ЖЭТФ, 2022, том 162, вып. 5 (11), стр. 737–742

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ КЛАССИЧЕСКОГО ПЕРЕНОСА ПРИМЕСИ В НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ. ПРИНЦИП ФЕРМА

П. С. Кондратенко [*]***, А. В. Мухаряпова***

Институт проблем безопасного развития атомной энергетики Российской академии наук
115191, Москва, Россия

Поступила в редакцию 25 мая 2022 г.,
после переработки 25 мая 2022 г.
Принята к публикации 26 мая 2022 г.

Разработана асимптотическая теория переноса примеси на основе адвекции–диффузии в средах с крупномасштабными неоднородностями. Выражение для концентрации сведено к одномерным интегралам вдоль характеристической линии, называемой траекторией концентрационного сигнала. Сама траектория определяется из вариационного принципа — аналога принципа Ферма в геометрической оптике, который приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка для единичного вектора касательной к траектории. Асимптотическая теория применима на расстояниях от источника примеси, значительно превышающих размер основной области ее распределения.

DOI: 10.31857/S0044451022110141
EDN: LAANFN

1. ВВЕДЕНИЕ

Обычно физическая модель переноса примеси зависит от конечного набора параметров. Если они являются постоянными, то концентрация примеси в зависимости от координат и времени, как правило, дается аналитическим выражением [1–3]. Однако на практике помимо мелко- и среднемасштабных неоднородностей, определяющих выбор модели, среда обладает крупномасштабными неоднородностями, так что параметры модели зависят от координат. В таком случае решение задачи о переносе требует проведения трудоемких и времязатратных численных расчетов. Отсюда возникает задача о построении аналитической теории переноса примеси в средах, обладающих крупномасштабными неоднородностями.

В работе [4] предложен новый подход, базирующийся на асимптотическом описании процессов переноса, который учитывает возможность крупномасштабной зависимости структурных характеристик среды от пространственных координат. Суть подхода базируется на двух моментах. Это, во-первых, то, что во всех известных физических моделях асимптотики концентрации на больших расстояниях носят экспоненциальный характер. А во-вторых, согласно анализу, формирование концентрации на далеких расстояниях обусловлено коротковолновой частью механизма переноса. Формально, таким образом, ситуация напоминает ту, которая имеет место в волновой оптике или квантовой механике, когда становится применимым соответственно приближение геометрической оптики [5] или квазиклассическое приближение в квантовой механике [6]. В результате возникают значительные упрощения в задаче о процессах переноса. Задача сводится к уравнению в частных производных первого порядка. Концентрация примеси выражается через интегралы вдоль пространственной линии (квазилуча) — аналога луча в геометрической оптике. Один из интегралов определяет показатель экспоненты — квазиэйконал, устанавливающий главную зависимость концентрации от координат и времени в асимптотической области. Траектория самого квазилуча определяется из вариационного принципа — аналога принципа Ферма.

В работе [4] действие асимптотического подхода продемонстрировано на модели случайной адвекции (см. [7, 8]), касающейся фрактальных сред с дальнодействующими корреляциями структурных характеристик. Указанный подход получил свое дальнейшее развитие в работах [9–12]. В работах [9, 10] была построена асимптотическая теория в изотропных

[*] E-mail: kondrat@ibrae.ac.ru

и анизотропных неоднородных средах при переносе примеси посредством классической диффузии. Также в работе [9] при довольно жестком ограничении на параметры задачи была получена асимптотическая формула для концентрации при переносе примеси в неоднородной среде, когда наряду с диффузией действует и механизм адвекции.

В настоящей работе предложена асимптотическая теория переноса примеси посредством диффузии и адвекции без ограничительных условий на параметры задачи. Специфика и вытекающая из нее сложность поставленной задачи состоят в следующем: 1) в самой постановке задачи в каждой точке среды возникает выделенное направление, определяемое вектором скорости адвекции, что усложняет применение вариационного принципа; 2) отсутствие факторизации в квазиэйконале зависимостей от координат и переменной Лапласа (аналога частоты излучения в геометрической оптике), что значительно усложняет проведение обратного преобразования Лапласа.

