

# СТАТИСТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ПСЕВДОТЕПЛООВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ, ФОРМИРУЕМОГО ПРОСТРАНСТВЕННЫМ МОДУЛЯТОРОМ СВЕТА

*Д. П. Агапов\**, *И. А. Беловолов*, *П. П. Гостев*,  
*С. А. Магницкий*, *Д. Н. Фроловцев*, *А. С. Чиркин*

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, физический факультет  
119991, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 15 апреля 2022 г.,  
после переработки 15 апреля 2022 г.  
Принята к публикации 27 апреля 2022 г.

Представлены результаты теоретических и экспериментальных исследований статистических свойств псевдотеплового излучения, формируемого при отражении от фазового пространственного модулятора света. Получены выражения для пространственной корреляционной функции и радиуса корреляции случайного псевдотеплового поля. В общем случае поле оказывается статистически неоднородным — радиус корреляции в поперечной плоскости рассеянного пучка в одном из ортогональных направлений зависит от угла падения когерентного пучка на модулятор. С помощью расчета кумулянтов функции распределения поля строго показано, что в дальней зоне случайное поле подчиняется гауссовской статистике. Приведены результаты экспериментов по преобразованию когерентного лазерного пучка в излучение с псевдотепловой статистикой с помощью жидкокристаллического фазового модулятора света. Результаты экспериментов, полученные с помощью проприетарного программного обеспечения, хорошо согласуются с теоретическими выводами.

DOI: 10.31857/S0044451022080065

EDN: EGHINP

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В последние десятилетия источники так называемого псевдотеплового излучения вызывают значительный интерес в фантомной оптике [1–4]. Гауссовская статистика таких полей позволяет выразить корреляционные функции высокого порядка через произведение всевозможных парных корреляций [5–8]. Именно это свойство классических, а также и квантовых гауссовских световых полей находит широкое применение при регистрации фантомных изображений (ФИ). В фантомной оптике излучение, прошедшее через объект или отраженное от него, регистрируется детектором, не обладающим пространственным разрешением. Информация об объекте извлекается из взаимной пространственной корреляционной функции интенсивностей объектного канала и восстанавливающего ка-

нала, в котором распространяется случайное излучение, пространственно-коррелированное с изучаемым, освещающим объект. Такая необычная возможность получения информации об объекте была впервые предсказана в статьях [9, 10] и продемонстрирована в работах [11, 12], в которых коррелированные между собой пучки в объектном и восстанавливающем каналах формировались в процессе спонтанного параметрического рассеяния света.

В настоящее время кроме неклассического параметрически рассеянного излучения широкое распространение для получения ФИ находят так называемые псевдотепловые источники излучения с гауссовской статистикой поля. Обсуждение особенностей квантовых и классических ФИ можно найти в [1]. Недавно предложено и продемонстрировано применение неполяризованного псевдотеплового излучения для исследования поляризационных свойств объектов [13, 14] методом ФИ, что послужило началом нового направления в фантомной оптике — фантомной поляриметрии [15]. Интересным применением фантомного принципа является возможность за-

\* E-mail: dimaagapov@mail.ru

щищенной связи на основе поляризационных состояний [16].

В классических ФИ используются псевдотепловые источники следующих типов: источники, основанные на пространственной модуляции когерентного излучения вращающимся матовым диском; источники, использующие случайную пространственную модуляцию света с помощью либо фазового, либо амплитудного многопиксельного пространственного модулятора света.

Первый тип источников обстоятельно исследован достаточно давно (см., например, [5, 8] и цитируемую там литературу). С многочисленными применениями псевдотепловых источников излучения в фантомной визуализации объектов можно познакомиться по ссылкам в работе [17].

Стартом для разработки источников второго типа, который инициировал разработку нового типа ФИ — вычислительных ФИ, явилась работа [18]. В схеме вычислительных ФИ [18] канал восстановления является виртуальным. Развитием этой идеи является однопиксельная визуализация (single-pixel imaging [19]).

Можно выделить две основные схемы реализации вычислительных ФИ. Одна из них основана на использовании света с детерминированным пространственным распределением, другая использует случайно модулированный свет с псевдотепловой статистикой. В первом случае для получения ФИ используются различные типы алгоритмов сжатых измерений (compressed sensing [20]). Во втором случае ФИ строятся за счет вычисления корреляционных функций используемого случайного поля. Обычно в однопиксельной визуализации для формирования излучения используются пространственные модуляторы света, которые могут генерировать как детерминированные структурированные пучки (см. [21, 22] и цитируемую там литературу), так и случайные световые пучки [18]. Оба направления в настоящее время активно развиваются [19, 26]. Каждый из них имеет свои преимущества и свои недостатки. Какой из подходов выиграет это соревнование, покажет ближайшее будущее.

В данной работе идет речь о генерации случайных световых пучков с помощью пространственных модуляторов света. Эта проблема является центральной при практической реализации вычислительных ФИ, основанных на использовании случайных световых пучков. В литературе имеется ряд работ, посвященных этой проблеме [18–22, 24, 26]. Вопрос о статистических свойствах световых полей, генерируемых пространственными модуляторами све-

та, изучался в работе [18]. В ней рассчитана корреляционная функция поля, формируемая при фазовой многопиксельной модуляции когерентного излучения, и приведена оценка радиуса корреляции такого излучения. Однако на данном этапе развития технологии с использованием пространственных модуляторов света имеющейся в литературе информации о статистических свойствах получаемых таким образом пучков недостаточно, и требуется более детальное исследование статистических характеристик самого источника псевдотеплового света. В частности, насколько нам известно, строго не показано, что формируемое рассматриваемым способом поле источника действительно подчиняется гауссовской статистике.

Цель настоящей работы — детальное теоретическое и экспериментальное исследование процесса формирования псевдотеплового излучения с помощью многопиксельных пространственных модуляторов света, осуществляющих случайную фазовую модуляцию когерентного лазерного излучения.

Структура статьи следующая. В разд. 2 изучена пространственная когерентность световых полей при многопиксельной модуляции. Раздел 3 посвящен доказательству гауссовской статистики поля, формируемого при фазовой пространственной модуляции когерентного пучка. В разд. 4 описана экспериментальная установка, условия проведения эксперимента и представлены его результаты. В Заключение подведены итоги теоретических и экспериментальных исследований.

## 2. ПРОСТРАНСТВЕННАЯ КОГЕРЕНТНОСТЬ СВЕТОВЫХ ПОЛЕЙ ПРИ МНОГОПИКСЕЛЬНОЙ МОДУЛЯЦИИ

Рассмотрим схему (рис. 1) использования пространственного модулятора света (spatial light modulator, SLM) для формирования псевдотеплового излучения из когерентного пучка света, падающего под углом  $\theta$  к нормали поверхности SLM.

