ЖЭТФ, 2022, том 162, вып. 6 (12), стр. 917–925

УРАВНЕНИЯ ДВУХСКОРОСТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ ДЛЯ ПОЛЯРНОЙ ФАЗЫ СВЕРХТЕКУЧЕГО ^{3}НЕ В НЕМАТИЧЕСКОМ АЭРОГЕЛЕ

Е. В. Суровцев[*]

Институт физических проблем им. П. Л. Капицы Российской академии наук
119334, Москва, Россия

Поступила в редакцию 6 июля 2022 г.,
после переработки 8 июля 2022 г.
Принята к публикации 11 июля 2022 г.

Проведен последовательный вывод полной системы уравнений гидродинамики для полярной фазы сверхтекучего ^{3}Не в нематическом аэрогеле без учета диссипативных процессов. При выводе уравнений предполагалось отсутствие проскальзывания между нормальной компонентой ^{3}Не и каркасом аэрогеля, что позволило ограничиться двухскоростным описанием движения. По сравнению с классическим случаем системы гидродинамических уравнений для сверхтекучего ^{4}Не, полученная система содержит дополнительные уравнения: уравнение сохранения массы аэрогеля, уравнение движения орбитального вектора параметра порядка полярной фазы, а также вектора, описывающего отклонение орбитального вектора от мгновенного направления локальной анизотропии аэрогеля. Из-за взаимодействия ^{3}Не и аэрогеля тензор потока импульса, входящий в уравнение сохранения полного импульса системы, включает в себя компоненты тензора напряжений аэрогеля. Показано, что в длинноволновом пределе учет движения орбитального вектора параметра порядка полярной фазы приводит к превышению точности.

DOI: 10.31857/S0044451022120124
EDN: LDWAQE

1. ВВЕДЕНИЕ

Нематический аэрогель с высокой степенью анизотропии (нафен, мулитовый аэрогель), помещенный в ^{3}Не, позволяет наблюдать новые фазы сверхтекучего ^{3}Не, которые возникают в объеме, ограниченном аэрогелем, из-за изменения симметрии системы. Одной из таких фаз является сверхтекучая полярная фаза, которая впервые была обнаружена в экспериментах по ядерному магнитному резонансу [1]. Интерес представляет изучение сверхтекучих свойств рассматриваемой системы, которые проявляются в экспериментах по колебанию аэрогеля в ячейке со сверхтекучим ^{3}Не [2, 3]. В рассматриваемой серии экспериментов наблюдалось две моды колебаний, одна из которых возникает только после перехода ^{3}Не внутри аэрогеля из нормального состояния в сверхтекучее (полярную фазу, как в статье [2]). В связи с этим возникла необходимость в выводе и решении гидродинамических уравнений для рассматриваемой составной системы (нематический аэрогель + сверхтекучий ^{3}Не в полярной фазе).

Первое гидродинамическое рассмотрение сверхтекучей жидкости с внесенными в нее примесями было проведено Халатниковым [4]. Существенным для нас является то, что в цитируемой работе примеси были нескоррелированы (газ примесей). Наличие корреляций в расположении и ориентации примесей приводит к возникновению у системы дополнительной упругости, которая дает вклад в энергию системы и, как следствие, в другие термодинамические величины. Гидродинамические уравнения для простейшего случая изотропной сверхтекучей жидкости (случай ^{4}Не) в изотропном аэрогеле были впервые записаны в работе [5], но получены они были эвристически без какого-либо вывода и не учитывали сдвиговую упругость аэрогеля. В работе [6] авторы использовали результат работы [5] для описания эксперимента по распространению звука в кремниевом аэрогеле заполненном сверхтекучим ^{3}Не. Особенностью данной задачи является то, что сверхтекучие фазы ^{3}Не описывают-