Дальнейшая структура статьи такова. В разд. 2 кратко сформулирована постановка задачи. Раздел 3 посвящен выводу формулы для квазиэйконала. В разд. 4 получено выражение для предэкспоненты в выражении для концентрации в представлении Лапласа. В разд. 5 дан вывод асимптотической формулы для концентрации в пространственно-временном представлении. В Заключении кратко подведены итоги.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Концентрация примеси удовлетворяет известному уравнению

$$\frac{\partial c(\mathbf{r},t)}{\partial t} + \operatorname{div}\big(\mathbf{u}c - D\nabla c(\mathbf{r},t)\big) = 0, \qquad (1)$$

в котором коэффициент диффузии и скорость адвекции являются функциями координат, $D = D(\mathbf{r})$, $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r})$. Предполагаем, что жидкая компонента среды является несжимаемой, так что скорость адвекции удовлетворят уравнению непрерывности:

$$\operatorname{div}\mathbf{u} = 0. \qquad (2)$$

Считаем, что в начальный момент времени вся примесь сосредоточена в одной точке, которая выбрана в качестве начала координат:

$$c(\mathbf{r},0) = N\delta(\mathbf{r}), \qquad (3)$$

где N — полное число частиц примеси.

В представлении Лапласа

$$c_p(\mathbf{r}) = \int_0^\infty dt\, c(\mathbf{r},t)e^{-pt}$$

уравнение (1) с учетом (3) принимает вид

$$pc_p(\mathbf{r}) + \operatorname{div}\big\{\mathbf{u}(\mathbf{r})c_p(\mathbf{r}) - D(\mathbf{r})\nabla c_p(\mathbf{r})\big\} = N\delta(\mathbf{r}). \qquad (4)$$

Нас будет интересовать концентрация на асимптотически далеких расстояниях от источника примеси, когда $r \gg R(t)$, где $R(t)$ — размер основной области ее локализации в момент времени t. Тогда решение уравнения (4) удобно представить в форме [4]

$$c_p(\mathbf{r}) = A_p(\mathbf{r}) \exp\big(-\Gamma_p(\mathbf{r})\big), \qquad (5)$$

где показатель экспоненты удовлетворяет неравенству $\Gamma_p(\mathbf{r}) \gg 1$. Благодаря ему в задаче возникает малый параметр

$$\xi = \big(|\nabla\Gamma_p| \min(L, |\mathbf{r}|)\big)^{-1}, \quad \xi \ll 1. \qquad (6)$$

Здесь L — характерный линейный масштаб неоднородности среды, определяемой координатной зависимостью величин $D(\mathbf{r})$ и $\mathbf{u}(\mathbf{r})$.

Имея в виду аналогию с геометрической оптикой, величину $\Gamma_p(\mathbf{r})$ назовем квазиэйконалом. Подставляя (5) в (4), в нулевом порядке по малому параметру ξ приходим к уравнению в частных производных первого порядка для квазиэйконала:

$$p - \big(\mathbf{u}(\mathbf{r})\nabla\Gamma_p(\mathbf{r})\big) - D\big(\nabla\Gamma_p(\mathbf{r})\big)^2 = 0. \qquad (7)$$

Дальнейшая наша задача состоит в том, чтобы решить уравнение (7), затем, переходя в (4) к следующему порядку по параметру ξ, найти предэкспоненту $A_p(\mathbf{r})$ и, наконец, совершая обратное преобразование Лапласа в (5), определить асимптотическое выражение для концентрации в координатно-временном представлении.

3. КВАЗИЭЙКОНАЛ

Уравнение (7) является уравнением в частных производных первого порядка, как и уравнение эйконала в геометрической оптике [5], и уравнение Гамильтона–Якоби в классической механике [13].