После отражения от SLM распространение светового пучка в квазиоптическом приближении описывается параболическим уравнением, решение которого дается выражением [5]

$$A(\mathbf{r}, l) = \int_{-\infty}^{\infty} A^{(0)}(\boldsymbol{\rho}) H(\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}, l) d^2 \boldsymbol{\rho}, \quad (1)$$

где

$$A^{(0)}(\mathbf{r}) = R(\mathbf{r}) A_{(0)}(\mathbf{r}), \quad (2)$$

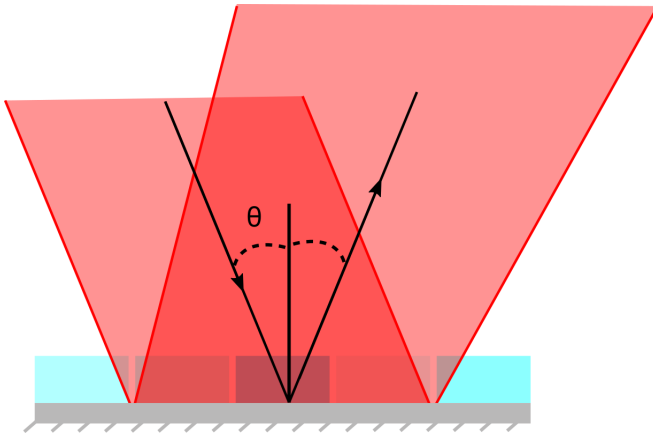


Рис. 1. Геометрия падения когерентного лазерного пучка на SLM;  $\theta$  — угол падения лазерного пучка на поверхность SLM

$A_{(0)}(\mathbf{r})$  — амплитуда падающего когерентного пучка,  $R(\mathbf{r})$  — коэффициент отражения от SLM,

$$H(\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}, l) = \frac{ik_0}{2\pi l} \exp\left[\frac{ik_0(\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho})^2}{2l}\right] \quad (3)$$

— функция Грина для свободного пространства. В дальней зоне отдельного пикселя выражение (1) принимает вид

$$A(\mathbf{r}, l) = H(\mathbf{r}, l) \int_{-\infty}^{\infty} R(\boldsymbol{\rho}) A_{(0)}(\boldsymbol{\rho}) \times \exp\left(-\frac{ik_0 \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\rho}}{l}\right) d^2 \boldsymbol{\rho}. \quad (4)$$

В качестве модели SLM будем использовать модель двумерной решетки, изображенной на рис. 2. Для удобства расчетов число пикселей  $N^2$  будем считать нечетным, а их форму будем полагать квадратной с шириной  $\Lambda$  и расстоянием между ними  $d$ .

Представим аналитически коэффициенты отражения от решетки пикселей в виде  $R(\boldsymbol{\rho}) = R(x)R(y)$ , при этом

$$R(x) = \begin{cases} R_p^{(\Lambda)}, & x_p^{(\Lambda)} - \frac{\Lambda_x}{2} \leq x \leq x_p^{(\Lambda)} + \frac{\Lambda_x}{2}, \\ 1, & x_p^{(d)} - \frac{d_x}{2} \leq x \leq x_p^{(d)} + \frac{d_x}{2}, \end{cases}$$

где  $p = -N, \dots, -1, 0, 1, \dots, N$  и

$$x_p^{(\Lambda)} = p(\Lambda_x + d_x), \quad x_p^{(d)} = p(\Lambda_x + 1/2) + d_x/2 \quad (5)$$

— координаты центра вдоль оси  $x$  соответственно пикселя и промежутка между ними с номером  $p$ ,

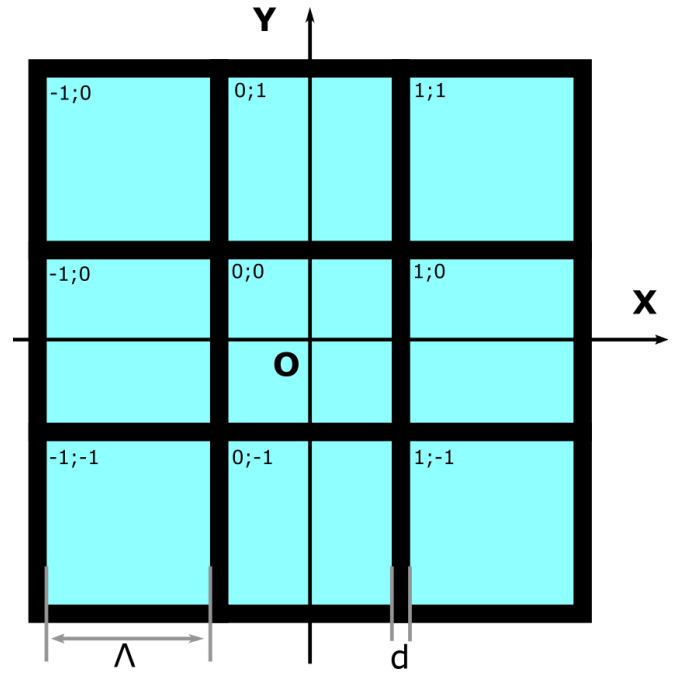


Рис. 2. Структура поверхности SLM. Начало декартовой системы координат  $x, y$  выбрано в центральном пикселе SLM, которому присвоен номер  $[0; 0]$ ;  $\Lambda$  — ширина пикселя;  $d$  — расстояние между ними

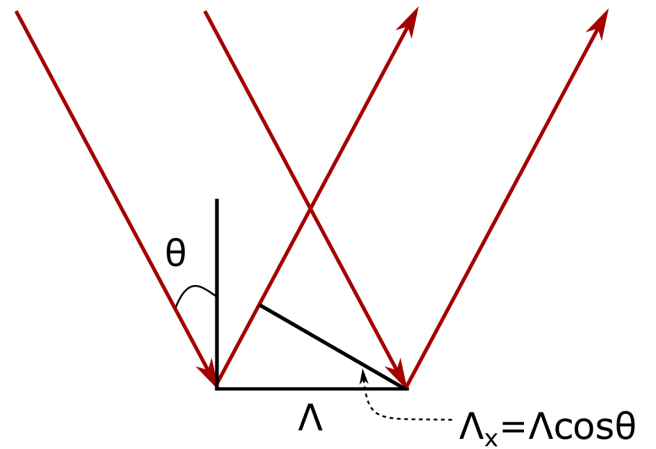


Рис. 3. К геометрии размера пучка, отраженного от SLM

$\Lambda_x = \Lambda \cos \theta$ ,  $d_x = d \cos \theta$ . Здесь  $\theta$  — угол падения пучка на SLM (рис. 3).

