \pm 2\sqrt{6} \frac{VP}{M}.$$

Собственный вектор неустойчивой моды имеет один и тот же знак для обоих компонентов α и β . Таким образом, солитонное решение представляет собой седловую точку.

Рассмотрим теперь, что происходит на нелинейной стадии этой неустойчивости. Как упоминалось выше, при фиксированном импульсе P гамильтониан трехмерного уравнения КП представляет собой неограниченный снизу функционал. В данном случае мы имеем дело с неограниченной снизу функцией $\mathcal{H}(a, b)$.

Ввиду гамильтоновости система (35), (36) сохраняет энергию $E = \mathcal{H}(a, b)$, что позволяет выразить b через a :

$$b^{-1} = \frac{1}{I_2 a^2} \left[a^{-1/2} I_3 \pm \sqrt{a^{-1} I_3^2 - I_1 I_2 + 2a^2 E I_2} \right],$$

и далее после исключения b определить зависимость $a(t)$ вблизи особенности для обеих корней. При $a \rightarrow 0$

$$b_1 = \frac{I_2}{2I_3} a^{5/2}, \quad b_2 = \frac{2I_3}{I_1} a^{3/2}.$$

Отсюда для первого корня имеем

$$M a_t = \frac{2I_3^2}{I_2 a^3}.$$

Это приводит к сингулярному решению

$$a \rightarrow (t_0 - t)^{1/4}, \quad (37)$$

если константа $M < 0$. В этом случае вблизи момента коллапса $t = t_0$ в $\mathcal{H}(a, b)$ дисперсионный и нелинейный члены компенсируют друг друга. Для положительных M решение с особенностью отсутствует.

Для другого корня $b = b_2$ при $a \rightarrow 0$ уравнение (35) асимптотически преобразуется к следующему:

$$M a_t = -\frac{I_1}{2a^2},$$

которое при $M > 0$ имеет решение коллапсирующего вида

$$a \rightarrow (t_0 - t)^{1/3}.$$

Для этой асимптотики нелинейный член в $\mathcal{H}(a, b)$ и дифракционный член сокращаются.

Ниже будет показано, что режим (37) реализуется для квазиклассических начальных условий.

4.2. Квазиклассический коллапс

Рассмотрим начальные распределения u , при которых можно пренебречь как дисперсией, так и дифракцией. Тогда, по крайней мере вначале, временное поведение u будет определяться уравнением

$$u_t + 6uu_x = 0,$$

где u зависит от \mathbf{r}_{\perp} как от параметра. Как известно, это уравнение описывает опрокидывание волны или градиентную катастрофу, возникающую в некоторой точке $r = r_0$. Вблизи точки опрокидывания наше предположение относительно дисперсии и дифракции становится несправедливым, и мы должны учитывать как дифракционные, так и дисперсионные члены. В результате за счет таких линейных эффектов вблизи этой точки будет развиваться осциллирующая пространственная структура. Напомним, что в одномерном случае такого рода структура имеет вид расплывающегося со временем солитонного пучка [42], характерного для бесстолкновительных ударных волн.

В трехмерном случае, как мы выяснили, все типы солитонов неустойчивы. Одномерные солитоны неустойчивы по отношению к поперечным модуляциям благодаря неустойчивости КП. То же утверждение верно для двумерных и трехмерных солитонов [14]. Нелинейной стадией этой неустойчивости должен быть коллапс. Это означает, что вместо цуга солитонов в одномерной геометрии следует ожидать образования осциллирующих структур, содержащих коллапсирующие солитоны.

Для описания структур такого типа нужно обратиться к квазиклассической теории. Решение в этом случае следует представлять в виде

$$u = u(r, t, \Phi(\mathbf{r}, t)),$$

где u как функция фазы Φ является 2π -периодической, а относительно двух первых аргументов r и t — медленно меняющейся функцией. Зависимость $\Phi(r, t)$ предполагается такой, что ее производные Φ_t и $\nabla\Phi$ являются также медленно меняющимися функциями от \mathbf{r} и t .

Вначале рассмотрим линейный случай, когда u подчиняется линейному уравнению КП:

$$\frac{\partial}{\partial x}(u_t + u_{xxx}) = \Delta_{\perp} u. \quad (38)$$

В этой ситуации можно ограничиться зависимостью в виде одной гармоники:

$$u = Ae^{i\Phi} + \text{c.c.}$$

Тогда первый порядок в квазиклассическом приближении дает уравнение Гамильтона–Якоби,

$$\Phi_t + \omega(\nabla\Phi) = 0, \quad (39)$$

где

$$\omega = \omega(k) = -k_x^3 - \frac{k_{\perp}^2}{k_x}$$

есть закон дисперсии (38), а $\mathbf{k} = \nabla\Phi$ — соответствующий волновой вектор.

