

ДИНАМИЧЕСКИЕ И СТАТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА НЕГЕЙЗЕНБЕРГОВКОГО ФЕРРИМАГНЕТИКА С ОДНОИОННОЙ АНИЗОТРОПИЕЙ ТИПА «ЛЕГКАЯ ПЛОСКОСТЬ»

*О. А. Космачев, Я. Ю. Матюнина, Ю. А. Фридман**

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского 295007, Симферополь, Россия

Поступила в редакцию 24 марта 2022 г.,
после переработки 26 апреля 2022 г.
Принята к публикации 29 апреля 2022 г.

Исследовано влияние одноионной анизотропии типа «легкая плоскость» на фазовые состояния и спектры элементарных возбуждений ферримагнетика с подрешетками $S = 1$ и $\sigma = 1/2$ и негейзенберговским (билинейным и биквадратичным по спином) обменным взаимодействием для подрешетки с $S = 1$. Показано, что при различных соотношениях материальных параметров системы возможна реализация фазы с векторными параметрами порядка (ферримагнитная фаза) и фазы, характеризуемой как векторным, так и тензорными параметрами порядка (квадрупольно-ферримагнитная). Показано, что учет одноионной анизотропии меняет тип фазового перехода по сравнению с изотропным негейзенберговским ферримагнетиком. Построена фазовая диаграмма, определено условие компенсации спинов подрешеток, а также поведение спектров элементарных возбуждений как в окрестности линии фазовых переходов, так и вблизи линии компенсации спинов. В окрестности линии компенсации спинов спектры магнонов «антиферромагнитно подобны».

DOI: 10.31857/S0044451022090140

EDN: ELMSDW

1. ВВЕДЕНИЕ

В последние годы возникли новые и активно развивающиеся области физики прикладного магнетизма, спинтроники и магноника, которые основаны на использовании магнитных степеней свободы магнитоупорядоченных кристаллов. Спиновые колебания и волны, а также спиновые токи активно используются для создания различных приборов записи и обработки информации, которые в принципе могут заменить соответствующие приборы стандартной электроники [1–4]. Характерные частоты работы таких устройств порядка частот магнитного резонанса, т. е. для ферромагнетиков они находятся в диапазоне от единиц до десятков гигагерц [1–4]. Для повышения быстродействия предложено использование скомпенсированных магнетиков, прежде всего, антиферромагнетиков, см. [5–7], для которых более высокие значения динамических парамет-

ров, таких как частоты магнитного резонанса, предельные скорости доменных стенок [8] и магнитных вихрей [9, 10] и ряд других, определяются эффектами обменного усиления. Существенно также, что спиновый ток активно влияет на поведение систем с нулевым интегральным магнитным моментом, что дает возможность использовать антиферромагнетики в спинтронных устройствах [11]. Таким образом, использование этих материалов, в принципе, позволяет повысить как скорость работы систем записи и считывания информации [12–15], так и существенно (до величин порядка терагерц) повысить рабочую частоту генераторов с накачкой спиновым током [16–18].

Однако антиферромагнетики обладают высокой чувствительностью магнитного порядка к наличию дефектов, нарушающих подрешеточную структуру кристаллического образца. Это обстоятельство затрудняет их применение в спинтронике. Однако хорошо известно, что эффекты обменного усиления, аналогичные тем, что известны для антиферромагнетиков, имеют место для ферримагнетиков, находящихся в окрестности точки компенсации подрешеток [19]. Следовательно, можно использо-

* E-mail: yuriiifridman@gmail.com

вать ферримагнетики, находящиеся вблизи точки компенсации, для различных устройств сверхбыстрой спинтроники. В недавних работах экспериментально и теоретически исследована сверхбыстрая (со скоростями порядка км/с) динамика доменных стенок [20, 21] и высокочастотная динамика ферримагнитных вихрей [22, 23]. Предложена схема магнитного наногенератора на основе ферримагнетиков с накачкой спиновым током, работающего в диапазоне терагерц [24]. Для сплава редкоземельных и переходных металлов GdFeCo был обнаружен сверхбыстрый (за время порядка нескольких пикосекунд) переворот намагниченностей подрешеток под действием лазерного импульса с длительностью меньше 100 фемтосекунд [25, 26]. Как показали исследования, этот эффект связан с наличием двух подрешеток, и в формировании эффекта существенную роль играет обусловленное обменным взаимодействием изменение модулей магнитных моментов подрешеток [27, 28]. Таким образом, для описания эффекта существенна чисто продольная эволюция магнитных моментов подрешеток. Всё это свидетельствует о том, что детальное исследование различных аспектов спиновой динамики ферримагнетиков является важными и актуальными (см. обзор [29]).

Необходимо отметить, что ряд вопросов физики ферримагнетиков изучен сравнительно слабо. Так, отмеченный эффект переориентации наблюдался для ферримагнетика, содержащего как слабоанизотропные ионы, так и редкоземельные ионы, обладающие немалой одноионной анизотропией. Наличие немалой одноионной анизотропии приводит к существенно квантовым эффектам, которые не удастся описать в рамках стандартной феноменологической теории [30]. Описание подобных эффектов выходит за рамки уравнения Ландау—Лифшица и требует учета динамики тензорных переменных, представляющих собой квантовые средние от операторов, билинейных по компонентам спина [31, 32–37]. Можно предположить, что эффект сокращения спина может быть предложен для описания сверхбыстрого продольного «переключения» спинов [36, 37].

Необходимо также отметить, что данный эффект реализуется не только в сильно анизотропных магнетиках, но и в так называемых негейзенберговских магнетиках. Под термином «негейзенберговские магнетики» мы подразумеваем магнитоупорядоченные системы, в которых высшие спиновые инварианты вида $(\mathbf{S}_1 \mathbf{S}_2)^{2S}$, где S — величина спина магнитного иона, играют важную роль как в формировании статических, так и динамических

свойств [38–41]. Так, гамильтониан для изотропного обменного взаимодействия магнетика с $S = 1$ содержит как билинейное $(\mathbf{S}_1 \mathbf{S}_2)$, так и биквадратичное слагаемое $(\mathbf{S}_1 \mathbf{S}_2)^2$ [32, 38–44]. В работах [38, 39] было показано, что в ферримагнетиках с подрешетками $S = 1$ и $\sigma = 1/2$ при учете биквадратичного обменного взаимодействия в подрешетке со спином 1, в зависимости от соотношения материальных параметров возможна реализация как ферримагнитной фазы, характеризуемой дипольными параметрами порядка, так и фазы, состояние которой описывается как дипольными, так и тензорными параметрами порядка (квадрупольно-ферримагнитной). Причем в этом «смешанном» состоянии возможна компенсация магнитных моментов подрешеток, т. е. существует линия компенсации.

Таким образом, вопрос о свойствах негейзенберговских ферримагнетиков с учетом влияния одноионной анизотропии типа «легкая плоскость» представляет не только академический интерес, но и важное прикладное значение.

