ЖЭТФ, 2022, том 162, вып. 5 (11), стр. 663–672

О МАССОВОЙ ФУНКЦИИ НА ВНУТРЕННЕМ ГОРИЗОНТЕ РЕГУЛЯРНОЙ ЧЕРНОЙ ДЫРЫ

М. З. Иофа

Научно-исследовательский институт ядерной физики им. Д.В. Скобельцына, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
119991, Москва, Россия

Поступила в редакцию 23 июня 2022 г.,
после переработки 28 июня 2022 г.
Принята к публикации 28 июня 2022 г.

Пересмотрены и заново проведены расчеты внутренней массовой функции регулярной черной дыры Хейворда с потоками. Представлены подробные расчеты внутренней массовой функции в двух формах подхода Ори (входящий поток непрерывен, исходящий поток моделируется тонкой нулевой оболочкой) и проведено их сравнение с расчетами для черной дыры Рейснера–Нордстрема. Обсуждается формальная причина различия результатов. Вычислена плотность энергии скалярных возмущений, распространяющихся от горизонта событий в черную дыру Хейворда, измеренная свободно падающим наблюдателем вблизи внутреннего горизонта.

DOI: 10.31857/S0044451022110062
EDN: KYQOMT

1. ВВЕДЕНИЕ

Решения для черных дыр в общей теории относительности — Шварцшильда, Рейснера–Нордстрема и Керра–Ньюмена — имеют центральную сингулярность при $r = 0$, что считается нежелательным в моделях астрофизических черных дыр. Регулярные черные дыры были предложены как конфигурации, в которых центральная сингулярность заменяется несингулярным ядром [1–7]. Регулярные черные дыры являются статическими, сферически-симметричными и удовлетворяют слабому энергетическому условию. Они удобны для лучшего понимания процессов образования и испарения черных дыр.

В настоящей работе мы обсуждаем черную дыру Хейворда [3], которая является очень простой реализацией несингулярной черной дыры и может рассматриваться как регуляризация решения Шварцшильда. За пределами горизонта событий обе геометрии имеют одинаковый асимптотический вид при $r \to \infty$. Важное различие между черными дырами Шварцшильда и Хейворда состоит в том, что черная дыра Хейворда может совсем не иметь горизонта, иметь один двойной горизонт или два горизонта. В последнем случае черной дыры Хейворда с двумя горизонтами ее причинная структура аналогична структуре решений Рейснера–Нордстрема и Керра–Ньюмена. В этих черных дырах внутренний горизонт — это горизонт Коши, нулевая гиперповерхность, за пределами которой предсказательная сила теории теряется.

В процессе коллапса звезды и образования черной дыры возникает исходящий поток излучения, который, после частичного отражения от потенциала вблизи внешнего горизонта, приводит к появлению потока излучения, идущего в черную дыру [8]. Этот поток частично отражается потенциалом вблизи внутреннего горизонта и порождает исходящий поток. Внутренний горизонт представляет собой поверхность бесконечного голубого смещения, и в работах [9–16], а также во многих последующих работах было показано, что свободно падающий наблюдатель вблизи горизонта Коши черных дыр Рейснера–Нордстрема и Керра–Ньюмена увидит неограниченную плотность энергии скалярного, электромагнитного и гравитационного полей. Это интерпретировалось как нестабильность горизонта Коши относительно внешних возмущений.

Эти свойства позволяют ожидать, что присутствие вблизи внутреннего горизонта только входящего потока с голубым смещением (хвост излучения Прайса [8]) приведет к увеличению внутренней массовой функции. Однако в статье [17] на примере черной дыры Рейснера–Нордстрема (РН) было показано, что одного входящего потока с голубым смещением недостаточно для неограниченного увеличения внутренней массовой функции (т. е. для массовой инфляции). А именно, было показано, что массовая инфляция возникает только как совокупный эффект входящего и исходящего потоков. Массовая инфляция приводит к увеличению кривизны на внутреннем горизонте, и вместо горизонта Коши появляется сингулярность кривизны, экранирующая этот горизонт. В работе [17] входящие и исходящие потоки моделируются входящими и исходящими заряженными решениями Вайдьи [18], которые, в свою очередь, моделировались тонкими нулевыми оболочками светоподобных частиц, проходящими друг через друга без взаимодействия. Пространство-время разделено пересекающимися потоками на четыре области, метрика в каждой из которых характеризуется своей массой. Массовая инфляция исходящего потока возникает, когда входящая оболочка находится вблизи горизонта Коши. Решение для внутренней массовой функции было получено с использованием соотношения Дрэя–'т Хоофта–Рэдмонда (ДТР) [19, 20] между массами в метриках четырех областей. Сингулярность на горизонте Коши аналитически обсуждалась в работах [21–24] и в ряде других работ, цитируемых в них.

В статье [25] задача массовой инфляции для черной дыры РН с потоками изучалась путем моделирования исходящего излучения нулевой тонкой оболочкой, при этом входящий поток излучения Прайса считался непрерывным (подход Ори). В этой модели из уравнений Эйнштейна с учетом непрерывности проходящего через оболочку потока было получено соотношение, связывающее между собой массы метрик пространства-времени внутри и вне оболочки, которое предсказывало массовую инфляцию вблизи внутреннего горизонта [21, 25, 26].

Поскольку причинная структура черной дыры Хейворда аналогична структуре черной дыры РН, естественно задать вопрос, происходит ли в черной дыре Хейворда с потоками массовая инфляция. Этот вопрос обсуждался в рамках подхода Ори с использованием обобщенной конструкции ДТР [27] в работе [6] для "петлевой черной дыры" и в работах [28–30] для черной дыры Хейворда. Несколько удивительным результатом было то, что, в отличие от черной дыры РН, в случае регулярных черных дыр (петлевых или Хейворда) подход Ори не приводит к массовой инфляции. Однако использование (обобщенного) соотношения ДТР в этих моделях приводит к массовой инфляции.