Аналогичные выражения имеем вдоль оси  $y$ :

$$R(y) = \begin{cases} R_q^{(\Lambda)}, & y_q^{(\Lambda)} - \frac{\Lambda}{2} \leq y \leq y_q^{(\Lambda)} + \frac{\Lambda}{2}, \\ 1, & y_q^{(d)} - \frac{d}{2} \leq y \leq y_q^{(d)} + \frac{d}{2}, \end{cases}$$

где  $q = -N, \dots, -1, 0, 1, \dots, N$  и

$$y_q^{(\Lambda)} = q(\Lambda + d), \quad y_q^{(d)} = q(\Lambda + 1/2) + d/2. \quad (6)$$

Формируемое поле представляет собой суперпозицию полей, рассеянных от отдельных пикселей, коэффициенты отражения которых можно записать как матрицу отражения пикселей  $R_{pq} = R_p^{(\Lambda)} R_q^{(\Lambda)}$  (коэффициент отражения) и матрицу коэффициентов отражения от промежутков между пикселями (матрица  $R_{pq}^{(d)} = 1$ ). Коэффициенты  $R_{pq}$  в общем случае имеют комплексные значения.

Комплексная амплитуда суммарного поля имеет, таким образом, вид

$$A(\mathbf{r}, l) = H(\mathbf{r}, l) \sum_{p,q=-M}^M \left\{ A_{p,q}^{(\Lambda)}(x, y) + A_{p,q}^{(d)}(x, y) \right\}. \quad (7)$$

Здесь  $A_{p,q}^{(\Lambda)}(x, y)$  и  $A_{p,q}^{(d)}(x, y)$  — амплитуды полей, рассеянных соответственно пикселем площадью  $\Lambda^2$  и промежутком площадью  $d^2$ . Эти амплитуды определяются формулами

$$A_{pq}^{(\Lambda)}(x, y) = R_{pq} \int_{x_p^{(\Lambda)} - \frac{\Lambda_x}{2}}^{x_p^{(\Lambda)} + \frac{\Lambda_x}{2}} \int_{y_q^{(\Lambda)} - \frac{\Lambda_y}{2}}^{y_q^{(\Lambda)} + \frac{\Lambda_y}{2}} A_{(0)}(\boldsymbol{\rho}) \times \exp\left(\frac{-ik_0 \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\rho}}{l}\right) d^2 \rho, \quad (8)$$

$$A_{pq}^{(d)}(x, y) = \int_{x_p^{(d)} - \frac{d_x}{2}}^{x_p^{(d)} + \frac{d_x}{2}} \int_{y_q^{(d)} - \frac{d_y}{2}}^{y_q^{(d)} + \frac{d_y}{2}} A_{(0)}(\boldsymbol{\rho}) \times \exp\left(\frac{-ik_0 \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\rho}}{l}\right) d^2 \rho. \quad (9)$$

В предположении слабого изменения амплитуды падающего поля в пределах одного пикселя выражения (7), (9) можно преобразовать к виду

$$A_{pq}^{(\Lambda)}(x, y) = \Lambda^2 R_{pq} A_{(0)}(x_p^{(\Lambda)}, y_q^{(\Lambda)}) \text{sinc}(\kappa_{\Lambda x} x) \times \text{sinc}(\kappa_{\Lambda y} y) \exp[-i\Phi_{pq}^{(\Lambda)}(x, y)], \quad (10)$$

$$A_{pq}^{(d)}(x, y) = d^2 A_{(0)}(x_p^{(d)}, y_q^{(d)}) \text{sinc}(\kappa_d x) \times \text{sinc}(\kappa_d y) \exp[-i\Phi_{pq}^{(d)}(x, y)]. \quad (11)$$

Здесь  $\text{sinc } x = (1/x) \sin x$ ,  $\kappa_{\Lambda} = (k_0/2l)\Lambda$ ,  $\kappa_d = (k_0/2l)d$  и введены обозначения

$$\begin{aligned} \Phi_{pq}^{(\Lambda)}(x, y) &= (k_0/l)(x_p^{(\Lambda)} x + y_q^{(\Lambda)} y), \\ \Phi_{pq}^{(d)}(x, y) &= (k_0/l)(x_p^{(d)} x + y_q^{(d)} y). \end{aligned} \quad (12)$$

Произведение функций  $\text{sinc}(\kappa_{\Lambda} x) \text{sinc}(\kappa_{\Lambda} y)$  определяет ширину распределения дифрагированного пикселем поля вдоль направлений  $x, y$  в дальней зоне пикселя на расстоянии  $l$  от него. Величины этих размеров можно оценить для простоты, например, по первым нулям этих функций как

$$x_0^{(\Lambda)} = \frac{\lambda l}{\Lambda_x}, \quad y_0^{(\Lambda)} = \frac{\lambda l}{\Lambda}. \quad (13)$$

Аналогично получаем размер поля, рассеянного промежутками между пикселями:

$$x_0^{(d)} = \frac{\lambda l}{d_x}, \quad y_0^{(d)} = \frac{\lambda l}{d}. \quad (14)$$

Прежде всего отметим, что в рассматриваемом здесь случае в дальней зоне рассеянные пикселями поля не зависят от их местоположения, т. е. от индексов  $p, q$ . Для параметров  $\lambda = 1$  мкм,  $l = 1$  см и  $\Lambda = 10$  мкм имеем  $x_0^{(\Lambda)} \simeq y_0^{(\Lambda)} = 1$  мм.

Для получения наглядных аналитических результатов сделаем два упрощения.

1. Если нас интересуют поля в области размером меньше, чем 1 мм, то функции  $\text{sinc}(\kappa_{\Lambda} x)$  и  $\text{sinc}(\kappa_{\Lambda} y)$  можно заменить постоянным максимальным значением, равным 1.

2. Если ширина лазерного пучка больше размера SLM, то и амплитуды полей на пикселях можно считать практически одинаковыми,  $A_{(0)}(x_p^{(\Lambda)}, y_q^{(\Lambda)}) = A_{(0)}(0)$ .

В этих условиях выражения (10), (11) принимают простой вид:

$$A_{pq}^{(\Lambda)}(x, y) = \Lambda^2 R_{pq} A_{(0)}(0) \exp[-i\Phi_{pq}^{(\Lambda)}(x, y)], \quad (15)$$

$$A_{pq}^{(d)}(x, y) = d^2 A_{(0)}(0) \exp[-i\Phi_{pq}^{(d)}(x, y)]. \quad (16)$$

Для интенсивности излучения, таким образом, получаем

$$\begin{aligned} I(\mathbf{r}, l) &= |A(\mathbf{r}, l)|^2 = |B(\mathbf{r}, l)|^2 \times \\ &\times \left[ \sum_{p,q=-M}^M d^2 \exp[i\Phi_{pq}^{(d)}(x, y)] + \right. \\ &\left. + \Lambda^2 R_{pq} \exp[i\Phi_{pq}^{(\Lambda)}(x, y)] \right] \times \\ &\times \left[ \sum_{p,q=-M}^M d^2 \exp[-i\Phi_{pq}^{(d)}(x, y)] + \right. \\ &\left. + \Lambda^2 R_{pq} \exp[-i\Phi_{pq}^{(\Lambda)}(x, y)] \right], \quad (17) \end{aligned}$$

где  $B(\mathbf{r}, l) = H(\mathbf{r}, l)A_{(0)}(0)$ .