В следующем порядке получаем уравнение непрерывности для A^2 (здесь для простоты амплитуда A предполагается действительной величиной),

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{1}{2A} \text{div}(A^2 \mathbf{v}) = 0, \quad (40)$$

где $\mathbf{v} = \partial\omega(\mathbf{k})/\partial\mathbf{k}$ — групповая скорость (ср. с [6, 43]).

Из-за нелинейности исходного уравнения (8) необходимо учитывать все гармоники,

$$u = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{in\Phi},$$

$$A_n = A_{-n} = A_n^*.$$

В результате вместо (40) и (39) для $n \neq 0$ получаем

$$\frac{\partial A_n}{\partial t} + \frac{1}{2A_n} \text{div}(A_n^2 \mathbf{v}_n) + 3 \frac{\partial}{\partial x} s_n = 0, \quad (41)$$

$$\Phi_{nt} + \omega(\nabla\Phi_n) + 3\Phi_{nx} \frac{s_n}{A_n} = 0, \quad (42)$$

где

$$\Phi_n = n\Phi, \quad s_n = \sum_{n=n_1+n_2} A_{n_1} A_{n_2}.$$

Для нулевой гармоники возникает отдельное уравнение,

$$\frac{\partial A_0}{\partial t} + 3 \frac{\partial}{\partial x} \langle u^2 \rangle = 0. \quad (43)$$

Здесь

$$\langle u^2 \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n^2 = s_0.$$

Следует отметить, что эта бесконечная система является переопределенной: из (41), (42) для каждых $n, m \neq 0$ следуют соотношения

$$\pi_n(r, t) = \pi_m(r, t), \quad (44)$$

где

$$\pi_n(r, t) = n^2 \Phi_x^2 - \frac{s_n}{A_n}.$$

На первый взгляд кажется, что эти уравнения весьма сложны и вряд ли могут быть проанализированы. В действительности данная система уравнений полностью эквивалентна уравнениям, которые следуют из процедуры Уизема [44, 42] для случая КДВ. Прежде всего, легко найти число независимых функций с учетом всех ограничений (44). Это всего лишь три функции, в качестве которых мы можем, например, выбрать $\langle u \rangle$, $\langle u^2 \rangle$ и Φ . Более того, условия (44) можно разрешить, если представить u с помощью эллиптической функции Вейерштрасса в виде кноидальной волны (см., например, [45]). В результате можно получить обычную форму уравнений Уизема. Однако, по нашему мнению, уравнения (41), (43) для исследования квазиклассического коллапса представляются более удобными, чем уравнения Уизема.

4.3. Иерархия коллапсов

Будем искать решение системы (41)–(43) в автомодельном виде:

$$A_n(r, t) = (t_0 - t)^{-\alpha} f_n \left(\frac{x}{(t_0 - t)^{\beta}}, \frac{r_{\perp}}{(t_0 - t)^{\gamma}} \right), \quad (45)$$

$$\Phi(r, t) = \lambda^2 \int \frac{dt}{(t_0 - t)^{\kappa+1}} + (t_0 - t)^{-\kappa} \varphi \left(\frac{x}{(t_0 - t)^\beta}, \frac{r_\perp}{(t_0 - t)^\gamma} \right), \quad (46)$$

где t_0 — время коллапса, константа $\lambda^2 > 0$, α, β, γ и κ — неизвестные показатели.

После подстановки (45), (46) в систему (41)–(43) легко найти, что только один показатель является свободным (скажем, пусть это будет α), в этом случае все остальные индексы выражаются через него:

$$\beta = 1 - \alpha, \quad \gamma = 1 - \alpha/2, \quad \kappa = 3\alpha/2 - 1.$$

Таким образом, мы имеем целое семейство автомодельных решений (более точно — автомодельных подстановок). Только некоторые из этих решений имеют физический смысл. Согласно (45), (46), продольный размер коллапсирующей области (каверны) и ее поперечный размер пропорциональны соответственно $(t_0 - t)^\beta$ и $(t_0 - t)^\gamma$. Физическое требование состоит в том, что полный импульс каверны P (фактически это энергия звуковых волн с точностью до постоянного множителя) во время коллапса благодаря излучению может только уменьшаться:

$$P_{cav} = \frac{1}{2} \int_{cav} u^2 d^3r \propto (t_0 - t)^{3-4\alpha},$$

т. е. $\alpha \leq 3/4$. Отсюда видно, что режиму сильного коллапса будет соответствовать $\alpha = 3/4$. Следует отметить, что автомодельность для данного типа коллапсов та же самая, что и для асимптотики (37) в случае вариационного анзаца. Это дает основание считать, что такой режим может существовать. Все остальные коллапсы являются слабыми.