В настоящей работе мы даем обзор предыдущих расчетов внутренней массовой функции и представляем подробные расчеты этой функции в двух вариантах подхода Ори. Мы сравниваем наши результаты с расчетами для черной дыры РН. А именно, мы показываем, что, как и в случае черной дыры РН, в черной дыре Хейворда с входящим потоком плотность энергии вблизи внутреннего горизонта, измеренная свободно падающим наблюдателем, неограниченно возрастает, указывая на то, что как черные дыры Хейворда, так и черные дыры РН нестабильны относительно внешних возмущений.

2. ВНУТРЕННЯЯ МАССОВАЯ ФУНКЦИЯ В МОДЕЛИ ХЕЙВОРДА

Метрика черной дыры Хейворда является решением уравнений Эйнштейна и имеет вид [3]

$$ds^2 = -f(r)dv^2 + 2dvdr + r^2 d\Omega^2, \tag{1}$$

где

$$f(r) = 1 - \frac{M(r)}{r} = 1 - \frac{2mr^2}{2ml^2 + r^3}. \tag{2}$$

Параметризация метрики подробно описана в работе [3], включая вид соответствующего тензора энергии-импульса.[1)] Метрика может совсем не иметь горизонта, иметь один двойной или два горизонта. Мы обсуждаем случай с двумя горизонтами. Если масса m является функцией запаздывающего или опережающего времени v, $m = m(v)$, метрика принимает вид

$$ds^2 = -f(r,v)dv^2 - 2dvdr + r^2 d\Omega^2, \tag{3}$$

и появляется дополнительная компонента тензора энергии-импульса T^r_v.

В случае наличия входящего и исходящего потоков энергии исходящий поток, следуя подходу Ори [25], моделируется тонкой нулевой оболочкой Σ. Эта оболочка делит внутреннюю часть черной дыры на внешнюю V_+ и внутреннюю V_- области. В обеих частях $V_\pm$ метрика имеет вид (3) с разными $v_\pm$ и $m_\pm$. Переменную r можно считать непрерывной при переходе через оболочку [27, 31].

[1)] Отметим, что в используемой нами системе единиц гравитационная постоянная включена в параметр m, который в таком случае имеет размерность длины.

Для метрики (2), (3) уравнения Эйнштейна принимают вид [27,31]

$$\frac{\partial M_\pm}{\partial r} = -4\pi r^2 T_v^v, \qquad \frac{\partial M_\pm}{\partial v_\pm} = 4\pi r^2 T_v^r. \tag{4}$$

Непрерывность метрики при переходе через оболочку приводит к уравнению

$$(f_+ dv_+ = f_- dv_-)|_\Sigma = 2dr. \tag{5}$$

Ниже мы будем обозначать

$$v_+ \equiv v,\ \ f_+(v_+) = f(v).$$

Непрерывность потока через оболочку

$$[T_{\mu\nu} n^\mu n^\nu] = 0,\ \ [A] = A_+ - A_-,$$

где n^μ обозначает нормаль к оболочке, записывается как

$$\frac{T_{v_+ v_+}}{f_+^2} = \frac{T_{v_- v_-}}{f_-^2}\bigg|_\Sigma. \tag{6}$$

Переменная v_- определяется из уравнения (5) как функция v:

$$\frac{dv_-(v)}{dv} = \frac{f(v)}{\tilde f_-(v)}\bigg|_\Sigma, \tag{7}$$

где

$$\tilde f_-(v) = f_-(v_-(v)).$$

Точно так же

$$\tilde m_-(v) = m_-(v_-(v)).$$

Мы также имеем

$$\frac{\partial \tilde M_-(v)}{\partial v} = \frac{\partial M_-(v_-)}{\partial v_-}\frac{f(v)}{\tilde f_-(v)}\bigg|_\Sigma. \tag{8}$$

Из уравнений (6) и (8) получаем

$$\frac{1}{f(v)}\frac{\partial M_+}{\partial v}\bigg|_\Sigma = \frac{1}{\tilde f_-(v)}\frac{\partial \tilde M_-}{\partial v}\bigg|_\Sigma. \tag{9}$$

Уравнение (9) будет использоваться для нахождения массовой функции $\tilde m_-(v)$.

2.1. Массовая функция из условия непрерывности потока через оболочку

В случае черной дыры с входящим потоком Прайса [8] массовая функция в области V_+ есть $m_+ = m_0 - \delta m_{pr}$, где m_0 — масса без учета потока Прайса, а $\delta m_{pr}(v) = \beta/v^p,\ \ p \ge 12$. Будем полагать, что $m_0 \gg l$.

Без потока Прайса горизонты черной дыры определяются из уравнения $f(r, m_0) = 0$, или, эквивалентно, из уравнения

$$r^3 - 2m_0(r^2 - l^2) = 0. \tag{10}$$

Внешний горизонт расположен при

$$r_+ \simeq 2m_0 - l^2/2m_0 + \cdots,$$

внутренний горизонт находится при

$$r_- \simeq l\left(1 + \frac{l}{4m_0} + \frac{5}{2}\left(\frac{l}{4m_0}\right)^2 + \cdots\right) \equiv$$
$$\equiv l(1 + \eta + 5\eta^2/2 + \cdots). \tag{11}$$

В случае с потоками расположение горизонтов следующее:

$$r_+(v) \simeq r_+ - \delta r_+(v), \qquad r_-(v) \simeq r_- + \delta r_-(v). \tag{12}$$