2. МОДЕЛЬ

Рассмотрим двухподрешеточный анизотропный магнетик со спином магнитного иона первой подрешетки $S = 1$ и второй — $\sigma = 1/2$ и негейзенберговским обменным взаимодействием для подрешетки с $S = 1$. При этом в первой подрешетке учитываются как билинейное, так и биквадратичное обменные взаимодействия, а также одноионная анизотропия типа «легкая плоскость». Гамильтониан такой системы можно представить в виде

$$\begin{aligned}
 H = & \\
 = & -\frac{1}{2} \sum_{n,n'} [J^{(2)}(n-n')(\mathbf{S}_n \mathbf{S}_{n'}) + K(n-n')(\mathbf{S}_n \mathbf{S}_{n'})^2] - \\
 & -\frac{1}{2} \sum_{m,m'} J^{(1)}(m-m')(\boldsymbol{\sigma}_m \boldsymbol{\sigma}_{m'}) - \\
 & -\frac{1}{2} \sum_{n,m} A(n-m)(\boldsymbol{\sigma}_m \mathbf{S}_n) + \frac{\beta}{2} \sum_n (S_n^x)^2, \quad (1)
 \end{aligned}$$

где $J^{(1)} > 0$ — константа обменного взаимодействия для подрешетки со спином $\sigma = 1/2$; $J^{(2)} > 0$, $K > 0$ — константы билинейного и биквадратичного обменных взаимодействий для $S = 1$; $A < 0$ — константа межподрешеточного взаимодействия, $\beta > 0$ — константа одноионной анизотропии типа «легкая плоскость» (базисная плоскость zy). Дальнейшее рассмотрение будем прово-

диль для случая низких температур ($T \ll T_N, T_N$ — температура Нееля).

Реализация различных фазовых состояний в исследуемой системе связана с изменением соотношения между материальными параметрами [31, 39, 43, 45–48]. Вариация параметров системы может быть связана, например, с изменением концентрации магнитных ионов, или приложением внешних механических напряжений, приводящих к деформации кристаллической решетки. В контексте данной работы не принципиально, каким образом происходит изменение материальных констант в рассматриваемой модели.

В качестве оси квантования выберем ось z . Тогда среднее значение спина для первой подрешетки будет параллельно этой оси, а второй подрешетки — антипараллельно. Такая ориентация магнитных моментов подрешеток связана с тем, что константа межподрешеточного обменного взаимодей-

ствия $A < 0$, что определяет антипараллельную ориентацию магнитных моментов подрешеток. Для удобства вычислений подвернем вторую подрешетку так, чтобы направления осей квантования обеих подрешеток совпадали. Унитарный поворот

$$U(\varphi) = \prod_i \exp(i\varphi\sigma_i^x)$$

на угол $\varphi = \pi$ приводит к следующим преобразованиям компонент оператора спина второй подрешетки:

$$\sigma_m^x \rightarrow \sigma_m^x, \quad \sigma_m^y \rightarrow -\sigma_m^y, \quad \sigma_m^z \rightarrow -\sigma_m^z.$$

Необходимо отметить, что при таких преобразованиях сохраняются стандартные коммутационные соотношения для компонент спиновых операторов. Гамильтониан исследуемой системы принимает вид

$$H = -\frac{1}{2} \sum_{m,m'} J^{(1)}(m-m')(\sigma_m^x \sigma_{m'}^x + \sigma_m^y \sigma_{m'}^y + \sigma_m^z \sigma_{m'}^z) - \frac{1}{2} \sum_{n,n'} \left[J^{(2)}(n-n') - \frac{K(n-n')}{2} \right] (S_n^x S_{n'}^x + S_n^y S_{n'}^y + S_n^z S_{n'}^z) - \frac{1}{4} \sum_{n,n'} K(n-n') \left(\frac{1}{3} O_{2n}^0 O_{2n'}^0 + O_{2n}^1 O_{2n'}^1 + \tilde{O}_{2n}^1 \tilde{O}_{2n'}^1 + O_{2n}^2 O_{2n'}^2 + \tilde{O}_{2n}^2 \tilde{O}_{2n'}^2 \right) - \frac{1}{2} \sum_{m,n} A(m-n)(\sigma_m^x S_n^x - \sigma_m^y S_n^y - \sigma_m^z S_n^z) + \frac{\beta}{4} \sum_n O_{2n}^2 + \frac{\beta}{8} \sum_n (S_n^+ S_n^- + S_n^- S_n^+), \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} S^\pm &= S^x \pm iS^y, \\ O_2^0 &= 3(S^z)^2 - S(S+1), \\ O_2^1 &= \frac{1}{2} [S^z, (S^+ + S^-)]_+, \\ \tilde{O}_2^1 &= \frac{1}{2i} [S^z, (S^+ - S^-)]_+, \\ O_2^2 &= \frac{1}{2} [(S^+)^2 + (S^-)^2], \\ \tilde{O}_2^2 &= \frac{1}{2i} [(S^+)^2 - (S^-)^2] \end{aligned}$$

— операторы Снивенса [49].

Выделяя в гамильтониане (2) средние поля, связанные как с дипольными параметрами порядка $\langle S^z \rangle$, так и с квадрупольными ($q_2^t = \langle O_2^t \rangle$), получим одноузельный гамильтониан

$$H_0 = -\bar{H}_\sigma \sigma_n^z - \bar{H}_S S_n^z - B_2^0 O_{2n}^0 - B_2^2 O_{2n}^2 + \frac{\beta}{8} (S^+ S^- + S^- S^+) + \Delta, \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{H}_S &= \left(J_0^{(2)} - \frac{K_0}{2} \right) \langle S^z \rangle - \frac{1}{2} A_0 \langle \sigma^z \rangle, \\ \bar{H}_\sigma &= J_0^{(1)} \langle \sigma^z \rangle - \frac{1}{2} A_0 \langle S^z \rangle, \\ B_2^0 &= \frac{K_0}{6} q_2^0, \\ B_2^2 &= \frac{K_0}{2} q_2^2 - \frac{\beta}{4}, \\ \Delta &= \frac{1}{2} J_0^{(1)} \langle \sigma^z \rangle^2 + \frac{1}{2} \left(J_0^{(2)} - \frac{K_0}{2} \right) \langle S^z \rangle^2 + \frac{K_0}{4} \left(\frac{(q_2^0)^2}{3} + (q_2^2)^2 \right) - \frac{1}{2} A_0 \langle S^z \rangle \langle \sigma^z \rangle. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь $J_0^{(1)}$, $J_0^{(2)}$, K_0 , A_0 — нулевые фурье-компоненты соответствующих обменных интегралов.