Из уравнения (7) вытекает формальное равенство

$$\nabla\Gamma_p \Rightarrow \mathbf{F} = -\frac{\mathbf{u}}{2D} + \boldsymbol{\nu} n, \qquad (8)$$

в котором

$$n(p,\mathbf{r}) = \sqrt{\Big(\frac{\mathbf{u}}{2D}\Big)^2 + \frac{p}{D}}, \qquad (9)$$

а $\boldsymbol{\nu}$ — вещественный безразмерный единичный вектор, $\boldsymbol{\nu}^2 = 1$.

Решение уравнения (7) для функции $\Gamma_p(\mathbf{r})$ сводится линейному интегралу вдоль траектории концентрационного сигнала — квазилуча:

$$\Gamma_p = \int_0^{\mathbf{r}} (d\mathbf{l}\mathbf{F}), \tag{10}$$

где $\mathbf{r}$ — точка наблюдения,

$$d\mathbf{l} = \boldsymbol{\nu}\, dl, \tag{11}$$

dl — дифференциальный элемент длины вдоль квазилуча.

Траектория квазилуча находится из вариационного принципа – аналога принципа Ферма:

$$\delta_l \Gamma_p = 0. \tag{12}$$

Здесь символ δ_l обозначает вариацию квазиэйконала Γ_p относительно возмущения траектории квазилуча. Равенство (12), на самом деле, означает, что в первом порядке по бесконечно малому изменению траектории величина интеграла (10) остается неизменной.

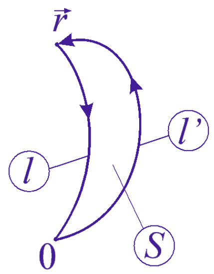

Рис. 1. Контур интегрирования при вычислении вариации $\delta_l \Gamma_p$

Изменение исходной траектории квазилуча состоит в том, что в каждой ее точке $\mathbf{r}(l)$ добавляется бесконечно малое возмущение $\delta\mathbf{r}(l)$. Обозначим исходную траекторию «l», а возмущенную «l'». Тогда вариация $\delta_l \Gamma_p$ интеграла (10) представляется интегралом по замкнутому контуру, изображенному на рисунке. Применяя к этому интегралу теорему Стокса, имеем

$$\delta_l \Gamma_p = \Gamma_p^{(l')} - \Gamma_p^{(l)} = \oint d\mathbf{S}\,\mathrm{rot}\mathbf{F}. \tag{13}$$

Здесь

$$d\mathbf{S} = \big[\delta\mathbf{r}(l)\, d\mathbf{l}\big] \tag{14}$$

— элемент площади поверхности, обрамленной контуром, который изображен на рисунке. Подставляя (14) в (13), находим

$$\delta_l \Gamma_p = \int_0^{\mathbf{r}} dl\, \big([\delta\mathbf{r}(l)\boldsymbol{\nu}]\mathrm{rot}\mathbf{F}\big), \tag{15}$$

или

$$\delta_l \Gamma_p = \int_0^{\mathbf{r}} dl\, \big(\delta\mathbf{r}(l)[\boldsymbol{\nu}\mathrm{rot}\mathbf{F}]\big). \tag{16}$$

Отсюда с учетом (12) получаем уравнение для траектории квазилуча:

$$[\boldsymbol{\nu}\mathrm{rot}\mathbf{F}] = 0. \tag{17}$$

Подставляя сюда равенства (8) и (9), находим уравнение для единичного вектора $\boldsymbol{\nu}$ касательной к квазилучу:

$$\frac{d\boldsymbol{\nu}}{dl} = \frac{1}{n}\Big(\nabla n - \boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{\nu}\nabla n) - \Big[\boldsymbol{\nu}\mathrm{rot}\frac{\mathbf{u}}{2D}\Big]\Big). \tag{18}$$

Здесь при выводе было использовано соотношение

$$[\boldsymbol{\nu}\mathrm{rot}(\boldsymbol{\nu}n)] = n[\boldsymbol{\nu}\mathrm{rot}\boldsymbol{\nu}] + \big[\boldsymbol{\nu}[\nabla n\, \boldsymbol{\nu}]\big] = = -n\frac{d\boldsymbol{\nu}}{dl} + \nabla n - \boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{\nu}\nabla n). \tag{19}$$

Таким образом, величина квазиэйконала определяется выражением (10), в котором интегрирование происходит по траектории квазилуча, определяемой уравнением (18) для единичного вектора касательной к этой траектории.