Для автомодельного семейства (45), (46) нижняя граница определяется исходя из квазиклассического критерия. Последнее означает, что отношение между характерным периодом, $\sim \omega^{-1} = (\partial_t \Phi)^{-1}$, и характерным временем изменения амплитуды $\sim (t_0 - t)$, или отношение длины волны $k_x^{-1} = (\partial_x \Phi)^{-1}$ к характерному пространственному размеру амплитуды, должны быть большими ($\gg 1$). Оба эти отношения приводят к одному и тому же критерию:

$$\omega(t_0 - t) \propto (t_0 - t)^{1-3\alpha/2},$$

$$k_x(t_0 - t)^{1-\alpha} \propto (t_0 - t)^{1-3\alpha/2}.$$

Отсюда видно, что при $\alpha > 2/3$ критерий квазиклассичности улучшается по мере приближения к точке коллапса. Значение $\alpha = 2/3$ представляет собой

нижнюю границу этого семейства, где критерий квазиклассичности нарушается. Значение $\alpha = 2/3$ отвечает автомодельному решению трехмерного уравнения КП, описывающему наиболее быстрый слабый коллапс.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, мы продемонстрировали возможность коллапса звуковых волн в средах с положительной дисперсией на основе трехмерного уравнения Кадомцева–Петвиашвили. Этот процесс можно рассматривать как нелинейную стадию КП-неустойчивости солитонов КДВ в поперечном направлении. Эта неустойчивость имеет простое объяснение, данное впервые Кадомцевым [2]. Солитоны при положительной дисперсии представляют собой области с пониженной плотностью, скорость которых убывает с увеличением амплитуды солитона. По этой причине при модуляции солитона в поперечном направлении к его распространению области с пониженной амплитудой обгоняют области с большей амплитудой. В результате фронт солитона испытывает неустойчивость самофокусировочного типа, которая приводит к аккумуляции солитонного распределения. Этот факт является ключевым моментом для понимания природы неустойчивости КП. Важно, что характер неустойчивости сохраняется и на ее нелинейной стадии, которая в трехмерном случае ведет к коллапсу. При меньших размерностях, например в двумерном случае, солитон уравнения КП — ламп — реализует минимум гамильтониана при фиксированном импульсе P и по этой причине оказывается устойчивым по Ляпунову. В трехмерной геометрии солитоны представляют собой седловые точки гамильтониана и по этой причине оказываются неустойчивыми. Развитие этой неустойчивости приводит к коллапсу, одним из критериев которого является неограниченность гамильтониана \mathcal{H} снизу при фиксированном импульсе P . Коллапс в этом случае можно понимать как процесс падения частицы в самосогласованном неограниченном снизу потенциале. Благодаря неограниченности гамильтониана образование особенности оказывается возможным за счет излучения волн малой амплитуды из областей, имеющих отрицательные значения \mathcal{H} , что способствует коллапсу. При этом излучение способствует формированию слабого коллапса, когда захватываемая в особенность энергия волн (совпадающая с точностью до множителя

с L_2 -нормой) формально стремится к нулю по мере приближения к точке особенности. Показано, что при квазиклассическом описании коллапса звуковых волн с положительной дисперсией возможно целое семейство автомодельных коллапсирующих режимов, начиная с сильного, когда захваченная в сингулярность энергия конечна, вплоть до слабых коллапсов, сопровождаемых волновым излучением. Нижняя граница этого семейства соответствует автомодельному решению трехмерного уравнения КП, которое описывает наиболее быстрый из слабых коллапсов. Тенденция к уменьшению \mathcal{H} при коллапсе за счет излучения было впервые продемонстрировано в численном моделировании [3, 4]. В этих численных экспериментах было показано, что гамильтониан каверны становится со временем все более и более отрицательным, одновременно с этим значение P уменьшается, что способствует росту амплитуды в коллапсирующей области.