Корректный учет как одноионной анизотропии, так и биквадратичного обменного взаимодействия удается провести в рамках диаграммной техники для операторов Хаббарда [50–53]. Эти операторы строятся на базисах собственных функций операторов $S^z(|M\rangle, M = -1, 0, 1)$ и $\sigma^z(|m\rangle, m = -1/2, 1/2)$

соответственно, для первой $X^{M'M} = |M'\rangle\langle M|$ и второй $Y^{m'm} = |m'\rangle\langle m|$ подрешеток, и описывают переходы магнитного иона из состояния M' в состояние M и из состояния m' в состояние m . Связь спиновых операторов и операторов Стивенса с операторами Хаббарда имеет вид

$$\begin{aligned} S^z &= X^{11} - X^{-1-1}, & O_2^z &= X^{1-1} + X^{-11}, \\ O_2^0 &= X^{11} - 2X^{00} + X^{-1-1}, \\ \sigma^z &= \frac{1}{2}(Y^{1/2\ 1/2} - Y^{-1/2-1/2}), \\ \sigma^+ &= Y^{1/2-1/2}, & \sigma^- &= (\sigma^+)^+. \end{aligned}$$

Тогда в терминах операторов Хаббарда одноузельный гамильтониан (3) можно представить в виде

$$\begin{aligned} H_0 &= \\ &= -\frac{1}{2}\bar{H}_\sigma(Y^{1/2\ 1/2} - Y^{-1/2-1/2}) - \bar{H}_S(X^{11} - X^{-1-1}) - \\ &\quad - B_2^2(X^{1-1} + X^{-11}) - B_2^0(X^{11} - 2X^{00} + X^{-1-1}) + \\ &\quad + \frac{\beta}{4}(X^{11} + 2X^{00} + X^{-1-1}) + \Delta. \end{aligned} \quad (5)$$

Как видно, гамильтониан (5) является недиагональным, и для его диагонализации используем унитарное преобразование [51]

$$\tilde{H}_0 = U(\alpha)H_0U^+(\alpha),$$

явный вид которого:

$$\begin{aligned} U(\alpha) &= \\ &= 1 + (\cos \alpha - 1)(X^{11} + X^{-1-1}) + \sin \alpha(X^{1-1} - X^{-11}). \end{aligned}$$

В результате чего получим гамильтониан (5) в диагональном виде:

$$\begin{aligned} \tilde{H}_0 &= E_1X^{11} + E_0X^{00} + E_{-1}X^{-1-1} + \\ &\quad + \varepsilon_{1/2}Y^{1/2\ 1/2} + \varepsilon_{-1/2}Y^{-1/2-1/2}, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} E_1 &= -B_2^0 + \frac{\beta}{4} - \bar{H}_S \cos 2\alpha - B_2^2 \sin 2\alpha + \Delta, \\ E_0 &= -2B_2^0 + \frac{\beta}{2} + \Delta, \\ E_{-1} &= -B_2^0 + \frac{\beta}{4} + \bar{H}_S \cos 2\alpha + B_2^2 \sin 2\alpha + \Delta, \\ \varepsilon_{1/2, -1/2} &= \mp \bar{H}_\sigma \langle \sigma^z \rangle \end{aligned} \quad (7)$$

— энергетические уровни магнитных ионов первой и второй подрешеток.

Волновые функции подрешеток имеют вид

$$\begin{aligned} \psi(1) &= \cos \alpha |1\rangle + \sin \alpha |-1\rangle, & \psi(0) &= |0\rangle, \\ \psi(-1) &= -\sin \alpha |1\rangle + \cos \alpha |-1\rangle, \\ \Phi\left(\frac{1}{2}\right) &= \left|\frac{1}{2}\right\rangle, & \Phi\left(-\frac{1}{2}\right) &= \left|-\frac{1}{2}\right\rangle. \end{aligned} \quad (8)$$

Связь спиновых операторов, построенных на базе собственных функций гамильтониана (8) с операторами Хаббарда, теперь имеет вид

$$\begin{aligned} S_n^z &= \cos 2\alpha(X_n^{11} - X_n^{-1-1}) - \sin 2\alpha(X_n^{1-1} + X_n^{-11}); \\ S_n^+ &= \sqrt{2}[\sin \alpha(X_n^{01} - X_n^{-10}) + \cos \alpha(X_n^{0-1} + X_n^{10})], \\ S_n^- &= (S_n^+)^+, \end{aligned}$$

где α — параметр унитарного u - v -преобразования, определяемый соотношением

$$\bar{H}_S \sin 2\alpha = B_2^2 \cos 2\alpha.$$

Из связи спиновых операторов с операторами Хаббарда можно определить параметры порядка первой подрешетки как функцию α :

$$\langle S^z \rangle = \cos 2\alpha, \quad q_2^z = \sin 2\alpha, \quad q_2^0 = 1.$$

Вторая подрешетка описывается лишь дипольным параметром порядка $\langle \sigma^z \rangle$ и выполняет роль «подмагничивающего» поля.

3. АНАЛИЗ СВОБОДНОЙ ЭНЕРГИИ

Поскольку мы рассматриваем систему при низких температурах, то плотность свободной энергии практически совпадает с энергетическими уровнями магнитного иона основного состояния. Как следует из соотношений (7), низшими уровнями первой и второй подрешеток являются соответственно уровни E_1 и $\varepsilon_{1/2}$. Следовательно, плотность свободной энергии рассматриваемого ферримагнетика можно представить в виде

$$F = E_1 + \varepsilon_{1/2},$$

Учитывая соотношения (4) и (7), для плотности свободной энергии получим

$$\begin{aligned} F &= -\frac{1}{12}K_0 - \frac{1}{4}\beta - \frac{1}{2}J_0^{(1)}\langle \sigma^z \rangle^2 - \frac{1}{2}[J_0^{(2)} - K_0]\langle S^z \rangle^2 + \\ &\quad + \frac{1}{2}A_0\langle \sigma^z \rangle\langle S^z \rangle + \frac{\beta}{4}\sin 2\alpha. \end{aligned}$$

Учитывая, что $\langle \sigma^z \rangle = 1/2$, $\langle S^z \rangle = \cos 2\alpha$, а также то, что константа межподрешеточного взаимодействия $A < 0$, получим следующее выражение:

$$F = -\frac{1}{4} \left[\beta + \frac{4}{3} K_0 + \frac{1}{2} J_0^{(1)} \right] - \frac{1}{4} |A_0| \cos 2\alpha + \frac{\beta}{4} \sin 2\alpha - \frac{1}{2} [J_0^{(2)} - K_0] \cos^2 2\alpha. \quad (9)$$

Анализ плотности свободной энергии (9) позволяет определить параметр α u - v -преобразования при различных соотношениях материальных параметров системы.

В общем случае уравнение для параметра α в общем случае имеет вид

$$\frac{|A_0|}{2} \sin 2\alpha + \frac{\beta}{2} \cos 2\alpha + 2(J_0^{(2)} - K_0) \cos 2\alpha \sin 2\alpha = 0. \quad (10)$$

Как следует из уравнения (10), намагниченность подрешетки с $S = 1$ существенно зависит от соотношения материальных параметров, причем намагниченность подрешетки со спином 1/2 остается постоянной и играет роль «подмагничивающего» поля. Необходимо отметить, что условие $\langle \sigma^z \rangle = 1/2$ возникает естественным образом из связи z -й компоненты оператора σ с операторами Хаббарда $Y^{m'm}$ и является точным в рассматриваемом нами случае $T = 0$.

Рассмотрим подробнее решения уравнения (10) при различных соотношениях материальных параметров и низких температурах.