При перемножении выражений в правой части (17) появляются следующие слагаемые:

1) пропорциональные  $d^4$ , дающие постоянную часть интенсивности, относительный вклад которой составляет  $(d/\Lambda)^4 \ll 1$ ;

2) пропорциональные  $d^2\Lambda^2$ , дающие вклад в флуктуации интенсивности, относительный вклад которых тоже порядка  $(d/\Lambda)^4 \ll 1$ ;

3) пропорциональные  $\Lambda^4$ , которые дают флуктуационную часть интенсивности.

Пренебрегая вкладами 1 и 2, выражение для интенсивности (17) можем преобразовать к виду

$$I(\mathbf{r}, l) = \Lambda^4 |B(\mathbf{r}, l)|^2 \sum_{p,q=-M}^M \sum_{p',q'=-M}^M R_{pq} R_{p'q'} \times \exp \left[ i \left( \Phi_{pq}^{(\Lambda)}(x, y) - \Phi_{p'q'}^{(\Lambda)}(x, y) \right) \right]. \quad (18)$$

Для дальнейшего анализа необходимо знание статистических характеристик коэффициентов отражения пикселей. Естественно считать «поле» пикселей статистически изотропным: среднее значение  $\langle R_{pq} \rangle = \langle R \rangle$ , дисперсия  $\langle R_{pq} R_{pq}^* \rangle = \langle R^2 \rangle$  и модуляции в пикселях статистически независимы,

$$\langle R_{pq}^* R_{p'q'} \rangle = \langle R_{pq}^* \rangle \langle R_{p'q'} \rangle = |\bar{R}|^2, \quad p \neq p', \quad q \neq q'. \quad (19)$$

Угловыми скобками обозначено усреднение по реализациям. При времени измерения одной выборки, меньшем чем время изменения коэффициента отражения пикселей, коэффициенты отражения можно считать постоянными («замороженные» неоднородности).

Пользуясь свойством эргодичности по пространству, для средней интенсивности получим

$$\langle I(\mathbf{r}, l) \rangle = \Lambda^4 \bar{R}^2 N^2 |A_{(0)}(0)|^2. \quad (20)$$

При тех же условиях корреляционная функция полей, например, между значениями в точках  $\mathbf{r}_1 = 0$

и  $\mathbf{r}_2 = \mathbf{s}$ , дается выражением

$$\begin{aligned} \Gamma(\mathbf{s}) &= \langle A(\mathbf{s}, l) A^*(0, l) \rangle = B(0, l) B(\mathbf{s}, l) \Lambda^4 \times \\ &\times \left\langle \left( \sum_{p',q'=-M}^M R_{p',q'} \right) \times \right. \\ &\times \left. \left( \sum_{p,q=-M}^M R_{p,q} \exp \left[ i \Phi_{pq}^{(\Lambda)}(x, y) \right] \right) \right\rangle = \\ &= B(0, l) B(\mathbf{s}, l) \Lambda^4 \sum_{p,q=-M}^M \left[ \bar{R}^2 + (N^2 - 1) \bar{R}^2 \right] \times \\ &\times \exp \left[ i \Phi_{pq}^{(\Lambda)}(x, y) \right] = \\ &= B(0, l) B(\mathbf{s}, l) \Lambda^4 \left[ \bar{R}^2 + (N^2 - 1) \bar{R}^2 \right] \gamma(x, y; N), \quad (21) \end{aligned}$$

где нормированная корреляционная функция (степень когерентности)

$$\begin{aligned} \gamma(x, y; N) &= \\ &= \frac{\sin \left[ \frac{k_0(\Lambda_x + d_x)Nx}{2l} \right] \sin \left[ \frac{k_0(\Lambda + d)Ny}{2l} \right]}{N^2 \sin \left[ \frac{k_0(\Lambda_x + d_x)x}{2l} \right] \sin \left[ \frac{k_0(\Lambda + d)y}{2l} \right]}. \quad (22) \end{aligned}$$

Из анализа формулы (22) следует, что радиусы корреляции поля, рассчитанные по уровню 0.5 от  $\gamma(0) = 1$ , вдоль осей  $x, y$  различны:

$$r_{cor}^{(x)} = \frac{6\lambda l}{N(\Lambda + d) \cos \theta}, \quad r_{cor}^{(y)} = \frac{6\lambda l}{N(\Lambda + d)}. \quad (23)$$

Другими словами, рассеянное поле при падении когерентного пучка на SLM под углом  $\theta \neq 0$  оказывается статистически неизотропным. При числе пикселей  $N^2 = 10^6$  и угле  $\theta = 0$  имеем  $r_{cor}^{(x)} \approx r_{cor}^{(y)} \approx 1$  мкм.

Особенности фазовой модуляции сказываются на значениях параметров  $\langle R \rangle$ ,  $\langle R^2 \rangle$  и ярко проявляются при расчете функции распределения.

### 3. СТАТИСТИКА РАССЕЯННОГО ПОЛЯ ПРИ ФАЗОВОЙ МОДУЛЯЦИИ

Имея в виду сравнение полученных теоретических результатов с результатами экспериментальных исследований, в этом разделе мы изучим статистику рассеянного поля при фазовой модуляции. Коэффициент отражения от каждого пикселя SLM представим в виде

$$R_{pq}(t) = \exp [i\phi_{pq}(t)]. \quad (24)$$

Флуктуации фаз в пикселях полагаем статистически независимыми, многомерная функция распределения фаз в этом случае

$$w(\phi_{-M,-M}, \phi_{-M+1,-M+1}, \dots, \phi_{M-1,M-1}, \phi_{M,M}) = \prod_{p,q=-M}^M w(\phi_{pq}). \quad (25)$$

Функции распределения фаз считаем равномерно распределенными на интервале периодичности как в пространстве при изменении индексов  $p, q$ , так и по времени:

$$w(\phi_{pq}(t)) = 1/2\pi, \quad -\pi \geq \phi_{pq} \leq \pi, \quad p, q \in [-M, M]. \quad (26)$$

Естественно полагать, что скачки фазы во времени подчиняются диффузионному закону:

$$\langle (\Delta\phi_{pq}(t + \tau, t))^2 \rangle = D\tau, \quad (27)$$

где  $\Delta\phi_{pq}(t + \tau, t) = \phi_{pq}(t + \tau) - \phi_{pq}(t)$ ,  $D$  — коэффициент диффузии.