В первом порядке по δm_{pr} величина δr_- определяется из уравнения

$$f_{,r}(r_-, m_0)\delta r_- - f_{,m}(r_-, m_0)\delta m_{pr} = 0,$$

что дает

$$\delta r_- = \delta m_{pr}\, f_{,m}(r_-, m_0)/f_{,r}(r_-, m_0). \tag{13}$$

Оболочка, моделирующая исходящий поток, расположена на радиусе

$$r_{shell} = r_s,$$

а вблизи внутреннего горизонта мы можем написать

$$r_s = r_- + y(v),\ \ r_- > y(v).$$

Расположение оболочки определяется уравнением нулевой геодезической (5)

$$2\dot r_s(v) = f(r_s, m_+(v)) =$$
$$= f(r_- + y(v), m_0 - \delta m_{pr}(v)). \tag{14}$$

Здесь точка обозначает производную по переменной v. В первом порядке по y и δm_{pr} получаем

$$2\dot y = f_{,r}(r_-, m_0)y - f_{,m}(r_-, m_0)\delta m_{pr}, \tag{15}$$

где

$$f_{,r}(m_0, r_-) = 2m_0 r_- \frac{r_-^3 - 4m_0 l^2}{(r_-^3 + 2m_0 l^2)^2} \simeq$$
$$\simeq -\frac{2}{l}(1 - 4\eta), \tag{16}$$

$$f_{,m}(m_0, r_-) = -\frac{2r_-^5}{(r_-^3 + 2m_0 l^2)^2} \simeq$$

$$\simeq -\frac{l}{2m_0^2}(1+\eta). \qquad (17)$$

Решая уравнение (15), получаем

$$y(v) = e^{-v|f_{,r}|/2}\left(C - \int^v dv e^{v|f_{,r}|/2}\delta m_{pr}\frac{f_{,m}}{2}\right). \qquad (18)$$

В пределе $v \to \infty$ величина $y(v)$ примерно равна

$$y(v) \simeq \frac{l^2}{4m_0^2}\delta m_{pr}(1+5\eta) - \delta\dot{m}_{pr}\frac{l^3}{4m_0^2}(1+9\eta). \qquad (19)$$

Если положение оболочки определяется относительно зависящего от v горизонта $r_-(v)$, $r_s = r_-(v) + z(v)$, то $z(v)$ определяется из уравнения геодезической

$$2(\dot{z} + \delta\dot{r}_-) =$$

$$= f_{,r}(r_-, m_0)(\delta r_- + z) - f_{,m}(r_-, m_0)\delta m_{pr}, \qquad (20)$$

где

$$\delta r = \delta m_{pr}(l^2/4m_0^2)(1+5\eta).$$

Асимптотическое решение уравнения (20) имеет вид

$$z(v) =$$

$$= e^{-v|f_{,r}|/2}\left(C - \int^v dv e^{v|f_{,r}|/2}\delta m_{pr}\frac{l^2}{4m_0^2}(1+5\eta)\right) \simeq$$

$$\simeq -\delta\dot{m}_{pr}\frac{l^3}{4m_0^2}(1+9\eta). \qquad (21)$$

Члены, пропорциональные δm_{pr}, сокращаются. Положение оболочки в обоих расчетах есть

$$r_s(v) \simeq r_- + \frac{l^2}{4m_0^2}\delta m_{pr}(1+5\eta) - \frac{l^3}{4m_0^2}\delta\dot{m}(1+9\eta). \qquad (22)$$

Используя уравнение (9), найдем внутреннюю массовую функцию $\tilde{m}_-(v)$. Сначала мы вычислим

$$R_+ \equiv \frac{1}{f(v)}\frac{\partial M_+}{\partial v} =$$

$$= \frac{r_s^6\dot{m}_+}{(r_s^3 + 2l^2 m_+)(r_s^3 - 2m_+(r_s^2 - l^2))} =$$

$$= \frac{r_s^6\dot{m}_+}{2\dot{r_s}(2m_+ l^2 + r_s^3)^2}. \qquad (23)$$

Здесь мы использовали уравнение геодезической для оболочки, записанное в виде

$$r_s^3 - 2m_+(r_s^2 - l^2) = 2\dot{r_s}(2m_+ l^2 + r_s^3).$$

Используя уравнение (22) и сохраняя в (23) ведущие члены по δm_{pr}, имеем

$$R_+ \simeq -\frac{r_s^6}{2l^6(1+9\eta)}. \qquad (24)$$

Уравнение для внутренней массовой функции $\tilde{m}_-$ имеет вид

$$R_- \equiv \frac{1}{\tilde{f}_-(v)}\frac{\partial\tilde{M}_-}{\partial v} =$$

$$= \frac{r_s^6\dot{\tilde{m}}_-}{-4\tilde{m}_-^2 l^2(r_s^2 - l^2) + 2\tilde{m}_- r_s^3(2l^2 - r_s^2) + r_s^6} =$$

$$= -\frac{r_s^6}{2l^6(1+9\eta)}. \qquad (25)$$

Используя соотношения

$$r_s^2 - l^2 \simeq l^2[(1+\eta+5\eta^2/2+\cdots)^2 - 1] \simeq \frac{l^3}{2m_0}(1+3\eta),$$

$$2l^2 - r_s^2 \simeq l^2(1-2\eta), \qquad (26)$$

перепишем уравнение (25) как

$$\dot{\tilde{m}}_- =$$

$$= \frac{1}{1+9\eta}\left[\frac{\tilde{m}_-^2}{2m_0 l}(1+3\eta) - \frac{\tilde{m}_-}{l}(1+\eta) - \frac{1}{2}(1+6\eta)\right], \qquad (27)$$