Так, если константа одноионной анизотропии много меньше билинейного и биквадратичного обменных взаимодействий, а билинейный обмен, в свою очередь, превышает биквадратичный ($J_0 > K_0 \gg \beta$), то при таком соотношении материальных параметров решение уравнения (10) можно представить в виде

$$\sin 2\alpha = -\frac{\beta}{4(J_0^{(2)} - K_0) + |A_0|}.$$

Поскольку мы предполагаем, что константа одноионной анизотропии является самым малым параметром системы, а $J_0 > K_0$, то $\sin 2\alpha \sim 0$, и, следовательно, $\cos 2\alpha \sim 1$, т. е. намагниченность первой подрешетки практически достигает своего максимально возможного значения $\langle S^z \rangle \approx 1$, таким образом состояние системы близко к ферримагнитному. Это означает, что в системе реализуется ферримагнит-

ное упорядочение (FiM) с векторами состояния подрешёток

$$|\Psi(1)\rangle = |1\rangle, \quad |\Phi\left(\frac{1}{2}\right)\rangle = \left|\frac{1}{2}\right\rangle,$$

и параметрами порядка

$$|\langle \sigma^z \rangle| = \frac{1}{2}, \quad \langle S^z \rangle = \cos 2\alpha \approx 1, \quad q_2^0 = 1, \quad q_2^2 \approx 0.$$

Как видно, в этом состоянии первая и вторая подрешетки близки к насыщению, но векторы намагниченности подрешеток антиколлинеарны. Необходимо отметить, что подрешетка $S = 1$ достигает насыщения асимптотически, т. е. при достаточно больших значениях константы билинейного обменного взаимодействия.

Рассмотрим теперь противоположный случай, когда преобладающим параметром первой подрешетки является биквадратичное обменное взаимодействие. В этом случае решение уравнения (10) имеет вид

$$\cos 2\alpha = \frac{|A_0|}{4(K_0 - J_0^{(2)}) + \beta}. \quad (11)$$

Поскольку $\cos 2\alpha$ определяет средний магнитный момент (на узле) первой подрешетки, эта величина должна быть положительной, т. е.

$$\frac{|A_0|}{4(K_0 - J_0^{(2)}) + \beta} > 0.$$

Кроме того, функция $\cos 2\alpha$ ограничена. Таким образом, при $K(0) > J(0) \gg \beta$ в системе реализуется состояние с намагниченностью первой подрешетки существенно меньше максимально возможного, а вторая подрешетка сохраняет насыщенное значение намагниченности ($|\langle \sigma^z \rangle| = 1/2$). Квадрупольные параметры порядка первой подрешетки в этом случае имеют вид

$$q_2^2 = \sin 2\alpha < 1, \quad q_2^0 = 1.$$

Таким образом, в системе реализуется фаза, в которой как векторный параметр порядка первой подрешетки ($\langle S^z \rangle$), так и компоненты тензора квадрупольных моментов (q_2^2) первой подрешетки принимают промежуточные значения, лежащие в интервале между нулем и единицей, а вторая подрешетка играет роль постоянного «подмагничивающего поля». Таким образом, при больших значениях константы биквадратичного обменного взаимодействия и немалой одноионной анизотропии в первой подрешетке возникает эффект квантового сокращения спина [30, 36, 41]. Такое состояние назовем квадрупольно-ферримагнитным (QFiM).

Векторы основного состояния подрешеток в QFiM-фазе имеют вид

$$|\Psi(1)\rangle = \cos \alpha |1\rangle + \sin \alpha |-1\rangle,$$

$$|\Phi\left(\frac{1}{2}\right)\rangle = \left|\frac{1}{2}\right\rangle.$$

Векторы намагниченности первой и второй подрешеток антиколлинеарны, и, следовательно, в этой фазе с учетом квантового сокращения спина первой подрешетки [30, 36, 41] возможна компенсация спинов подрешеток. Из условия $\langle S^z \rangle = -\langle \sigma^z \rangle$ и с учетом того, что $\langle \sigma^z \rangle = 1/2$, получим

$$\frac{|A_0|}{4(K_0 - J_0^{(2)}) + \beta} = -1/2.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$|A_0| = -2(K_0 - J_0^{(2)}) - \beta/2. \quad (12)$$

Таким образом, уравнение (12) описывает поверхность в переменных (J, K, A, β) на которой суммарный средний спин подрешеток равен нулю ($\langle S^z + \sigma^z \rangle = 0$). Необходимо подчеркнуть, что в данном случае речь идет именно о компенсации спинов подрешеток, а не о компенсации магнитных моментов подрешеток. Дело в том, что магнитный момент связан со спиновым моментом подрешеток соотношением $M = -g\mu_B S$, где g — коэффициент Ланде (g -фактор). Поскольку в рассматриваемой нами модели подрешетки являются не эквивалентными, то логично считать, что и g -факторы подрешеток не равны, а следовательно, не равны и магнитные моменты подрешеток на плоскости компенсации [29]. Таким образом, хотя спиновые моменты и компенсируют друг друга при определенных нами соотношениях материальных параметров, но интегральный магнитный момент при этом может быть не равен нулю и достигать достаточно большого значения, большего, например, чем для слабых ферромагнетиков (AFM с взаимодействием Дзялошинского—Мория). Причем этот результирующий магнитный момент параллелен вектору антиферромагнетизма, и динамику ферримагнетика в точке компенсации можно рассматривать как «антиферромагнитную» [29].

Уравнение (12) удобнее переписать в приведенных переменных $y = |A|/K$, $x = J/K$, $z = \beta/K$. Тогда

$$y = 2(x - 1) - z/2. \quad (13)$$

Необходимо отметить, что в отсутствие межподрешеточного обменного взаимодействия ($A = 0$)

$\langle S^z \rangle = \cos 2\alpha = 0$, т. е. параметр $\alpha = \pi/4$. Это означает, что при $A = 0$ в первой подрешетке реализуется немагнитическое состояние [42–44, 47, 48], параметры порядка которого имеют вид

$$\langle S^z \rangle = 0, \quad q_2^2 = \langle O_2^2 \rangle = 1, \quad q_2^0 = \langle O_2^0 \rangle = 1.$$

При этом «подмагничивающее поле», т. е. вторая подрешетка не оказывает никакого влияния на первую.

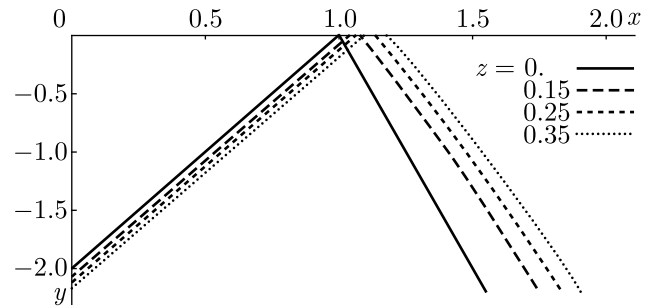
Из равенства плотности свободной энергии в FiM- и QFiM-фазах получим поверхность фазового перехода между этими фазами:

$$[|A_0| - 4(K_0 - J_0^{(2)}) - \beta]^2 + \beta[4(K_0 - J_0^{(2)}) + \beta] = 0,$$

или в приведенных переменных x, y, z

$$[y - 4(1 - x) - z]^2 + z[4(1 - x) + z] = 0. \quad (14)$$

Полученные результаты позволяют построить фазовую диаграмму исследуемой системы, причем ее удобнее изобразить в приведенных переменных на плоскости xy при различных значениях z , т. е. при различных значениях константы одноионной анизотропии β . Схематично эта диаграмма приведена на рисунке.