4. ПРЕДЭКСПОНЕНТА

Уравнение для предэкспоненты получается при подстановке выражения (5) в уравнение (4) в первом порядке малости по параметру ξ:

$$2D(\mathbf{r})\nabla_p\nabla A_p(\mathbf{r}) + A_p(\mathbf{r})\nabla_p\nabla D(\mathbf{r}) + + D(\mathbf{r})A_p(\mathbf{r})\Gamma_p = 0. \tag{20}$$

С учетом равенства (8) оно сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка, которое является линейным:

$$\frac{d}{dl}\ln(A_p^2 Dn) + \mathrm{div}\,\boldsymbol{\nu} = 0, \tag{21}$$

где введено обозначение

$$\frac{d}{dl} \equiv (\boldsymbol{\nu}\nabla). \tag{22}$$

Символ d/dl обозначает линейную производную вдоль траектории квазилуча.

Решение уравнения (21) имеет вид

$$A_p(\mathbf{r}) = = \frac{B(p)}{l(\mathbf{r})\sqrt{n(\mathbf{r})D(\mathbf{r})}} \exp\Big[-\int_0^{\mathbf{r}} dl\Big(\frac{1}{2}\operatorname{div}\boldsymbol{\nu} - \frac{1}{l}\Big)\Big]. \quad (23)$$

Здесь $B(p)$ — постоянная (в отношении зависимости от координаты) интегрирования, l — длина квазилуча от начала координат до точки интегрирования, $l(\mathbf{r})$ — полная длина квазилуча от начала координат до точки наблюдения $\mathbf{r}$. При выводе формулы (23) мы воспользовались равенствами

$$\boldsymbol{\nu} = \frac{\mathbf{r}}{r}\Big|_{r\to 0}, \quad \operatorname{div}\Big(\frac{\mathbf{r}}{r}\Big) = \frac{2}{r}. \quad (24)$$

Постоянную интегрирования $B(p)$ в (23) определим из условия, что при малых значениях координаты $\mathbf{r}$, когда $r \ll L$, где L — характерный масштаб неоднородности среды, выражение для предэкспоненты (23) должно перейти в соответствующие выражения для однородной среды со значениями коэффициента диффузии и скорости:

$$D(\mathbf{r}) = D(0), \quad \mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{u}(0).$$

Вычисленная в Приложении предэкспонента для однородной среды определятся формулой (A.6). Сравнивая ее с (23), приходим к окончательному результату для предэкспоненты в выражении для концентрации в представлении Лапласа:

$$A_p(\mathbf{r}) = \frac{N\sqrt{n(p,0)}}{4\pi l(p,\mathbf{r})\sqrt{n(p,\mathbf{r})D(0)D(\mathbf{r})}}. \quad (25)$$

Здесь было учтено, что при малых значениях координаты $r \ll L$ имеет место приближенное равенство

$$l(p,\mathbf{r}) \cong r. \quad (26)$$

5. КОНЦЕНТРАЦИЯ ПРИМЕСИ

Концентрация примеси в координатно-временном представлении получается из выражения (5) путем обратного преобразования Лапласа:

$$c(\mathbf{r},t) = \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{dp}{2\pi i}\, A_p(\mathbf{r}) \exp\big[-\Gamma_p(\mathbf{r}) + pt\big], \quad \operatorname{Re} a > 0. \quad (27)$$