а затем преобразуем его к виду

$$\dot{\tilde{m}}_- = \frac{1-6\eta}{m_0 l}\times$$

$$\times\left[\left(\tilde{m}_- \frac{m_0}{2}(1-2\eta)\right)^2 -\right.$$

$$\left.-\frac{m_0^2}{4}(1-2\eta)^2 - \frac{m_0 l}{2}(1+3\eta)\right] \simeq$$

$$\simeq \frac{1-6\eta}{m_0 l}\left[\left(\tilde{m}_- - \frac{m_0}{2}(1-2\eta)\right)^2 -\right.$$

$$\left.-\left(\frac{m_0}{2}(1+2\eta)\right)^2\right]. \qquad (28)$$

Интегрируя уравнение (28), найдем

$$\frac{1}{m_0(1+2\eta)}\times$$

$$\times\ln\left|\frac{(\tilde{m}_- - m_0(1-2\eta)/2) - m_0(1+2\eta)/2}{(\tilde{m}_- - m_0(1-2\eta)/2) + m_0(1+2\eta)/2}\right| =$$

$$= Cv/2l. \qquad (29)$$

В пределе $v \to \infty$ получим

$$\tilde{m}_- = -2m_0\eta = -\frac{l}{2}. \qquad (30)$$

Отрицательное значение для m_- обсуждалось в работе [6] для петлевой черной дыры и в работе [29] для черной дыры Хейворда, и, в частности, было отмечено, что внутренняя массовая функция $m_-(v)$ не является непосредственно измеряемой величиной, так что результат может быть артефактом параметризации.

2.2. Массовая функция в дважды нулевых координатах

Вычислим внутреннюю массовую функцию, следуя первоначальному подходу Ори [25]. Как и выше, оболочка разделяет внутреннюю часть черной дыры на две области $V_\pm$ с разными $v_\pm$ и $m_\pm$; координата r непрерывна при переходе через оболочку. В дважды нулевых координатах метрика имеет вид

$$ds^2 = -2e^\sigma dUdV + r^2 d\Omega.$$

Координата U полагается равной нулю на оболочке. Поскольку в оболочке нет давления, можно ввести аффинный параметр λ с обеих ее сторон [27,31]. Координата V равна λ вдоль оболочки. Координата положения оболочки $r_s = r_- + y(v)$ (см. (22)) теперь записывается как $r_s = R(\lambda) = r(V = \lambda, U = 0)$. Предполагается, что оболочка достигает внутреннего горизонта при $v \to \infty$ или, эквивалентно, при $\lambda = 0$. Далее мы пишем $v_+ = v$.

Уравнение геодезической для оболочки имеет вид

$$R'/v'_\pm = \frac{1}{2} f_\pm(m_\pm(v), R), \tag{31}$$

где штрих обозначает производную по λ. Определим

$$z_\pm = R/v'_\pm. \tag{32}$$

Дифференцируя уравнение (32),

$$z'_\pm = R'/v'_\pm - R v''_\pm / {v'_\pm}^2,$$

и используя уравнение геодезической для $v(\lambda)$

$$v''_\pm + \frac{1}{2} f_{\pm,r} {v'_\pm}^2 = 0, \tag{33}$$

получим уравнение

$$2z'_\pm = f_\pm + R f_{\pm,r}. \tag{34}$$

Со стороны (+) оболочки уравнение (34) принимает вид

$$z'_+ = \frac{1}{2}\left(1 - 12\frac{m_+^2 R^2 l^2}{(R^3 + 2m_+ l^2)^2}\right), \tag{35}$$

или

$$z'_+ \simeq -1 - 2\left(l/4m_0 + \delta m_{pr}/m_0 + \delta y/l\right). \tag{36}$$

Здесь мы положили $R(\lambda) = r_- + y(R, v)$ и $m_+ = m_0 - \delta m_{pr}$. Интегрируя уравнение (35), получаем $z_+ \simeq Z_+ - \lambda$. Из уравнения (32) следует, что

$$v_+ = \int^\lambda d\lambda \frac{R}{z_+} \simeq r_- \ln\frac{1}{\lambda}. \tag{37}$$

В уравнении (37) Z_+ положено равным нулю, чтобы иметь $v_+ \to \infty$ при $\lambda \to 0$.

Дифференцируя (31) по λ, имеем

$$v''_\pm = 2(R'' f_\pm - R' f'_\pm)/f_\pm^2.$$

Подставляя v'' в уравнение (33), получаем уравнение для f (см. также [29])

$$f(R)\,\frac{R''}{R'} = f'(R) - f_{,r}(R) R'. \tag{38}$$

В случае $f = f_-$,

$$f_-(\tilde m_-(v), R) = 1 - \frac{2\tilde m_-(v) R^2}{R^3 + 2\tilde m_-(v) l^2},$$

преобразуя уравнение (38), мы получаем

$$\frac{R''}{2R'} f_-(\tilde m_-(v), R) = -\frac{\tilde m'_- R^5}{(R^3 + 2\tilde m_- l^2)^2}. \tag{39}$$

Подставляя

$$R(v(\lambda)) = r_s \simeq r_- + \delta m(v) l^2/4m_0^2,$$

имеем

$$\frac{R''}{R'} = \frac{p(p+1)v^{-p-2}{v'}^2 - p v^{-p-1} v''}{-p v^{-p-1} v'} =$$

$$= -(p+1)\frac{v'}{v} + \frac{v''}{v'} \simeq -\frac{1}{\lambda}.$$

Уравнение (39) принимает вид

$$\tilde m'_- = -\frac{1}{2\lambda\, R^5}[4\tilde m_-^2 l^2 (R^2 - l^2) - 2\tilde m_- R^3 (2l^2 - R^2) - R^6]. \tag{40}$$

Замечая, что

$$\tilde m'_- = \frac{d\tilde m(v)}{dv}\left(-\frac{r_-}{\lambda}\right),$$

находим

$$\dot{\tilde m}_- = \frac{2l^2(r_-^2 - l^2)}{r_-^6} \times$$

$$\times\left[\tilde m_-^2 - 2\tilde m_- \frac{r_-^3(2l^2 - r_-^2)}{4l^2(r_-^2 - l^2)} - \frac{r_-^6}{4l^2(r_-^2 - l^2)}\right]. \tag{41}$$

В уравнении (41) мы узнаем структуру уравнения (25). С помощью (26) уравнение (41) принимает ту же форму, что и (28).