Сечение фазовой диаграммы легкоплоскостного негейзенберговского ферримагнетика при различных значениях константы одноионной анизотропии

Из этой фазовой диаграммы и соотношений (13) и (14) следует, что при $z = 0$ ($\beta = 0$) полученные нами результаты в точности переходят в результаты работы [38, 39], в которой исследованы фазовые состояния изотропного и обменно-анизотропного негейзенберговских ферримагнетиков. Анализ полученных в данной работе результатов свидетельствует о том, что одноионная анизотропия существенно увеличивает область существования QFiM-фазы и сдвигает как линии фазового перехода, так и линии компенсации в область больших значений билинейного обменного взаимодействия подрешетки $S = 1$. Этот результат легко

понять, если обратить внимание на выражение (11), из которого следует, что даже при $J_0^{(2)} \sim K_0$ среднее значение магнитного момента подрешетки с $S = 1$ будет меньше номинального за счет учета одноионной анизотропии.

Представляет также интерес определить тип фазового перехода QFiM–FiM. Для этого рассмотрим плотность свободной энергии (9) в окрестности фазового перехода QFiM–FiM, т. е. в окрестности линии, определяемой соотношением (14). Поскольку вторая подрешетка выполняет роль «подмагничивающего поля» и намагниченность ее в обеих фазах одинакова и постоянна ($|\langle \sigma^z \rangle| = 1/2$), сосредоточим свое внимание на первой подрешетке. Поскольку средний магнитный момент первой подрешетки равен $\cos 2\alpha$, то параметр α фактически определяет параметр порядка системы. Это утверждение требует некоторого комментария. Как уже отмечалось ранее при анализе FiM-фазы, намагниченность подрешетки с $S = 1$ достигает насыщения асимптотически. Это означает, что параметр α не точно равен нулю в FiM-фазе, а стремится к нулю также асимптотически при больших значениях билинейного обменного взаимодействия и достигает точного значения $\alpha = 0$ в изотропном случае при $\beta = 0$. Поэтому минимум плотности свободной энергии в анизотропном случае не достигается в точке $\alpha = 0$, а несколько сдвинут (в силу малости α) вблизи линии фазового перехода. Раскладывая плотность свободной энергии (9) в ряд по этому параметру в QFiM-фазе, в окрестности линии фазового перехода ($\alpha \rightarrow 0$) получим

$$F = F_0 + A\alpha + \Lambda\alpha^2 + B\alpha^3 + \Theta\alpha^4 + \dots, \quad (15)$$

где $A = \frac{\beta}{6}$, $\Lambda = 2J_0^{(2)} - 2K_0 + \frac{1}{2}|A_0|$, $B = -\frac{\beta}{9}$, $\Theta = -\frac{1}{6}|A(0)| - \frac{8}{3}J_2(0) + \frac{8}{3}K(0)$, или в переменных x, y, z

$$A = \frac{z}{6}K_0, \quad B = -\frac{z}{9}K_0,$$

$$\Lambda = \frac{K(0)}{2}(4x - 4 + y), \quad \Theta = \frac{K(0)}{6}(-y - 16x + 16).$$

Наличие линейного по α слагаемого в выражении (15) свидетельствует о том, что подрешетка $S = 1$ является ненасыщенной в FiM-фазе. Такое поведение параметра α связано с наличием квадратурных средних вида $\langle S^i S^j + S^j S^i \rangle$, которое в рассматриваемом случае есть

$$q_2^2 = \langle (S^x)^2 - (S^y)^2 \rangle = \frac{1}{2} \langle (S^+)^2 + (S^-)^2 \rangle = \sin 2\alpha.$$

Анализ плотности свободной энергии (15) позволяет трактовать фазовый переход QFiM–FiM как

фазовый переход первого рода. Поскольку коэффициент $\Theta > 0$ в QFiM-фазе, то кубическая парабола, определяемая уравнением

$$A + 2\Lambda\alpha + 3B\alpha^2 + 4\Theta\alpha^3 = 0,$$

имеет два минимума, ни один из которых не совпадает с точкой $\alpha = 0$.

В случае изотропного ферримагнетика плотность свободной энергии в окрестности линии фазового перехода QFiM–FiM имеет вид

$$F = F_0 + \Lambda\alpha^2 + \Theta\alpha^4 + \dots,$$

а величины Λ и Θ имеют вид, приведенный выше. Следовательно, в случае изотропного негејзенберговского ферримагнетика рассматриваемый фазовый переход является переходом второго рода.

4. АНАЛИЗ СПЕКТРОВ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ВОЗБУЖДЕНИЙ

Представляет интерес поведение спектров элементарных возбуждений исследуемой системы как в FiM-фазе, так и в QFiM. Особый интерес представляет поведение спектров в окрестности линии компенсации спинов подрешеток. Кроме того, эти исследования позволяют более адекватно описать фазовые переходы, реализующиеся в системе. Как известно, спектры элементарных возбуждений определяются полюсами функции Грина [54], которую в рамках техники операторов Хаббарда определим следующим образом [50, 53–55]:

$$G^{\lambda\lambda'}(n, \tau, n', \tau') = -\langle \hat{T} \tilde{X}_n^\lambda(\tau) \tilde{X}_{n'}^{\lambda'}(\tau') \rangle,$$

где $\tilde{X}_n^\lambda(\tau) = \exp(H\tau)X_n^\lambda \exp(-H\tau)$ — оператор Хаббарда в представлении Гейзенберга; \hat{T} — оператор Вика; λ — корневые векторы, определяющиеся алгеброй операторов Хаббарда [51, 54, 55]. Вывод дисперсионного уравнения подробно изложен в работах [50, 52, 55]. Дисперсионное уравнение, определяющее спектры магнонов, справедливо при произвольном соотношении материальных констант, т. е. в различных фазовых состояниях и температурном интервале существования магнитного упорядочения. В рассматриваемом нами случае $T \rightarrow 0$. Решения его определяют спектры возбуждений в различных фазах.

Очевидно, что в рассматриваемой нами системе реализуются три ветви элементарных возбуждений: две «поперечные» ветви возбуждений, связанные с прецессией магнитных моментов подрешеток,

и одна «продольная», связанная с изменением модуля магнитного момента подрешетки с $S = 1$.