Считаем также, что случайный процесс  $\phi_{pq}(t)$  обладает эргодическим свойством. В дальней зоне случайное поле представляет собой суперпозицию полей от отдельных пикселей со случайной фазой, и, согласно центральной предельной теореме, суммарное поле подчиняется гауссовской статистике. Докажем это.

Формула для интенсивности (18) соответствует следующему выражению для действительного поля:

$$E(\mathbf{r}, l) = \sum_{pq=-M}^M a \cos(\phi_{pq}(t) - \Phi_{pq}^{(\Lambda)}(x, y)), \quad (28)$$

где амплитуда  $a$  не зависит от индексов  $pq$  в силу принятых выше приближений. В дальнейшем, чтобы не загромождать формулы, не будем выписывать в явном виде переменные, от которых зависит  $E$ .

Удобный способ нахождения функции распределения  $w(E)$  основан на характеристической функции

$$\begin{aligned} \theta(v) &= \langle e^{ivE} \rangle = \int e^{ivE} w(E) dE = \\ &= \left\langle \exp \left[ iv \sum_{pq=-M}^M a \cos(\phi(t) - \Phi_{pq}^{(\Lambda)}(x, y)) \right] \right\rangle = \\ &= \prod_{pq=-M}^M \left\langle \exp \left[ i va \cos(\phi(t) - \Phi_{pq}^{(\Lambda)}(x, y)) \right] \right\rangle = \\ &= J_0^{N^2}(av), \quad (29) \end{aligned}$$

где  $J_0(z)$  — функция Бесселя нулевого порядка от действительного аргумента, а  $v$  — действительный параметр. При расчете (29) использовано свойство (25).

Функция распределения  $w(E)$  находится с помощью обратного преобразования Фурье:

$$w(E) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \theta(v) e^{-ivE} dv. \quad (30)$$

Чтобы вычислить  $w(E)$ , воспользуемся следующим приемом [5]. Согласно (28), значения  $E$  лежат в интервале  $-A \geq E \leq A$ ,  $A = N^2a$ , поэтому  $w(E)$  можно разложить в ряд Фурье:

$$w(E) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \exp\left(-\frac{i\pi k E}{A}\right). \quad (31)$$

Коэффициенты  $c_k$  равны

$$c_k = \frac{1}{2A} \int_{-A}^A w(E) \exp\left(-\frac{i\pi k E}{A}\right) dE \quad (32)$$

и с точностью до множителя  $1/2A$  совпадают с характеристической функцией  $E$  для величины  $\pi k/A$ .

Для распределения  $w(E)$  в результате получаем

$$w(E) = \frac{1}{2A} \left[ 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} J_0^{N^2}\left(\frac{\pi k a}{A}\right) \cos\left(\frac{\pi k E}{A}\right) \right]. \quad (33)$$

Формула (33) справедлива для произвольного числа  $N$ . Численный анализ выражения (33) показывает, что с ростом числа  $N$  распределение  $w(E)$  стремится к гауссовскому.

Убедиться в этом можно и аналитически, используя кумулянтный анализ. Введем новую случайную переменную  $\xi(\mathbf{r}) = E(\mathbf{r}, l)/N$  и найдем закон ее распределения. Характеристическая функция случайного процесса  $\xi(\mathbf{r})$  равна

$$\theta_{\xi}(v) = \langle e^{iv\xi} \rangle = J_0^{N^2}(av/N). \quad (34)$$

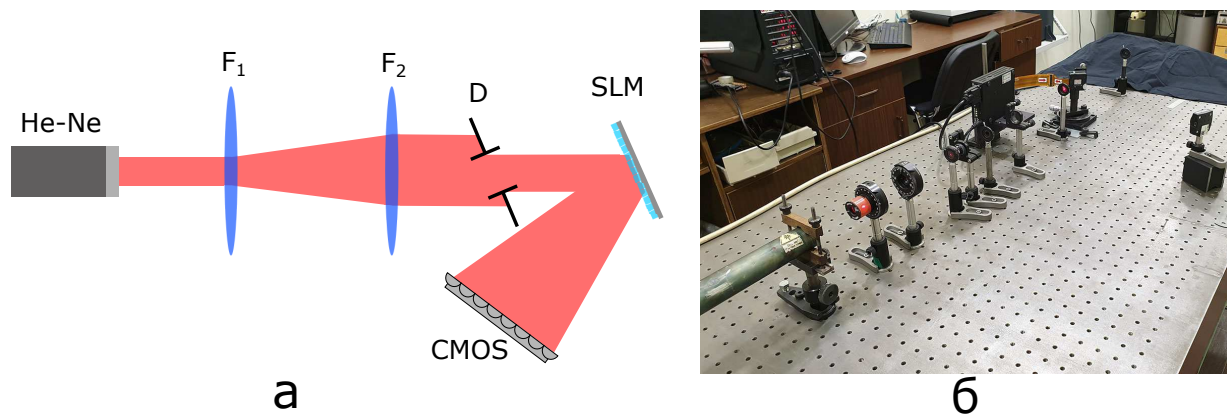
Найдем кумулянты распределения:

$$\kappa_m = (-i)^m \left[ \frac{d^m}{dv^m} \ln \theta_{\xi}(v) \right]_{v=0}. \quad (35)$$

Удобно воспользоваться разложением функции Бесселя

$$J_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}. \quad (36)$$





**Рис. 4.** Экспериментальная схема формирования излучения с псевдотепловой статистикой с помощью SLM. а) Излучение He-Ne-лазера после прохождения через расширитель пучка, состоящий из двух линз с фокусными расстояниями  $F_1 = -1.5$  см и  $F_2 = 20$  см, и квадратную диафрагму  $D$  падает на поверхность SLM. Отраженное излучение регистрируется CMOS-камерой. б) Фотография экспериментальной установки

Все нечетные кумулянты оказываются равными нулю. Для первых двух четных кумулянтов имеем

$$\kappa_2 = -\frac{1}{2}a^2, \quad \kappa_4 = -\frac{3}{8}\left(\frac{a}{N}\right)^2 a^2. \quad (37)$$

Отсюда следует, что при  $N \gg 1$  отношение  $\kappa_4/\kappa_2 \ll \ll 1$  и можно ограничиться учетом только кумулянта  $\kappa_2$ . Тогда для характеристической функции имеем

$$\theta_\xi(v) = \exp[-(av)^2/4]. \quad (38)$$

Выполняя преобразование Фурье (38), находим функцию распределения  $w(\xi)$  и, учитывая связь между  $\xi$  и  $E$ , получаем функцию распределения гауссовского вида:

$$w(E) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left[-\frac{E^2}{2\sigma^2}\right], \quad (39)$$

где дисперсия  $\sigma^2 = N^2 a^2/2$ .