Интеграл здесь с учетом неравенства $\Gamma_p(\mathbf{r}) \gg 1$ берется методом стационарной фазы. Принимая во внимание равенство (25), из (27) получаем выражение для концентрации:

$$c(\mathbf{r},t) = \frac{N\sqrt{n(p_0,0)}}{4\pi l(p_0,\mathbf{r})\sqrt{2\pi|\Gamma''_{p_0}(\mathbf{r})|n(p_0,\mathbf{r})D(0)D(\mathbf{r})}} \times \exp\big[-\Gamma_{p_0}(\mathbf{r}) + p_0 t\big]. \quad (28)$$

Здесь введены следующие обозначения: $p_0 = p_0(\mathbf{r},t)$ — стационарная точка, определяемая из условия

$$\frac{\partial\Gamma_p}{\partial p}\Big|_{p=p_0} = t, \quad (29)$$

и

$$\Gamma''_{p_0}(\mathbf{r}) = \frac{\partial^2\Gamma_p}{\partial p^2}\Big|_{p=p_0} \quad (30)$$

— вторая производная квазиэйконала по переменной Лапласа в стационарной точке.

При дифференцировании квазиэйконала Γ_p следует учитывать зависимость от переменной Лапласа не только самого подынтегрального выражения в (10), но и траектории квазилуча. Поэтому

$$\frac{\partial\Gamma_p}{\partial p} = \int_0^{\mathbf{r}} dl\,\frac{\partial n}{\partial p} + \int_0^{\mathbf{r}}\Big(dl\,\frac{\delta\Gamma_p}{\delta\mathbf{r}(l)}\,\frac{d\delta\mathbf{r}(l)}{dp}\Big).$$

С учетом условия минимума (12) второе слагаемое справа здесь обращается в нуль, и тогда имеем

$$\frac{\partial\Gamma_p}{\partial p} = \int_0^{\mathbf{r}} dl\frac{\partial n}{\partial p}. \quad (31)$$

Соответственно, уравнение (29) для стационарной точки приобретает вид

$$\int_0^{\mathbf{r}} dl\,\frac{\partial n}{\partial p}\Big|_{p=p_0} = t. \quad (32)$$

Интегрирование здесь происходит по экстремальной траектории, определяемой уравнением (18).

Перейдем к вычислению второй производной по переменной Лапласа от квазиэйконала. С учетом равенства (31) имеем

$$\frac{\partial^2\Gamma_p}{\partial p^2} = \frac{\partial}{\partial p}\int_0^{\mathbf{r}} dl\,\frac{\partial n}{\partial p}. \quad (33)$$

Теперь уже при взятии второй производной по переменной p, в отличие от (31), вклад от дифференцирования по возмущению траектории квазилуча не обращается в нуль, поскольку под знаком интеграла стоит не $(d\mathbf{l}\mathbf{F})$, а $dl\,\partial n/\partial p$. И тогда

$$\frac{\partial^2\Gamma_p}{\partial p^2} = \int_0^{\mathbf{r}} dl\left[\frac{\partial^2 n}{\partial p^2} + \left(\nabla\frac{\partial n}{\partial p}\frac{\partial\delta\mathbf{r}}{\partial p}\right)\right] + \\ + \int_0^{\mathbf{r}} dl\left(\frac{\partial n}{\partial p}\boldsymbol{\nu}\frac{d}{dl}\frac{\partial\delta\mathbf{r}}{\partial p}\right). \quad (34)$$

Здесь $\delta\mathbf{r}$ является возмущением экстремальной траектории квазилуча, обусловленное переходом $p \to p + \delta p$. Учитывая, что невозмущенная траектория определяется выражением

$$\mathbf{r}(l) = \int_0^l dl'\,\boldsymbol{\nu}(l'), \quad (35)$$

для производной от $\delta\mathbf{r}$ по переменной Лапласа получаем выражение

$$\frac{\partial\delta\mathbf{r}(l)}{\partial p} = \int_0^l dl'\,\boldsymbol{\mu}(l'), \quad (36)$$