3. ЧЕРНАЯ ДЫРА ХЕЙВОРДА В СРАВНЕНИИ С ЧЕРНОЙ ДЫРОЙ РН

Сравним черную дыру Хейворда и черную дыру РН с потоком Прайса. Для дыры РН функция $f(v)$ в уравнении (1) есть

$$f(v) = 1 - \frac{2m(v)}{r} + \frac{e^2}{r^2}. \qquad (42)$$

Мы предполагаем, что $m^2(v) \gg e^2$. Масса черной дыры m_+ равна $m_0 - \delta m_{pr}$, $m_0 \gg \delta m_{pr}$. Без потока Прайса положения горизонтов определяются из уравнения $f(r, m_0) = 0$. Внешний и внутренний горизонты расположены в $\tilde{r}_+ = m_0 + \sqrt{m_0^2 - e^2}$ и $\tilde{r}_- = m_0 - \sqrt{m_0^2 - e^2}$. В случае с потоком, положения горизонтов даются соотношениями

$$r_+ = \tilde{r}_+ \left(1 - \frac{\delta m_{pr}}{\sqrt{m_0^2 - e^2}}\right),$$

$$r_- = \tilde{r}_- \left(1 + \frac{\delta m_{pr}}{\sqrt{m_0^2 - e^2}}\right). \qquad (43)$$

Оболочка, моделирующая исходящий поток, находится вблизи внутреннего горизонта в точке $r_s(v) = r_-(v) + y(v)$. Ниже мы используем обозначения предыдущего раздела.

Положение нулевой оболочки определяется уравнением геодезической $2\dot{r_s} = f(r_s, m_+)$. Замечая, что $f(\tilde{r}_-, m_0) = 0$, и разлагая функцию $f(r_s, m(v))$ до первого порядка по y и δm_{pr}, получаем

$$2\left(\dot{y} + \frac{\delta \dot{m}_{pr}}{\kappa \tilde{r}_-}\right) =$$

$$= f_{,r}(\tilde{r}_-, m_0)\left(y + \frac{\delta m_{pr}}{\kappa \tilde{r}_-}\right) - f_{,m}(\tilde{r}_-, m_0)\delta m_{pr}, \quad (44)$$

где

$$r_s = \tilde{r}_- + y + \frac{\delta m_{pr}}{k\tilde{r}_-}, \qquad \kappa = \frac{\sqrt{m_0^2 - e^2}}{\tilde{r}_-^2},$$

$$f_{,r}(\tilde{r}_-, m_0) = -2\kappa, \qquad f_{,m}(\tilde{r}_-, m_0) = -\frac{2}{\tilde{r}_-}. \qquad (45)$$

Подставляя выражения (45) в (44), мы перепишем уравнение (44) в виде

$$\dot{y} + \kappa y \simeq -\frac{\delta \dot{m}_{pr}}{\kappa \tilde{r}_-}. \qquad (46)$$

Отметим, что, так же как и в уравнении (22), члены, пропорциональные δm_{pr}, сократились. Решение уравнения (46) есть

$$y(v) = e^{-\kappa v}\left(C - \int^v dv e^{+\kappa v} \frac{\delta \dot{m}_{pr}}{\kappa \tilde{r}_-}\right). \qquad (47)$$

В пределе $v \to \infty$ решение уравнения (47) упрощается до

$$y(v) \simeq -\frac{\delta \dot{m}_{pr}}{\tilde{r}_- \kappa^2}.$$

Нулевая оболочка расположена в точке

$$r_s = \tilde{r}_- + \frac{\delta m_{pr}}{\tilde{r}_- \kappa} - \frac{\delta \dot{m}_{pr}}{\tilde{r}_- \kappa^2}. \qquad (48)$$

Найдем внутреннюю массовую функцию. С помощью соотношений (4)–(6) условие непрерывности потока через оболочку записывается как

$$\frac{\dot{\tilde{m}}_-(v_-(v))}{\tilde{f}_-(\tilde{m}_-, v)} = \frac{\dot{m}_+(v)}{f(v)}. \qquad (49)$$

Используя уравнение геодезической для нахождения положения оболочки, $f(v) = 2\dot{r}_s$, и записывая $f_-(\tilde{m}_-, v) = f(v) + 2(m_+ - \tilde{m}_-)/r_s$, получаем уравнение (49) в виде

$$\frac{\dot{\tilde{m}}_-(v)}{2\dot{r}_s + 2(m_+ - \tilde{m}_-)/r_s} = -\frac{\delta \dot{m}_{pr}}{2\dot{r}_s}, \qquad (50)$$

Из уравнения (48) имеем

$$\frac{\delta \dot{m}_{pr}}{2\dot{r}_s} = \frac{\kappa \tilde{r}_-}{2}\left(1 + \frac{p+1}{v\kappa}\right). \qquad (51)$$

Пренебрегая в левой части уравнения (50) малым членом $\dot{r}_s$, получаем

$$\dot{\tilde{m}}_- \simeq (\tilde{m}_- - m_0)\kappa\left(1 + \frac{p+1}{v\kappa}\right). \qquad (52)$$

Здесь мы сталкиваемся с принципиальным отличием от черной дыры Хейворда: уравнение (52) имеет первый порядок по $\tilde{m}_-$, а (28) содержит $\tilde{m}_-$ квадратично. Решая уравнение (51), получаем

$$\tilde{m}_-(v) = e^{\kappa v + (p+1)\ln v} \times$$

$$\times \left(C - \kappa\, m_0 \int^v dv \left(1 + \frac{p+1}{v\kappa}\right) e^{-\kappa v - (p+1)\ln v}\right) \simeq$$

$$\simeq C e^{\kappa v} v^{(p+1)} - m_0. \qquad (53)$$

Чтобы закончить сравнение расчетов внутренней массы в черных дырах РН и Хейворда, мы вычисляем внутреннюю массу черной дыры РН в подходе Ори, как в разделе 2.2.