Рассмотрим вначале продольную ветвь возбуждений. Спектр этой ветви в общем случае (для произвольной фазы) имеет вид

$$\varepsilon_1^2(k) = (E_{1-1} + K_k) \times (E_{1-1} + K_k + 2(J_k^{(2)} - K_k) \sin^2 2\alpha), \quad (16)$$

где

$$E_{1-1} = E_1 - E_{-1} = -K_0 - 2(J_0^{(2)} - K_0) \cos^2 2\alpha + \frac{A_0}{2} \cos 2\alpha + \frac{\beta}{2} \sin 2\alpha.$$

Рассмотрим продольную ветвь возбуждений в FiM-фазе, т. е. при $J_0 > K_0 \gg \beta$. Как было показано выше, в этой фазе

$$\langle S^z \rangle = \cos 2\alpha \approx 1, \quad \sin 2\alpha \approx -\frac{\beta}{4(J_0^{(2)} - K_0) + |A_0|} \approx 0,$$

и с учетом этого выражение (16) примет вид

$$\varepsilon_1^2(k) = \left((K_0 - K_k) + 2(J_0^{(2)} - K_0) + \frac{|A_0|}{2} \right)^2. \quad (17)$$

Как следует из этого выражения, дисперсия продольных магнонов определяется биквадратичным

обменным взаимодействием, а энергетическая щель в спектре (17) равна

$$\varepsilon_1(0) = 2(J_0^{(2)} - K_0) + \frac{|A_0|}{2}.$$

Это выражение определяет линию потери устойчивости продольной ветви элементарных возбуждений $2(J_0^{(2)} - K_0) + |A_0|/2 = 0$ при фазовом переходе из FiM-фазы в QFiM, и в переменных x, y, z эта линия имеет вид $y = 4(1 - x)$. Очевидно, что эта линия лежит ниже линии фазового перехода и совпадает с линией фазового перехода в изотропном негеизенберговском ферримагнетике (см. [45, 46]). Такое поведение линии потери устойчивости подтверждает то, что фазовый переход FiM-QFiM является переходом первого рода.

Рассмотрим теперь поведение спектра ε_1 в противоположном случае, когда преобладающим параметром первой подрешетки является биквадратичное обменное взаимодействие, т. е. $K_0 > J_0 \gg \beta$ и система находится в QFiM-фазе. В этой фазе намагниченность первой подрешетки $\langle S^z \rangle$ меньше максимально возможного:

$$\langle S^z \rangle = \cos 2\alpha \approx \frac{|A_0|}{4(K_0 - J_0^{(2)}) + \beta} < 1.$$

Учитывая это, спектр продольных магнонов можно представить в виде

$$\varepsilon_1^2(k) \approx \left((K_0 - K_k) - \frac{\beta}{2} \right) \left((K_0 - K_k) - \frac{((2(K_0 - J_0^{(2)}) + \beta/2)^2 - |A_0/2|^2)(\beta/2 - 2(K_0 - J_0^{(2)}))}{(2(K_0 - J_0^{(2)}) + \beta/2)^2} \right). \quad (18)$$

Из равенства нулю энергетической щели спектра (18) можно определить линию потери устойчивости продольной ветви возбуждений при фазовом переходе QFiM-FiM:

$$\varepsilon_1^2(0) \approx \frac{\beta}{2} \left[\left((2(K_0 - J_0^{(2)}) + \frac{\beta}{2})^2 - \left| \frac{A_0}{2} \right|^2 \right) \times \left(\frac{\beta}{2} - 2(K_0 - J_0^{(2)}) \right) \right] = 0.$$

Из последнего уравнения следует, что спектр (18) теряет устойчивость на линии

$$2(K_0 - J_0^{(2)}) + \frac{\beta}{2} - \frac{|A|}{2} = 0,$$

или в переменных x, y, z

$$y = 4(1 - x) + z.$$

Также представляет интерес исследовать спектр продольных возбуждений в окрестности линии компенсации спиновых моментов подрешеток. Учитывая, что в этой области QFiM-фазы на линии компенсации спинов подрешеток $|\langle S^z \rangle| = |\langle \sigma_z \rangle| = 1/2$, спектр (16) существенно упрощается и принимает вид

$$\varepsilon_1^2(k) = \left(-\frac{1}{2}(J_0^{(2)} - K_0) - \frac{|A_0|}{4} - \frac{\sqrt{3}\beta}{4} - (K_0 - K_k) \right) \times \left(-\frac{|A_0|}{4} - \frac{\sqrt{3}\beta}{4} - (K_0 - K_k) + (J_k^{(2)} - K_k) \right).$$

Здесь учтено, что $\cos 2\alpha = 1/2$, $\sin 2\alpha = -\sqrt{3}/2$. Кроме того, используя (12), получим, что на линии компенсации спинов спектр продольных магнонов при-

нимает «антиферромагнитный» вид

$$\varepsilon_1(k) \approx \sqrt{\frac{3}{2}} (K_0 - K_k)(K_0 - J_0).$$

Как уже отмечалось, кроме «продольной» ветви возбуждений в системе существуют две «поперечные» ветви элементарных возбуждений, которые связаны с прецессионным движением спинов подрешеток соответственно с $S = 1$ и $\sigma = 1/2$. Энергии этих возбуждений определяются решением уравнения:

$$\begin{aligned} \varepsilon^4(k) + \varepsilon^2(k) & \left[\left(\frac{A_k}{2} \right)^2 \cos 2\alpha - \left(E_{1/2-1/2} + \frac{J_k^{(1)}}{2} \right)^2 - \right. \\ & \left. - (E_{10} + J_k^{(2)})^2 + (J_k^{(2)} - K_k)^2 \sin^2 2\alpha \right] + \\ & + \left(E_{1/2-1/2} + \frac{J_k^{(1)}}{2} \right)^2 \times \\ & \times \left[(E_{10} + J_k^{(2)})^2 - (J_k^{(2)} - K_k)^2 \sin^2 2\alpha \right] + \\ & + \left(\frac{A_k}{2} \right)^2 \left[\frac{1}{4} \left(\frac{A_k}{2} \right)^2 \cos^2 2\alpha - \right. \\ & \left. - \left(E_{1/2-1/2} + \frac{J_k^{(1)}}{2} \right) \times \right. \\ & \left. \times (E_{10} + J_k^{(2)} - (J_k^{(2)} - K_k) \sin^2 2\alpha) \right] = 0, \end{aligned} \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned} E_{1-1} &= -K_0 - 2(J_0^{(2)} - K_0) \cos^2 2\alpha + \\ & + \frac{A_0}{2} \cos 2\alpha + \frac{\beta}{2} \sin 2\alpha; \\ E_{10} &= -K_0 - (J_0^{(2)} - K_0) \cos^2 2\alpha + \\ & + \frac{A_0}{4} \cos 2\alpha - \frac{\beta}{4} (1 - \sin 2\alpha); \\ E_{1/2-1/2} &= -\frac{J_0^{(1)}}{2} + \frac{A_0}{2} \cos 2\alpha. \end{aligned}$$

Как видно из структуры уравнения (19) «поперечные» ветви возбуждений являются «гибридизированными», т.е. их нельзя разделить на независимые возбуждения подрешеток, поскольку подрешетки связаны межподрешеточным обменным взаимодействием.