где обозначено

$$\boldsymbol{\mu}(l) \equiv \frac{\partial\boldsymbol{\nu}(l)}{\partial p}. \quad (37)$$

Поэтому второе слагаемое в правой части выражения (34) принимает вид

$$\int_0^{\mathbf{r}} dl\left(\frac{\partial n}{\partial p}\boldsymbol{\nu}\frac{d}{dl}\frac{\partial\delta\mathbf{r}}{\partial p}\right) = \int_0^{\mathbf{r}} dl\,\frac{\partial n}{\partial p}(\boldsymbol{\nu}\boldsymbol{\mu}). \quad (38)$$

Но из свойства $\boldsymbol{\nu}^2 = 1$ вытекает равенство

$$\big(\boldsymbol{\nu}(l)\boldsymbol{\mu}(l)\big) = 0. \quad (39)$$

Отсюда следует

$$\int_0^{\mathbf{r}} dl\left(\frac{\partial n}{\partial p}\boldsymbol{\nu}\frac{d}{dl}\frac{\partial\delta\mathbf{r}}{\partial p}\right) = 0. \quad (40)$$

С учетом равенств (36) и (40) из (30) и (34) получаем

$$\Gamma''_{p_0}(\mathbf{r}) = \int_0^{\mathbf{r}} dl\left[\frac{\partial^2 n}{\partial p^2} + \nabla\frac{\partial n}{\partial p}\int_0^l dl'\,\boldsymbol{\mu}(l')\right]_{p=p_0}. \quad (41)$$

Уравнение для вектора $\boldsymbol{\mu}(l)$, определенного равенством (37), получается дифференцированием по переменной Лапласа уравнения (18) для единичного вектора касательной к оптимальной траектории $\boldsymbol{\nu}$:

$$\frac{d\boldsymbol{\mu}}{dl} = \frac{1}{n}\left(\nabla_\perp\frac{\partial n}{\partial p} - \boldsymbol{\mu}\frac{dn}{dl} - \boldsymbol{\nu}\,(\boldsymbol{\mu}\nabla n) - \frac{\partial n}{\partial p}\frac{d\boldsymbol{\nu}}{dl} - \\ - \left[\boldsymbol{\mu}\,\mathrm{rot}\frac{\mathbf{u}}{2D}\right]\right). \quad (42)$$

Здесь использовано обозначение

$$\nabla_\perp \equiv \nabla - \boldsymbol{\nu}\frac{d}{dl} = \nabla - \boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{\nu}\nabla). \quad (43)$$

Дополнительным условием, требуемым для исключения векторной постоянной интегрирования уравнения (42), является равенство

$$\int_0^{\mathbf{r}} dl\,\boldsymbol{\mu}(l) = 0. \quad (44)$$

Оно вытекает из требования, чтобы при изменении переменной Лапласа конечные точки квазилуча, 0 и $\mathbf{r}$, оставались неизменными.

Таким образом, выражение (28) вместе с уравнением (32), равенством (41) а также уравнениями (18), (42) и дополнительным условием (44) представляют собой решение задачи об асимптотическом выражении для концентрации примеси при переносе посредством классической адвекции–диффузии в среде с крупномасштабными неоднородностями.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итогом работы является асимптотическая теория переноса примеси посредством адвекции–диффузии в среде с крупномасштабными неоднородностями.

Путем применения асимптотического подхода [4] на расстояниях, значительно превосходящих размер основной области локализации примеси, задача сведена к уравнению в частных производных первого порядка. Это позволило на основе действующего в таких случаях канонического формализма (формализм Гамильтона–Якоби в классической механике) концентрацию примеси, испытывающей адвекцию–диффузию в неоднородной среде, представить в квадратурах – через интегралы вдоль линии, условно названной траекторией квазилуча. Эта последняя определяется из вариационного принципа, который является аналогом принципа Ферма в геометрической оптике или принципа Мопертюи в классической механике.