Уравнение (34) для стороны (+),

$$2z'_+ = f_+ + R f_{+,r},$$

дает

$$2z'_+ = 1 - \frac{e^2}{r_s^2} \simeq 1 - \frac{e^2}{\tilde{r}_-^2} = -2\kappa \tilde{r}_-, \qquad (54)$$

(определения $\tilde{r}_-$ и κ см. в (43) и (45)) и мы получаем

$$v_+ \equiv v = \frac{1}{\kappa}\ln\frac{1}{\lambda}. \tag{55}$$

Уравнение (38) для случая черной дыры РН имеет вид

$$-\frac{2\tilde{m}'_-(v(\lambda))}{R} = \frac{R''}{R'} f(R, \tilde{m}_-(v))\big|_{R=r_s}. \tag{56}$$

Подставляя в уравнение (56) соотношения

$$-\frac{2\tilde{m}'_-}{r_s} \simeq \frac{2\dot{\tilde{m}}_-}{\tilde{r}_-\kappa\lambda}, \qquad \frac{R''}{R'} = \frac{r''_s}{r'_s} = -\frac{1}{\lambda}\left(1+\frac{p+1}{\ln\lambda}\right)$$

и

$$f(r_s, \tilde{m}_-) = \left(2\dot{r}_s + \frac{2(m_+ - \tilde{m}_-)}{r_s}\right),$$

мы получаем уравнение

$$\dot{\tilde{m}}_- \simeq (\tilde{m}_- - m_0)\kappa\left(1+\frac{p+1}{v\kappa}\right), \tag{57}$$

которое совпадает с уравнением (52).

4. НЕСТАБИЛЬНОСТЬ ВНУТРЕННЕГО ГОРИЗОНТА ОТНОСИТЕЛЬНО ВНЕШНИХ ВОЗМУЩЕНИЙ

В этом разделе мы рассмотрим распространение скалярного поля в окрестности горизонта Коши и покажем, что имеющие степенную зависимость хвосты входящего в черную дыру потока, как их видит свободно падающий наблюдатель, расходятся на внутреннем горизонте.

Проблема внешних возмущений для черной дыры Хейворда обсуждается подобно тому, как это делается в случае черной дыры РН [12–15, 32], потому что причинные структуры обеих метрик схожи.

Для постановки задачи рассмотрим метрику Хейворда

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\Omega^2,$$

где

$$f(r) = f_{RN}\, g(r) = -\frac{(r_+ - r)(r - r_-)}{r^2}\frac{r^2(r-\tilde{r})}{r^3+2ml^2}. \tag{58}$$

Здесь $\tilde{r} = -r_-(-m)$ — отрицательный корень уравнения

$$r^3 - 2m(r^2 - l^2) = 0 = [(-r)^3 - (-2m)(r^2 - l^2)].$$

$g(r)$ — ограниченная функция без нулей и полюсов при $r > 0$.

В области (r_+, r_-) можно ввести черепашью координату $r_* = -\int dr/f(r)$

$$\begin{aligned} r_* = \int dr \frac{r^3+2ml^2}{(r_+ - r)(r - r_-)(r - \tilde{r})} = \\ -r - A_1(r_+^3 + 2ml^2)\ln(r_+ - r) - \\ -A_2(r_-^3 + 2ml^2)\ln(r - r_-) - \\ -A_3(\tilde{r}^3 + 2ml^2)\ln(r - \tilde{r}) + \text{const}, \end{aligned} \tag{59}$$

где

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{(r_+ - r_-)(r_+ - \tilde{r})}, \\ A_2 &= \frac{1}{(r_+ - r_-)(\tilde{r} - r_-)}, \\ A_3 &= \frac{1}{(r_+ - \tilde{r})(r_- - \tilde{r})}. \end{aligned} \tag{60}$$

Полагая, как в разд. 2 что $m \gg l$, так что

$$r_+ \simeq 2m,\ r_- \simeq l,\ \tilde{r} \simeq -l,$$

и

$$A_1 \simeq 1/(2m)^2,\ A_2 \simeq -1/4ml,\ A_3 \simeq 1/4ml,$$

получим

$$r_* \simeq -r - 2m\ln(r_+ - r) + \frac{l}{2}\ln(r - r_-) - \frac{l}{2}\ln(r - \tilde{r}). \tag{61}$$

В пределе $r \to r_-$ имеем

$$r_* \simeq \frac{l}{2}\ln\frac{r - r_-}{l}. \tag{62}$$

Определив нулевые координаты

$$v = -r_* + t,\ u = -r_* - t,$$

найдем, что левая и правые ветви горизонта Коши суть гиперповерхности $(r_-, u = \infty)$ и $(r_-, v = \infty)$. Распространение скалярного поля $\Phi(x)$ описывается волновым уравнением $\Phi_{;\mu;\nu} f^{\mu\nu} = 0$, где $f_{\mu\nu}$ — компоненты метрики (58). Чтобы решить уравнение, разложим поле $\Phi(x)$ по сферическим гармоникам:

$$\Phi(x) = \int e^{-ikt} Y_{lm}(\theta,\varphi) H_{lm}(k) \frac{\varphi_{klm}(r)}{r} dk. \tag{63}$$

Функции $\varphi(r_*(r))$ (далее индексы klm опускаются) удовлетворяют уравнению

$$\frac{d^2\varphi(r_*)}{dr_*^2} + [k^2 - V_l(r_*(r))]\varphi(r_*) = 0, \tag{64}$$

где потенциал V_l есть

$$V_l(r_*(r)) = -f(r)\left[\frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{1}{r}\frac{df(r)}{dr}\right].$$

Функция $H(k)$ в (63) определяется начальными данными $h(v)$, заданными на ветви $(r_+, u = -\infty)$ внешнего горизонта

$$H(k) = \frac{1}{2\pi}\int e^{ikv}h(v)dv. \qquad (65)$$

Решения (64) $\varphi(r_*)$, имеющие асимптотический вид

$$e^{-ikt}\varphi(r_*) \sim e^{-ikv}$$

на горизонте r_+, на горизонте r_- имеют вид

$$e^{-ikt}\varphi(r_*) \sim A(k)e^{-ikv} + B(k)e^{iku}, \qquad r_* \to -\infty,$$

где $A_{lm}^2 - B_{lm}^2 = 1$.