Конечно же уравнение (19) является биквадратным, и его решения можно записать в явном виде. Однако эти решения настолько громоздки, что они становятся затруднительными с учетом малости константы одноионной анизотропии. Поэтому можно предложить следующий анализ решения этого уравнения. Прежде всего необходимо отметить, что свободный член уравнения (19) при $k \rightarrow 0$ равен нулю. Это означает, что одна из ветвей поперечных возбуждений является безщелевой, т.е.

голдстоуновской модой. Учитывая это, представим уравнение (19) в виде

$$\varepsilon^4(k) + b(k)\varepsilon^2(k) + c(k) = 0, \quad (20)$$

где

$$\begin{aligned} c(0) &= 0, \\ b(0) &= -\frac{|A_0|}{4} \left\{ \frac{\beta(1 - \sin 2\alpha)}{2 \cos 2\alpha} + \frac{|A_0|}{4} (1 - 2 \cos 2\alpha)^2 \right\}. \end{aligned}$$

Отметим, что $b(0) < 0$.

Тогда решения уравнения (20) можно представить в виде

$$\varepsilon_{2,3}^2(k) = \frac{|b(k)|}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{|b(k)|}{2} \right)^2 - c(k)}.$$

Выделяя в этих решениях явную зависимость от волнового вектора (в длинноволновом пределе), получим

$$\begin{aligned} \varepsilon_{2,3}^2(k) &= \frac{|b(0)|}{2} \pm \frac{|b(0)|}{2} \sqrt{1 - \alpha k^2} \approx \\ &\approx \frac{|b(0)|}{2} \pm \frac{|b(0)|}{2} \left(1 - \frac{\alpha k^2}{2} \right). \end{aligned}$$

Таким образом, одна из ветвей «поперечных» возбуждений является безщелевой и пропорциональна k ($\varepsilon_2(k) \sim k$), а во второй ветви появляется энергетическая щель, пропорциональная модулю $b(0)$ ($\varepsilon_3(0) \sim |b(0)|$).

Необходимо отметить, что $\cos 2\alpha = \langle S^Z \rangle \neq 0$ ни в FiM-, ни в QFiM-фазах, т.е., как уже отмечалось, немагнитическая фаза в рассматриваемой системе не реализуется.

5. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Проведенные исследования показали, что учет даже малой одноионной анизотропии типа «легкая плоскость» в негейзенберговском ферримагнетике с подрешетками $S = 1$ и $\sigma = 1/2$ приводит к координатным изменениям как статических, так и динамических свойств системы по сравнению со случаем изотропного негейзенберговского ферримагнетика [45, 46]. В анизотропном негейзенберговском ферримагнетике, как и в изотропном, в зависимости от соотношений обменных интегралов возможна реализация как фазы, характеризующейся дипольным параметром порядка (FiM-фаза), так и фаза, характеризующаяся как векторным, так и тензорными параметрами порядка (QFiM-фаза). Однако в отличие от изотропного случая область существования

QFiM-фаза возрастает, что связано с влиянием одноионной анизотропии, которая, как и биквадратичное обменное взаимодействие, стремится установить квадрупольный (или нематический) порядок.

Кроме того, как показал термодинамический анализ свободной энергии и анализ спектров элементарных возбуждений, учет одноионной анизотропии приводит к тому, что фазовый переход QFiM-FiM является переходом первого рода в отличие от случая изотропного ферримагнетика, в котором аналогичный фазовый переход является переходом второго рода. Также нами показано, что в окрестности линии компенсации спинов подрешеток спектр продольных возбуждений имеет антиферромагнитное поведение.

Необходимо отметить, что полученные нами результаты согласуются с результатам работ [45, 46], в которых исследовались свойства изотропного и обменно-анизотропного негеизенберговских ферримагнетиков с подрешетками $S = 1$, $\sigma = 1/2$. Как уже отмечалось ранее, учет легкоплоскостной одноионной анизотропии в подрешетке с $S = 1$ существенно расширяет область устойчивости QFiM-фаза по сравнению с изотропным ферримагнетиком и, что наиболее интересно, делает переход QFiM-FiM фазовым переходом первого рода. Такое поведение рассматриваемой системы требует подробного исследования динамики системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. Slavin and V. Tiberkevich, IEEE Trans. Magn. **45**, 1875 (2009). <https://doi.org/10.1109/TMAG.2008.2009935>
2. S. D. Bader and S. S. P. Parkin, J. S. Langer (ed.), Annu. Rev. Condens. Matter Phys. **1**, 71 (2010). <http://doi.org/10.1146/annurev-conmatphys-070909-104123>
3. V. V. Kruglyak, S. Demokritov, D. Grundler. J. Phys. D **43**, 264001 (2010). <https://doi.org/10.1088/0022-3727/43/26/260301>
4. A. V. Chumak, V. I. Vasyuchka, A. A. Serga, B. Hillebrands. Nat. Phys. **11**, 453 (2015). <https://doi.org/10.1038/nphys3347>
5. H. V. Gomonay and V. M. Loktev, Low Temp Phys **40**, 17 (2014). <https://doi.org/10.1063/1.4862467>
6. V. Baltz, A. Manchon, M. Tsoi, T. Moriyama, T. Ono, and Y. Tserkovnyak, Rev. Mod Phys. **90**, 015005 (2018). <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.90.015005>
7. M. B. Jungfleisch, W. Zhang, and A. Hoffmann, Phys. Lett. A **382**, 865 (2018). <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2018.01.008>
8. В. Г. Барьяхтар, Б. А. Иванов, М. В. Четкин. УФН **146**, 417 (1985).
9. A. Ivanov and D. D. Sheka. Phys. Rev. Lett. **72**, 404 (1994).
10. Е. А. Галкина, Б. А. Иванов. Письма в ЖЭТФ. **61**, 511 (1995).
11. H. V. Gomonay and V. M. Loktev, Phys. Rev. B **81**, 144427 (2010). <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.81.144427>
12. O. A. Tretiakov, D. Clarke, G. -W. Chern, Y. B. Bazaliy, and O. Tchernyshyov, Phys. Rev. Lett. **100**, 127204 (2008). <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.100.127204>
13. E. G. Galkina, B. A. Ivanov, S. Savel'ev, and F. Nori, Phys. Rev. B **77**, 134425 (2008). <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.77.134425>
14. O. Gomonay, T. Jungwirth, and J. Sinova, Phys. Rev. Lett. **117**, 017202 (2016). <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.117.017202>
15. E. G. Galkina, B. A. Ivanov, Low Temp. Phys. **44**, 618 (2018). <https://doi.org/10.1063/1.5041427>
16. R. Cheng, D. Xiao, and A. Brataas, Phys. Rev. Lett. **116**, 207603 (2016). <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.116.207603>
17. R. Khymyn, I. Lisenkov, V. Tyberkevych, B. A. Ivanov and A. Slavin, Sci. Rep. **7**, 43705 (2017). <https://doi.org/10.1038/srep43705>
18. O. R. Sulymenko, O. V. Prokopenko, V. S. Tiberkevich, A. N. Slavin, B. A. Ivanov, and R. Khymyn, Phys. Rev. Applied **8**, 064007 (2017). <https://doi.org/10.1103/PhysRevApplied.8.064007>
19. B. A. Ivanov and A. L. Sukstanski, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **84**, 370 (1983).
20. K. J. Kim, S. K. Kim, Y. Hirata, Se-Hyeok Oh, T. Tono, D. H. Kim, T. Okuno, W. S. Ham, S. Kim, G. Go, Y. Tserkovnyak, A. Tsukamoto, T. Moriyama, K. -J. Lee, and T. Ono, Nature Mater. **16**, 1187 (2017). <https://doi.org/10.1038/nmat4990>
21. Е. Г. Галкина, К. Э. Заспел, Б. А. Иванов, Н. Е. Кулагин, Л. М. Лерман. Письма в ЖЭТФ **110**, 474 (2019). <https://doi.org/10.1134/S0370274X1919007X>