По сравнению с прямыми численными расчетами на основе уравнения в частных производных второго порядка, в расчетах переноса примеси в неоднородной среде, базирующихся на разработанной здесь асимптотической теории, наряду с их простотой ожидается значительная экономия расчетного времени.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Цель этого раздела состоит в том, чтобы в представлении Лапласа найти концентрацию примеси $c_p(\mathbf{r})$, удовлетворяющую уравнению (1) с начальным условием (3), при не зависящих от координат коэффициенте диффузии и скорости адвекции:

$$D(\mathbf{r}) = D(0), \quad \mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{u}(0). \tag{A.1}$$

Дополнительный переход к представлению Фурье

$$c_{p\mathbf{k}} = \int d^3r \, c_p(\mathbf{r}) e^{-i(\mathbf{kr})}$$

сводит поставленную задачу к алгебраической, решением которой является выражение

$$c_{p\mathbf{k}} = \frac{N}{p + i\big(\mathbf{u}(0)\mathbf{k}\big) + D(0)k^2}. \tag{A.2}$$

Применение к нему обратного преобразования Фурье дает

$$c_p(\mathbf{r}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{N}{p + i\big(\mathbf{u}(0)\mathbf{k}\big) + D(0)k^2} \, e^{i(\mathbf{kr})}, \tag{A.3}$$

откуда после перехода к новой переменной интегрирования $\mathbf{k}' = \mathbf{k} + i\mathbf{u}(0)/2D(0)$ получим

$$c_p(\mathbf{r}) = \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} \frac{N}{p + \left(\frac{\mathbf{u}(0)}{2D(0)}\right)^2 + D(0)k'^2} \times \\ \times \exp\Big[\frac{\big(\mathbf{u}(0)\mathbf{r}\big)}{2D(0)} + i(\mathbf{k}'\mathbf{r})\Big]. \tag{A.4}$$

Выполнение интегрирования сначала по угловым переменным вектора $\mathbf{k}$ а затем, с помощью теории вычетов, по его абсолютной величине приводит к результату

$$c_p(\mathbf{r}) = \frac{N}{4\pi D(0) r} \times \\ \times \exp\left[\frac{\big(\mathbf{u}(0)\mathbf{r}\big)}{2D(0)} - r\sqrt{\left(\frac{\mathbf{u}(0)}{2D(0)}\right)^2 + \frac{p}{D(0)}}\right]. \tag{A.5}$$

Отсюда находим предэкспоненту в выражении для концентрации при условии (A.1):

$$A_p(\mathbf{r}) = \frac{N}{4\pi D(0) r}. \tag{A.6}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. J. P. Bouchaud and A. Georges, Phys. Rep. **195**, 127 (1990).
2. M. B. Isichenko, Rev. Mod. Phys. **29**, 961 (1992).
3. Л. А. Большов, П. С. Кондратенко, Л. В. Матвеев, УФН **189**, 691 (2019).
4. П. С. Кондратенко, Письма в ЖЭТФ **106**, 581 (2017).
5. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, Физматлит, Москва (2005).
6. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика: нерелятивистская теория*, Физматлит, Москва (2004).
7. A. M. Dykhne, I. L. Dranikov, P. S. Kondratenko, and L. V. Matveev, Phys. Rev. E **72**, 061104 (2005).
8. P. S. Kondratenko and L. V. Matveev, Phys. Rev. E **75**, 051102 (2007).
9. П. С. Кондратенко, А. Л. Матвеев, ЖЭТФ **157**, 703 (2021)
10. П. С. Кондратенко, А. Л. Матвеев, Ю. Н. Обухов, ЖЭТФ **159**, 719 (2021).
11. П. С. Кондратенко, А. Л. Матвеев, ЖЭТФ **159**, 724 (2021).
12. P. S. Kondratenko, A. L. Matveev, and A. D. Vasiliev, Eur. Phys. J. B **94**, 50 (2021).
13. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Механика*, Физматлит, Москва (2001).