Таким образом, пространственная фазовая модуляция когерентного излучения при помощи SLM формирует поле в дальней зоне с гауссовской статистикой, подобной тепловому излучению. Иначе говоря, SLM является источником так называемого псевдотеплового излучения. Заметим, что гауссовская статистика упрощает расчет корреляционных функций поля высокого порядка.

#### 4. РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТА

На рис. 4 изображена схема экспериментальной установки для изучения особенностей статистических свойств псевдотеплового света, генерируемого

с помощью фазового жидкокристаллического пространственного модулятора света модели SLM-100 от Santec.

В качестве источника выбран He-Ne-лазер с длиной волны излучения 632.8 нм, работающий в непрерывном режиме. Пучок излучения имеет вертикальную поляризацию в лабораторном базисе, а его диаметр на выходе лазера составляет 0.4 мм. После лазера излучение проходит через расширитель, который увеличивает диаметр лазерного пучка до 5 мм.

Расширенный пучок падает на квадратную диафрагму, установленную параллельно плоскости SLM, что обеспечивает неизменность засвеченной площади поверхности SLM при его повороте во время эксперимента. Сам SLM, как и диафрагма, установлен на вращающейся микрометрической платформе, которая позволяет задать угол падения пучка с точностью примерно 2". Диафрагма задает размер рабочей области SLM, т.е. определяет количество задействованных пикселей SLM. Модулированное излучение фиксируется в отраженном от SLM свете в области между первым и вторым горизонтальными дифракционными максимумами 8-битной CMOS-камерой Thorlabs с квадратными пикселями размером 5.2 мкм. Полный размер матрицы модулятора 1440 × 1050 пикселей. Такой выбор области наблюдения обусловлен тем, что в дифракционных максимумах присутствует остаточная компонента когерентного излучения лазера, которая искажает статистические свойства получаемого света. Расстояние до камеры меняется в зависимости от условий эксперимента.

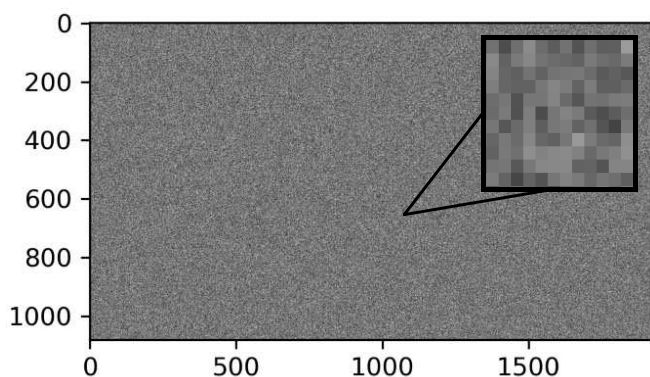


Рис. 5. Пример случайной маски, которая подается на SLM для фазовой модуляции лазерного излучения (цифры вдоль осей — номера пикселей)

Управление SLM, камерой и обработка итоговых изображений проводятся при помощи разработанного в лаборатории программного обеспечения, установленного на персональном компьютере. Программа позволяет задать фазовую маску или набор случайных фазовых масок на SLM, провести съемку промодулированного излучения для каждой маски и обработку полученных изображений. В результате обработки программа выдает информацию, в частности, значение нормированной автокорреляционной функции интенсивности  $g^{(2)}$  и значения радиусов корреляций вдоль ортогональных направлений в поперечной плоскости пучка.

Для управления SLM, а также для получения и обработки изображений с CMOS-камеры используется проприетарное программное обеспечение, написанное на языке Python. Заранее сгенерированные маски выводятся на пространственный модулятор света с помощью библиотеки OpenCV. Для получения изображения с камеры используется программный интерфейс. Для создания маски на пространственном модуляторе света для каждого его пикселя генерируется случайное число в диапазоне от 0 до 1023 (соответствует 10-битной разрядности модулятора). Полученная таким образом маска подается на матрицу модулятора, а также сохраняется в памяти компьютера для дальнейшего анализа изображений, полученных на CMOS-камере. Типичный вид случайной маски представлен на рис. 5.

Методика измерений заключается в следующем. Сначала устанавливаются угол падения излучения на рабочую плоскость SLM, расстояние от SLM до камеры и размер квадратной диафрагмы. Затем с помощью программного обеспечения генерируется случайная маска, значения чисел в которой соот-

ветствуют фазовой задержке в диапазоне от 0 до  $2\pi$ . Затем маска подается на SLM, а в памяти компьютера сохраняется распределение интенсивности в отраженном от SLM свете. Последняя процедура повторяется 1000 раз. Таким образом, после завершения работы первой программы в памяти компьютера оказывается сохраненным набор распределений интенсивности, полученных для случайно сгенерированных масок, поданных на SLM. В результате обработки сохраненных снимков вычисляются значения нормированной корреляционной функции интенсивности  $g^{(2)}$  (см. ниже) и значения радиусов корреляций вдоль ортогональных направлений в поперечной плоскости пучка.

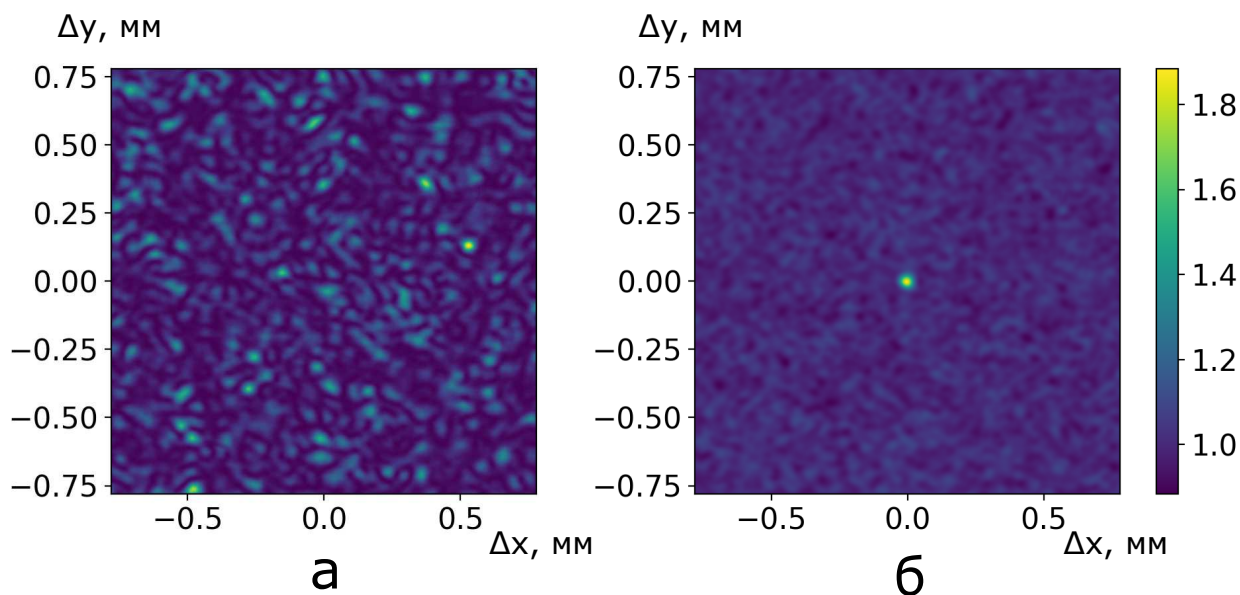
Типичный профиль распределения интенсивности света при его отражении от случайного фазового экрана представлен на рис. 6а. Распределение интенсивности представляет собой спекл-структуру. Корреляционная функция  $g^{(2)}$  вычисляется из измеренных профилей интенсивности следующим образом. На всех кадрах в центральной области пучка выбирались пиксель с координатами  $(x_0, y_0)$  и пиксель с координатами  $(x_l, y_l)$ . Расстояние между пикселями по горизонтальной ( $x$ ) и вертикальной ( $y$ ) осям:  $\Delta x = x_l - x_0$ ,  $\Delta y = y_l - y_0$ . Усреднение проводилось по реализациям (по 1000 кадрам) по следующей формуле:

$$g^{(2)}(\Delta x, \Delta y) = \frac{\sum_{n=1}^N J_n(x_0, y_0) J_n(x_l, y_l)}{\sum_{n=1}^N J_n(x_0, y_0) \sum_{n=1}^N J_n(x_l, y_l)}, \quad (40)$$

где  $n$  — номер кадра,  $N$  — общее количество кадров,  $J_n(x_0, y_0)$  и  $J_n(x_l, y_l)$  — измеренные интенсивности в пикселях  $(x_0, y_0)$  и  $(x_l, y_l)$  в  $n$ -м кадре. Описанная выше процедура повторялась для заданного пикселя  $(x_0, y_0)$  и всех возможных  $(x_l, y_l)$ . Типичный вид  $g^{(2)}(\Delta x, \Delta y)$  представлен на рис. 6б. Видно, что величина функции  $g^{(2)}(\Delta x, \Delta y)$  близка к 2 только в ограниченной области пространства. Размер этой области определяется радиусом корреляции излучения вдоль осей  $x$  и  $y$ .

Радиусы корреляции вдоль осей  $x$  и  $y$  вычислялись как полуширины функций  $g^{(2)}(\Delta x, 0)$  и  $g^{(2)}(0, \Delta y)$ . Для увеличения точности выбирались различные 30 пикселей и строились 30 корреляционных функций. При этом радиусы корреляции вычислялись как средние по 30 измерениям. Время задержки при съемке кадров выбиралось таким образом, чтобы был задействован весь динамический диапазон камеры.





**Рис. 6.** (В цвете онлайн) Пространственная структура излучения, сформированного SLM: а) распределение интенсивности в спекл-структуре пучка; по осям  $x$  и  $y$  отложены величины  $\Delta x$  и  $\Delta y$ , цветом обозначена величина интенсивности в пикселях; б) автокорреляционная функция  $g^{(2)}(\Delta x, \Delta y)$  для центрального пикселя на расстоянии 20 см от SLM при угле падения пучка  $15^\circ$

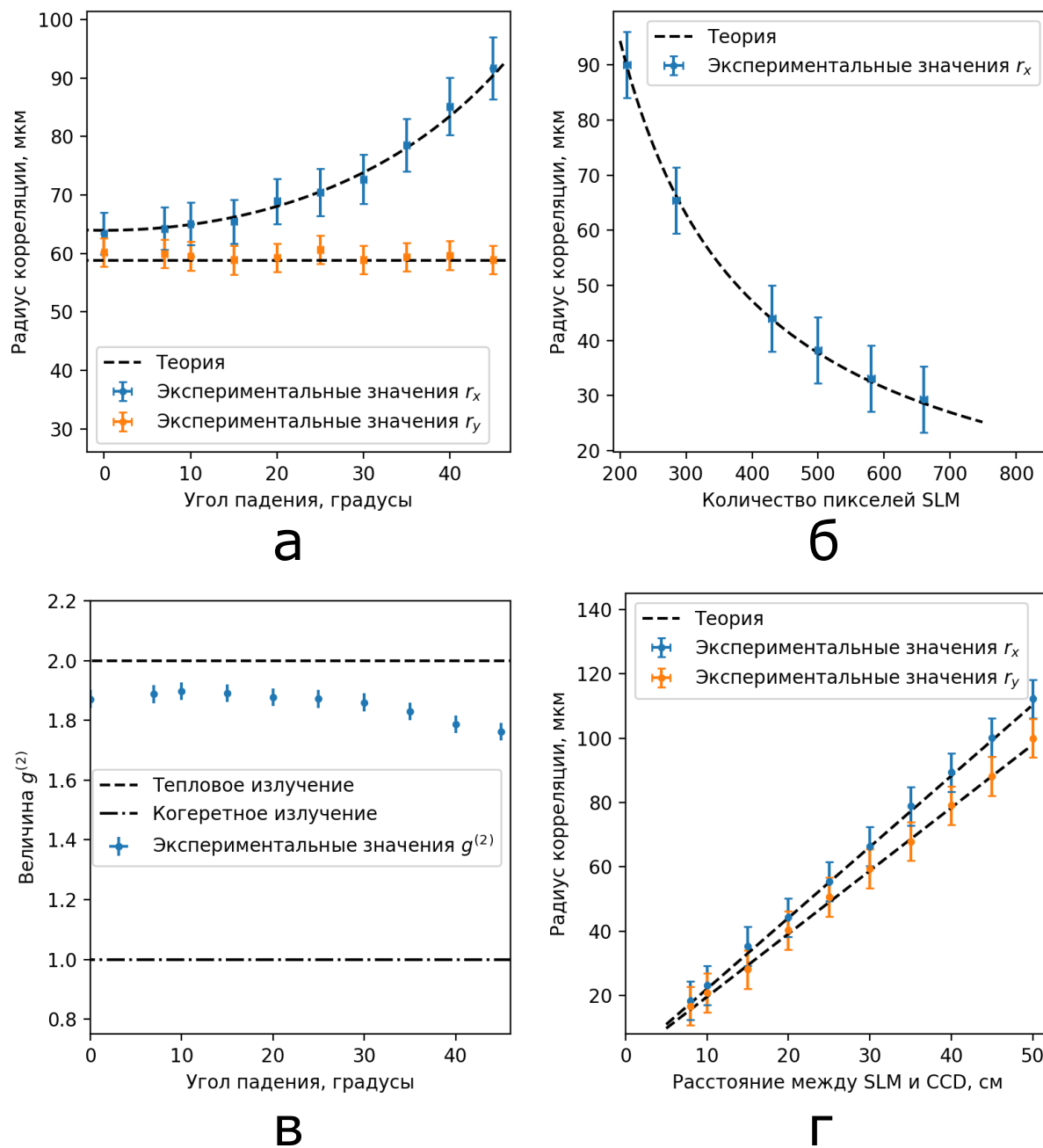
Была исследована зависимость радиуса корреляции от экспериментально изменяемых параметров: угла падения лазерного пучка на SLM, количества задействованных пикселей SLM, расстояния от SLM до плоскости наблюдения. Экспериментально обнаружен теоретически предсказанный эффект анизотропии радиуса корреляции при наклонном падении когерентного света на SLM (рис. 7а). При увеличении угла падения наблюдается увеличение радиуса корреляции по одной из осей, при этом наблюдается лишь незначительное уменьшение параметра  $g^{(2)}$ . При этом величина  $g^{(2)}$  (рис. 7б), остается близкой к 2, что свидетельствует о том, что статистика поля остается близкой к тепловой при изменении угла падения от  $0$  до  $45^\circ$ . Эксперименты также показали, что радиус корреляции, как и следовало ожидать, уменьшается при увеличении количества задействованных пикселей (рис. 7в), а при увеличении расстояния до плоскости наблюдения радиус корреляции растет (рис. 7г).