Входящее поле $\Phi(r_*, t)$ распространяется внутри черной дыры и вблизи r_- рассеивается на потоки $X(v)$ и $Y(u)$:

$$\Phi(r_*, t) \to X(v) + Y(u) =$$

$$= \int dkH(k)(A(k)-1)e^{-ikv} +$$

$$+ \int dkH(k)B(k)e^{iku}. \qquad (66)$$

В пределе $v, u \to \infty$ основной вклад в $X(v)$ и $Y(u)$ дает интегрирование в окрестности $k = 0$ [12, 13]. Для степенного хвоста Прайса $h(v) = \delta m_{pr} = \beta\theta(v - v_0)v^{-p}$ получаем

$$X(v) = \beta v^{-p}(A(0)-1), \qquad v \to \infty,$$
$$Y(u) = \beta u^{-p}B(0), \qquad u \to \infty. \qquad (67)$$

Поля $X(v)$ и $Y(u)$ конечны на горизонте Коши.

Найдем, какую плотность энергии измеряет свободно падающий наблюдатель вблизи внутреннего горизонта. Компоненты скорости радиально падающего наблюдателя суть [14, 32]

$$U^t = \frac{E}{f(r)}, \qquad U^r = -\sqrt{E^2 - f(r)}, \qquad (68)$$

и

$$U^{r_*} = \sqrt{E^2 - f(r)}/f(r).$$

Поток, видимый свободно падающим наблюдателем, есть

$$\mathcal{F} = U^i\Phi_i = U^t\Phi_{,t} + U^{,r_*}\Phi_{r_*} =$$

$$= \frac{E}{f(r)}(X_{,v} - Y_{,u}) + \frac{\sqrt{E^2 - f(r)}}{f(r)}(-X_{,v} - Y_{,u}) =$$

$$= \frac{X_{,v}}{f(r)}(E - \sqrt{E^2 - f(r)}) - \frac{Y_{,u}}{f(r)}(E + \sqrt{E^2 - f(r)}). (69)$$

В пределе $r \to r_-$ или $r_* \to -\infty$ функция $f(r)$ обращается в нуль:

$$f(r) \sim 2\frac{r - r_-}{l} \sim \frac{e^{2r_*/l}}{2}.$$

Если $E > 0$, то поток равен

$$\mathcal{F} \simeq -\frac{f(r)}{2E}X_{,v} - \frac{2E}{f(r)}Y_{,u}. \qquad (70)$$

На ветви $(r_-, u \to \infty)$ первый член конечен, а второй растет. Если $E < 0$, получаем

$$\mathcal{F} \simeq \frac{2|E|}{f(r)}X_{,v} + \frac{f(r)}{2|E|}Y_{,u}. \qquad (71)$$

На ветви $(r_-, v \to \infty)$ первый член возрастает, а второй конечен. Потоки, измеренные свободно падающим наблюдателем

$$E > 0: \ \ \mathcal{F}|_{(r_-, u\to\infty)} = -2E\beta p u^{-p-1}B(0)e^{2u/l}, \qquad (72)$$
$$E < 0: \ \ \mathcal{F}|_{(r_-, v\to\infty)} = 2E\beta p v^{-p-1}(A(0)-1)e^{2v/l}. (73)$$

Видно, что наблюдаемые потоки экспоненциально расходятся на внутреннем горизонте.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ И ОБСУЖДЕНИЕ

В настоящей работе мы изучили внутреннюю массовую функцию в модели Хейворда регулярной черной дыры с потоками и сравнили ее с соответствующей функцией черной дыры РН. Мы предположили, что масса черной дыры без потоков, m_0, намного больше основного параметра ядра l. Предполагая справедливость классического описания, мы считаем параметр ядра l больше планковской длины l_p.

Мы рассчитали внутреннюю массу двумя способами, первый из которых основан на учете непрерывности потока через оболочку, а второй использует исходный подход Ори [25] (точнее, оба метода находятся в рамках подхода Ори, потому что в обоих методах входящий поток считался непрерывным потоком Прайса, а исходящий поток моделировался нулевой оболочкой без давления). Оба метода дают конечное отрицательное значение для внутренней массовой функции. Внутренняя масса не является непосредственно измеримой величиной, и в работе [6, 29] было высказано предположение, что этот результат является артефактом параметризации. Однако хорошая параметризация неизвестна.

Формально, различное поведение внутренних массовых функций в черных дырах РН и Хейворда восходит к следующему. Схематически в случае дыры РН уравнение для внутренней массы имеет вид

$$\frac{dm}{dv} - cm = -\delta m_{pr},$$

где $c > 0$, что приводит к экспоненциальному росту по v. Для черной дыры Хейворда мы имеем

$$\frac{dm}{dv} = (m-c)^2 - a^2, \qquad c, a > 0,$$

что дает

$$\left|\frac{(m-c)-a}{(m-c)+a}\right| = Ce^{2av}.$$

В пределе $v \to \infty$ решение для $m(v)$ есть $m = c - a$, что для конкретных значений c и a приводит к $m < 0$.