Несмотря на предсказания иерархии квазиклассических коллапсов, роли излучения в этих процессах и пр., в этой проблеме существует множество открытых вопросов. С нашей точки зрения, наиболее важным является вопрос относительно точного критерия коллапса для трехмерного уравнения КП (8), причем такого же уровня строгости, как и критерий Власова–Петрищева–Таланова для двумерного фокусирующего НУШ [25] или его обобщение для трехмерного случая, найденное Захаровым [26] (о других обобщениях см. [46]). Эти критерии дают достаточное условие возникновения коллапса для начальных распределений с отрицательным гамильтонианом. Следует особо отметить, что критерий для трехмерного уравнения КП, но с кубической нелинейностью фокусирующего типа, был получен в работе Турицына и Фальковича [47]. Согласно этой работе, достаточным условием для коллапса также является отрицательность гамильтониана.

Другой открытый вопрос касается построения аналитического решения для трехмерного уравнения КП. Напомним, что, как было показано в [11], двумерное уравнение КП допускает представление Лакса и соответственно применение метода обратной задачи рассеяния, использование которого показало большую эффективность в аналитических исследованиях двумерного уравнения КП. Достаточно здесь упомянуть работу [12], в которой было построено решение в виде лампа и исследована задача о рассеянии двумерных солитонов. Как известно, существует другой подход, так называемый метод Хироты [28], который позволяет строить некоторые аналитические решения для большо-

го числа интегрируемых моделей. Сравнительно недавно было продемонстрировано, что трехмерное уравнение КП также допускает представление Хироты [29, 30]. Однако до сих пор все построенные решения для трехмерного КП, основанные на этом подходе, оказываются только двумерными, см. также [31, 32, 33, 34]. Поэтому одна из главных задач — это задача построения точных трехмерных решений, имеющих физический смысл. Необходимо подчеркнуть, что, строго говоря, существование представления Хироты не гарантирует наличие представления Лакса.

Благодарности. Автор благодарит А. М. Камчатного и Ю. А. Степанянца за полезные обсуждения и замечания.

Финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 17-01-00622).

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. Б. Кадомцев, В. И. Петвиашвили, ДАН СССР **192**, 753 (1970) [Sov. Phys. Dokl. **15**, 539 (1970)].
2. Б. Б. Кадомцев, *Коллективные явления в плазме*, Физматгиз, Москва (1976).
3. Е. А. Кузнецов, С. Л. Мушер, А. В. Шафаренко, Письма ЖЭТФ **37**, 204 (1983) [JETP Lett. **37**, 241 (1983)].
4. Е. А. Кузнецов, С. Л. Мушер, ЖЭТФ **64**, 947 (1986) [Sov. Phys. JETP **64**, 947 (1986)].
5. В. Е. Захаров, Е. А. Кузнецов, УФН **182**, 569 (2012) [Phys. Usp. **55**, 535 (2012)].
6. В. Е. Захаров, Е. А. Кузнецов, ЖЭТФ **91**, 1310 (1986) [Sov. Phys. JETP **64**, 773 (1986)].
7. В. Л. Гуревич, *Кинетика фононных систем*, Наука, Москва (1980).
8. E. P. Gross, Nuovo Cim. **20**, 454 (1961).
9. Л. П. Питаевский, ЖЭТФ **40**, 646 (1961) [Sov. Phys. JETP **13**, 451 (1961)].
10. V. E. Zakharov and E. A. Kuznetsov, Physica D **8**, 455 (1986).
11. В. С. Дрюма, Письма в ЖЭТФ **19**, 753 (1974) [JETP Lett. **19**, 387 (1974)].
12. S. V. Manakov, V. E. Zakharov, L. A. Bordag, A. R. Its, and V. A. Matveev, Phys. Lett. A **63**, 205 (1977).