Таким образом, все представленные выше теоретические предсказания были подтверждены экспериментально. В частности, впервые было показано, что радиус корреляции рассеянного поля в одном из направлений зависит от угла падения когерентного излучения на SLM, т. е. площадь пространственной когерентности представляет собой эллипс. При этом

статистика поля остается тепловой и не зависит от угла падения.

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе впервые детально теоретически и экспериментально исследованы статистические свойства псевдотеплового источника света, формируемого при модуляции когерентного лазерного излучения многопиксельным пространственным модулятором света. С помощью аппарата теории случайных процессов и кумулянтного анализа аналитически показано, что распределение случайного поля, формируемого при случайной многопиксельной фазовой модуляции когерентного излучения, является гауссовским. Обнаружено, что при наклонном падении модулируемого пучка случайное поле статистически анизотропно, т. е. площадь пространственной когерентности представляет собой эллипс. Это свойство псевдотеплового источника излучения следует иметь в виду при анализе его распространения в свободном пространстве и в оптических волноводных устройствах, а также при определении разрешающей способности фантомного изображения. Одним из факторов, влияющих на качество последнего, является соотношение характерных размеров изображения и радиуса пространственной корреляции.



**Рис. 7.** (В цвете онлайн) Зависимости величины автокорреляционной функции  $g^{(2)}$  и радиуса корреляции вдоль осей  $x$  и  $y$  от экспериментально изменяемых параметров: а) радиус корреляции как функция угла падения лазерного пучка на SLM при расстоянии до SLM 30 см и размере диафрагмы 4 мм; б) радиус корреляции в зависимости от количества задействованных пикселей SLM при угле падения  $15^\circ$  и расстоянии до SLM 30 см; в) значение функции  $g^{(2)}$  в зависимости от угла падения на SLM при расстоянии до SLM 30 см и размере диафрагмы 4 мм; г) радиус корреляции как функция расстояния от SLM до плоскости наблюдения при угле падения  $15^\circ$  и размере диафрагмы 4 мм

Обнаружение эффекта анизотропии радиуса корреляции кроме очевидного научного интереса имеет и важное прикладное значение в свете практической реализации метода вычислительных фантомных изображений, в частности, развиваемой нами в настоящее время волоконной фантомной оптики.

**Финансирование.** Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 21-12-00155).

## ЛИТЕРАТУРА

1. A. Gatti, E. Brambilla, M. Bache, and L. A. Lugiato, in *Quantum Imaging*, ed. by M. I. Kolobov, Springer (2007), Ch. 5.
2. B. I. Erkmen and R. W. Boyd, *Adv. Opt. Photon.* **2**, 405 (2010).
3. K. W. C. Chan, M. N. O'Sullivan, and R. W. Boyd, *Opt. Express* **18**, 5562 (2010).
4. J. H. Shapiro and R. W. Boyd, *Quant. Inf. Process.* **11**, 949 (2012).
5. С. А. Ахманов, Ю.Е. Дьяков, А.С. Чиркин *Введение в статистическую радиофизику и оптику*, Наука, Москва (1981).
6. L. Mandel and E. Wolf, *Optical Coherence and Quantum Optics*, Cambridge Univ. Press (1995).
7. H. Cummins, *Photon Correlation and Light Beating Spectroscopy* (Vol. 3), Springer Science and Business Media (2013).
8. B. Crosignani, P. di Porto, and M. Bertolotti, *Statistical Properties of Scattered Light*, Acad. Press (1975).
9. Д. Н. Клышко, ЖЭТФ **105**, 1574 (1994).
10. А. В. Белинский, Д. Н. Клышко, ЖЭТФ **105**, 487 (1994).
11. D. V. Strekalov, A. V. Sergienko, D. N. Klyshko et al., *Phys. Rev. Lett.* **74**, 3600 (1995).
12. T. B. Pittman, Y. Shih, D. V. Strekalov et al., *Phys. Rev. A* **52**, R3429 (1995).
13. A. S. Chirkin, P. P. Gostev, D. P. Agapov et al., *Laser Phys. Lett.* **15**, 115404 (2018).
14. S. Magnitskiy, D. Agapov, and A. Chirkin, *Opt. Lett.* **192**, 3641 (2020).
15. S. Magnitskiy, D. Agapov, and A. Chirkin, *Opt. Lett.* **47**(4), 754 (2022).
16. M. Roskopf, T. Mohr, and W. Elsässer, *Phys. Rev. Appl.* **13**, 034062 (2020).
17. T. Jiang, W. Tan, X. Huang et al., *J. Opt.* **23**, 075201 (2021).
18. J. H. Shapiro, *Phys. Rev. A* **78**, 061802(R) (2008).
19. G. M. Gibson, S. D. Johnson, and M. J. Padgett, *Opt. Express* **28**, 28190 (2020).
20. V. Katkovnik and J. Astola, *JOSA A* **29**(8), 1556 (2012).
21. J. Pinnell, I. Nape, B. Sephton et al., *JOSA A* **37**, C146 (2020).
22. A. A. Pushkina, J. I. Costa-Filho, G. Maltese et al., *Meas. Sci. Technol.* **31** 125202 (2020).
23. Ch. Wang, R.-J. Lan, Ch. Ren et al., *Phys. Rev. A* **101**, 033819 (2020).
24. H. C. Liu, B. Yang, Q. Guo et al., *Sci. Adv.* **3**, e1701477 (2017).