Другой подход, используемый в работах [6, 17] для нахождения внутренней массовой функции, основан на соотношении ДТР [19, 20]. При таком подходе потоки внутри черной дыры моделируются тонкими оболочками. Формула ДТР дает связь между массами метрик входящих и исходящих сферических оболочек в областях между оболочками до и после столкновения. В работе [17] в случае черной дыры РН соотношение ДТР было получено из системы уравнений Эйнштейна. Для петлевых черных дыр и дыр Хейворда необходимо использовать обобщенную формулу ДТР [6, 27], которая не требует использования уравнений Эйнштейна. Оказывается, что во всех случаях черных дыр РН, Хейворда и петлевых черных дыр обобщенное соотношение ДТР показывает расходимость массовой функции пространства-времени вблизи горизонта Коши после того, как произошло пересечение оболочек. Было отмечено, что соотношение ДТР, являясь непертурбативным, объясняет нелокальные и нелинейные эффекты [27]. Однако подход ДТР нельзя напрямую сравнивать с подходом Ори, поскольку отсутствует четкая связь между формулой ДТР и подходами типа подхода Ори.

В работе [33] было показано, что в системе с пересекающимися внутри черной дыры потоками, порожденными аккрецией, появляется массовая инфляция. Потоки распространяются на фоне сферически-симметричного пространства-времени, и массовая инфляция возникает, когда 4-скорости потоков увеличиваются при приближении к внутреннему горизонту. Поскольку 4-скорость наблюдаемого потока связана с 4-скоростью наблюдающего потока через лоренцев буст, встречная скорость потоков экпоненциируется, как и плотность энергии центра масс потоков, что приводит к увеличению внутренней массы. Однако в работе [33] расчеты проводились с помощью специально построенной метрики, и конкретная переформулировка результатов этой работы для моделей с метрикой вида (1) представляет проблему.

Из-за похожей причинной структуры метрик черных дыр Хейворда и РН в обоих случаях распространение внешних возмущений также похоже. Если возмущение представляет собой поток Прайса, то в обоих случаях свободно падающий наблюдатель, приближающийся к внутреннему горизонту, измеряет возрастающий поток энергии. Это свойство интерпретируется как нестабильность внутреннего горизонта. Однако этот эффект напрямую не связан с внутренней массовой инфляцией.

Благодарности. Я благодарен М. Смолякову и И. Волобуеву за обсуждения и полезные замечания. Исследование выполнено в рамках научной программы Национального центра физики и математики, проект "Физика частиц и космология".

ЛИТЕРАТУРА

1. J.M. Bardeen, Proc. 5th Int. conf. on general relativity and gravitation GR5, Tbilisi, USSR, 174 (1968).
2. I. Dymnikova, Class. Quant. Grav. **19**, 725 (2002).
3. S.A. Hayward, Phys. Rev. Lett. **96**, 031103 (2006).
4. A. Bonanno and M. Reuter, Phys. Rev. D **62**, 043008 (2000).
5. S. Ansoldi, ArXiv 0802.0330.
6. E.G. Brown, R.B. Mann and L. Modesto, Phys. Rev. D **84**, 104041 (2011).
7. E. Ayon-Beato, A. Garcia, Phys. Lett. B **493**, 149 (2000).
8. R.H. Price, Phys. Rev. D **5**, 2419 (1972).
9. M. Simpson and R. Penrose, Int. J. Theor. Phys. **7**, 183 (1973).
10. J.M. McNamara, Proc. R. Soc. A **358**, 499 (1978).
11. J.M. McNamara, Proc. R. Soc. A **364**, 121 (1978).
12. Y. Gursel, I.D. Novikov, V.D. Sandberg and A.A. Starobinski, Phys. Rev. D **19**, 413 (1979).
13. Y. Gursel, I.D. Novikov, V.D. Sandberg and A.A. Starobinski, Phys. Rev. D **19**, 1260 (1979).

14. S. Chandrasekhar, *The Mathematical Theory of Black Holes*, Oxford University Press, New York (1983).

15. A. Ori, Phys. Rev. D **55**, 4860 (1997).

16. A. Ori, Phys. Rev. D **57**, 2621 (1998).

17. E. Poisson and W. Israel, Phys. Rev. D **41**, 1796 (1990).

18. P.C. Vaidia, Proc. Ind. Acad. Sci. A **33**, 264 (1951).

19. T. Dray and G. 't Hooft, Commun. Math. Phys. **99**, 613 (1985).

20. I.H. Redmount, Prog. Theor. Phys. **73**, 1401 (1985).

21. A. Bonanno, S. Droz, W. Israel and S.M. Morsink, ArXiv gr-qc/9411050.

22. L.M. Burko, Phys. Rev. Lett. **79**, 4958 (1997).

23. L.M. Burko and A. Ori, Phys. Rev. D **57**, R7084 (1998).

24. P.R. Brady, Prog. Theor. Phys. Suppl. **136**, 29 (1999).

25. A. Ori, Phys. Rev. Lett. **67**, 789 (1991).

26. W.G. Anderson, P.R. Brady, W. Israel and S.M. Morsink, Phys. Rev. Lett. **70**, 1041 (1993).

27. C. Barrabes and W. Israel, Phys. Rev. D **43**, 1129 (1991).

28. R. Carballo-Rubio, F. Di Filippo, S. Liberati, C. Pacilio and M. Visser, JHEP **07**, 23 (2018).

29. R. Carballo-Rubio, F. Di Filippo, S. Liberati, C. Pacilio and M. Visser, ArXiv 2101.05006.

30. A. Bonanno, A.-P. Khosravi and F. Saueressig, Phys. Rev. D **103**, 124027 (2021).

31. E. Poisson, ArXiv gr-qc/0207101.

32. R.A. Matzner, N. Zamorano and V.D. Sandberg, Phys. Rev. D **19**, 2821 (1979).

33. A.J. Hamilton and P.P. Avelino, Phys. Rept. **495**, 1 (2010).