22. S. K. Kim and Y. Tserkovnyak, Appl. Phys. Lett. **111**, 032401 (2017). <https://doi.org/10.1063/1.4985577>
23. C. E. Zaspel, E. G. Galkina, and B. A. Ivanov, Phys. Rev. Appl. **12**, 044019 (2019). <https://doi.org/10.1103/PhysRevApplied.12.044019>
24. Lisenkov, R. Khymyn, J. Åkerman, N. X. Sun, and B. A. Ivanov, Phys. Rev. B **100**, 100409(R) (2019). <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.100.100409>
25. Radu, K. Vahaplar, C. Stamm, T. Kachel, N. Pontius, H. A. Dürr, T. A. Ostler, J. Barker, R. F. L. Evans, R. W. Chantrell, A. Tsukamoto, A. Itoh, A. Kirilyuk, Th. Rasing, and A. V. Kimel, Nature London **472**, 205 (2011). <https://doi.org/10.1038/nature09901>
26. T. A. Ostler, J. Barker, R. F. L. Evans, R. Chantrell, U. Atxitia, O. Chubykalo-Fesenko, S. El Moussaoui, L. Le Guyader, E. Mengotti, L. J. Heyderman, F. Nolting, A. Tsukamoto, A. Itoh, D. V. Afanasiev, B. A. Ivanov, A. M. Kalashnikova, K. Vahaplar, J. Mentink, A. Kirilyuk, Th. Rasing, and A. V. Kimel, Nature Commun. **3**, 666 (2012). <https://doi.org/10.1038/ncomms1666>
27. J. H. Mentink, J. Hellsvik, D. V. Afanasiev, B. A. Ivanov, A. Kirilyuk, A. V. Kimel, O. Eriksson, M. I. Katsnelson, and Th. Rasing, Phys. Rev. Lett. **108**, 057202 (2012). <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.108.057202>
28. В. Г. Барьяхтара, В. И. Бутрим, Б. А. Иванов, Письма в ЖЭТФ **98**, 327 (2013). <https://doi.org/10.1134/S00213640131800>
29. B. A. Ivanov, Low Temp. Phys. **45**, 935 (2019). <https://doi.org/10.1063/1.5121265>
30. Yu. A. Fridman and O. A. Kosmachev, Phys. Solid State **51** (6), 1167 (2009). DOI: 10.1134/S1063783409060146
31. Э. Л. Нараев, УФН **136**, 61 (1982).
32. V. M. Loktev and V. S. Ostrovskii, Low Temp. Phys. **20**, 775 (1994).
33. T. Moriya, Phys. Rev. **117**, 635 (1960).
34. Yu. N. Mitsay, Yu. A. Fridman, D. V. Spirin, M. S. Kochmanski. Acta Phys. Pol. **97**, 355 (2000). <https://doi.org/10.12693/APhysPolA.97.355>
35. Yu. A. Fridman, and O. A. Kosmachev. J. Magn. Magn. Mater. **236**, 272 (2001). [https://doi.org/10.1016/S0304-8853\(01\)00464-4](https://doi.org/10.1016/S0304-8853(01)00464-4)
36. E. G. Galkina, V. I. Butrim, Yu. A. Fridman, B. A. Ivanov, and F. Nori, Phys. Rev. B **88**, 144420 (2013). <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.88.144420>
37. E. G. Galkina, B. A. Ivanov, and V. I. Butrim, Low Temp. Phys. **40**, 635 (2014). <https://doi.org/10.1063/1.4890989>
38. A. F. Andreev and I. A. Grishchuk, Sov. Phys. JETP **60**, 267 (1984).
39. Е. Л. Нараев, *Магнетики со сложными обменными взаимодействиями*, Наука, Москва (1988).
40. B. A. Ivanov and A. K. Kolezhuk, Phys. Rev. B **68**, 052401 (2003). <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.68.052401>
41. V. G. Bar'yakhtar, V. I. Butrim, A. K. Kolezhuk, and B. A. Ivanov, Phys. Rev. B **87**, 224407 (2013).
42. E. G. Galkina, B. A. Ivanov, O. A. Kosmachev and Yu. A. Fridman. Low Temp. Phys. **41**, 382 (2015). <http://dx.doi.org/10.1063/1.4921470>
43. Yu. A. Fridman, O. A. Kosmachev, and Ph. N. Klevets, J. Magn. Magn. Mater. **325**, 125 (2013). <http://dx.doi.org/10.1016/j.jmmm.2012.08.027>
44. A. Läuchli, G. Schmid, and S. Trebst, Phys. Rev. B **74**, 144426 (2006). <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.74.144426>
45. A. V. Krivtsova, Ya. Yu. Matyunina, E. A. Polyanskaya, O. A. Kosmachev, and Yu. A. Fridman, J. Magn. Magn. Mater. **513**, 167178 (2020). <https://doi.org/10.1016/j.jmmm.2020.167178>
46. А. В. Кривцова, Я. Ю. Матюнина, Ю. А. Фридман, ЖЭТФ **158**, 334 (2020). DOI: 10.1134/S1063776120060059
47. N. Papanikolaou, Nucl. Phys. B **305**, 367 (1988).
48. A. V. Chubukov, J. Phys. Condens. Matter **2**, 1593 (1990).
49. K. Stevens, Proc. Phys. Soc. A **65**, 209, (1952)
50. R. O. Zaitsev, Sov. Phys. JETP **41**(1), 100 (1975).
51. В. В. Вальков, ТМФ **76:1**, 143 (1988).
52. Yu. A. Fridman, O. A. Kosmachev, and Ph. N. Klevets, J. Magn. Magn. Mater. **320**, 435 (2008). DOI:10.1016/j.jmmm.2007.07.001
53. Ю. Н. Мицай, Ю. А. Фридман, ТМФ **81:2**, 263 (1989).
54. В. В. Вальков, С. Г. Овчинников, *Квазичастицы в сильно коррелированных системах*, Изд-во СО РАН, Новосибирск (2001).
55. В. В. Вальков, Т. А. Валькова, С. Г. Овчинников. ЖЭТФ **88**, 550 (1985).