13. В. И. Петвиашвили, *Физика плазмы* **2**, 469 (1976) [Sov. J. Plasma Phys. **2**, 257 (1976)].
14. Е. А. Кузнецов, С. К. Турицын, *ЖЭТФ* **82**, 1457 (1982) [Sov. Phys. JETP **55**, 844 (1982)].
15. R. Blaha, E. A. Kuznetsov, E. W. Laedke, and K. H. Spatschek, in *Nonlinear World, Proc. of IV Workshop Nonlinear and Turbulent Processes in Physics*, ed. by V. G. Bar'yakhtar et al., World Sci., Singapore (1990), Vol. 1, pp. 25–36.
16. R. Blaha, E. W. Laedke, and K. H. Spatschek, *Physica D* **40**, 249 (1989).
17. E. A. Kuznetsov, *Phys. Lett. A* **101**, 314 (1984).
18. Е. А. Кузнецов, С. К. Турицын, *ЖЭТФ* **94**, 119 (1988) [Sov. Phys. JETP **67**, 1583 (1988)].
19. G. A. Swartzlander and C. T. Law, *Phys. Rev. Lett.* **69**, 2503 (1992).
20. C. T. Law and G. A. Swartzlander, *Opt. Lett.* **18**, 586 (1993).
21. D.E. Pelinovsky, Yu.A. Stepanyants, and Yu.S. Kivshar, *Phys. Rev. E* **51**, 5016 (1995).
22. C. A. Jones and P. H. Roberts, *J. Phys. A* **15**, 2599 (1982).
23. E. A. Kuznetsov and J. J. Rasmussen, *Phys. Rev. E* **51**, 4479 (1995).
24. S. C. Crow, *AIAA J.* **8**, 2172 (1970).
25. С. Н. Власов, В. А. Петрищев, В. И. Таланов, *Изв. вузов. Радиофизика* **14**, 1453 (1971) [Radiophys. Quant. Electron. **14**, 1062 (1971)].
26. В. Е. Захаров, *ЖЭТФ* **62**, 1745 (1972) [Sov. Phys. JETP **35**, 908 (1972)].
27. В. Е. Захаров, Е. А. Кузнецов, *ЖЭТФ* **113**, 1892 (1998) [Sov. Phys. JETP **86**, 1035 (1998)].
28. R. Hirota, *The Direct Method in Soliton Theory*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (2004).
29. Wen-Xiu Ma, *Comm. Nonlin. Sci. Numer. Simul.* **16**, 2663 (2011).
30. Chao Qian, Ji-Guang Rao, and Jing-Song He, *Chinese Phys. Lett.* **33**, 110201 (2016).
31. X. B. Wang, S. F. Tian, C. Y. Qin, and T. T. Zhang, *Appl. Math. Lett.* **72**, 58 (2017).
32. J. J. Mao, S. F. Tian, X. J. Yan, and T. T. Zhang, *Int. J. Numer. Methods Heat Fluid Flow* **29**, 3417 (2019).
33. Dan-Dan Zhang, Lei Wang, Lei Liu, Tai-Xing Liu, and Wen-Rong Sun, *Commun. Theor. Phys.* **73**, 095001 (2021).
34. О. В. Капцов, Д. О. Капцов, *Прикл. мех. тех. физ.* **62**, 142 (2021) [J. Appl. Mech. Tech. Phys. **62**, 649 (2021)].
35. E. A. Kuznetsov, A. M. Rubenchik, and V. E. Zakharov, *Phys. Rep.* **142**, 103 (1986).
36. Yu. S. Kivshar and D. E. Pelinovsky, *Phys. Rep.* **331**, 117 (2000).
37. A. I. Dyachenko and E. A. Kuznetsov, *Physica D* **87**, 301 (1995).
38. В. И. Шрира, *ДАН СССР* **308**, 732 (1989) [Trans. USSR Acad. Sci., Earth Sci. Sec. **308**, 276 (1989)].
39. Д.Е. Пелиновский, Ю.А. Степанянц, *ЖЭТФ* **104**, 3387 (1993) [D.E. Pelinovsky and Yu.A. Stepanyants JETP **77**, 602 (1993)].
40. В. Е. Захаров, *Письма в ЖЭТФ* **22**, 364 (1975) [JETP Lett. **22**, 172 (1975)].
41. E. A. Kuznetsov, A. V. Mikhailov, and I. A. Shomkhin, *Physica D* **87**, 201 (1995).
42. А. В. Гуревич, Л. П. Питаевский, *Письма в ЖЭТФ* **17**, 268 (1973); *ЖЭТФ* **65**, 590 (1973) [Sov. Phys. JETP **38**, 291 (1974)].
43. Е. А. Кузнецов, С. К. Турицын, *Физика плазмы* **16**, 901 (1990) [Sov. J. Plasma Phys. **16**, 524 (1990)].
44. G. B. Whitham, *Linear and Nonlinear Waves*, John Wiley & Sons (2011).
45. Е. А. Кузнецов, А. В. Михайлов, *ЖЭТФ* **40**, 855 (1974) [Sov. Phys. JETP **40**, 855 (1975)].
46. E. A. Kuznetsov, S. K. Turitsyn, J. J. Rasmussen, and K. Rypdal, *Physica D* **87**, 273 (1995).
47. С. К. Турицын, Г. Е. Фалькович, *ЖЭТФ* **89**, 258 (1985) [Sov. Phys. JETP **62**, 146 (1985)].