[*] E-mail: e.v.surovtsev@gmail.com

ся нетривиальным параметром порядка. Гидродинамика анизотропной сверхтекучей жидкости существенно зависит от вида параметра порядка, так как гидродинамическими переменными помимо сверхтекучей скорости могут являться и другие пространственные градиенты величин, описывающих нарушение симметрии сверхтекучей фазы. Феноменологический вывод линейных гидродинамических уравнений для сверхтекучих полярной, A-фазы и B-фазы ^{3}He в нематическом аэрогеле был проведен в работе Плайнера и Бранта [7]. Аналогичный вывод для β-фазы, возникающей в рассматриваемой системе в сильных магнитных полях, был рассмотрен теми же авторами в работе [8]. Несмотря на идейно правильный подход, найденная в статье система уравнений получилась неоправданно громоздкой и содержащей некоторые неточности, связанные со спецификой рассматриваемой системы. В частности, в написанной системе уравнений отсутствует уравнение сохранения массы примесей (аэрогеля). Как следствие, химический потенциал, который входит в уравнение сохранения потенциальности движения, вычисляется как производная энергии по полной плотности системы (с учетом массы аэрогеля), что противоречит смыслу сверхтекучей скорости, как отдельного движения жидкости. Авторы также не вполне корректно ввели в уравнения тензор упругости аэрогеля, что привело к появлению в их рассмотрении лишних феноменологических коэффициентов. Помимо этого, уравнения сильно усложняются при учете неоднородностей орбитальной части параметра порядка. Учет данных неоднородностей приводит к превышению точности рассматриваемого авторами линейного приближения. Наконец, уравнение изменения энтропии написано с очевидной ошибкой (нулевой ток энтропии в бездиссипативном режиме). Таким образом, представленный в статье вывод не является вполне обоснованным и требует уточнения.

В настоящей работе будет проведен последовательный вывод полной системы гидродинамических уравнений для полярной фазы сверхтекучего ^{3}He в нематическом аэрогеле без учета процессов затухания. Идейно предложенный вывод будет соответствовать тому, как это делается для нематических и смектических кристаллов в книге [9] и для обычной сверхтекучей жидкости [10]. Для всех гидродинамических переменных, возникающих в задаче, будут написаны либо уравнения непрерывности (для сохраняющихся величин), либо феноменологические уравнения движения (для оставшихся векторых величин). Выражения для потоков, входящих в уравнения непрерывности, будут получены посредством выделения полной дивергенции в выражении для частной производной энергии единицы объема по времени. Однозначность процедуры задается с помощью галилеевского преобразования энергии, импульса и потока импульса для рассматриваемой системы. В конце статьи будет рассмотрен вопрос о линеаризации полученных уравнений в случае малых деформаций.

2. ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ ПЕРЕМЕННЫЕ И ОБОБЩЕННЫЕ СИЛЫ

Прежде всего выпишем гидродинамические переменные, которые есть у рассматриваемой системы, и соответствующие им термодинамические силы. Будем рассматривать аэрогель как упругую сплошную среду с равновесной плотностью ρ_a^0. Ось анизотропии аэрогеля (усредненное направление нитей аэрогеля) определим вектором $\nu_i^{(0)}$ (противоположные направления эквиваленты). Изменение положения аэрогеля в пространстве и его деформацию определим векторным полем локальных смещений $u_i(\mathbf{r},t)$ и тензором деформаций $u_{ij} = 1/2(\partial_i u_j + \partial_j u_i + 2\partial_i u_k \partial_j u_k)$, который в случае малых деформаций упрощается до вида $u_{ij} = 1/2(\partial_i u_j + \partial_j u_i)$. Изменения вектора $\mathbf{u}$ имеет смысл рассматривать только на расстояниях, гораздо больших характерных микромасштабов в системе (к примеру, расстояние между нитями аэрогеля, длина когерентности сверхтекучей фазы). Если ^{3}He внутри аэрогеля находится в нормальном состоянии, гидродинамическими переменными являются плотность жидкости ρ_l, плотность аэрогеля ρ_a, энтропия единицы объема s, плотность потока вещества $\mathbf{j}$ и тензор деформации аэрогеля u_{ij}. При переходе ^{3}He внутри аэрогеля в сверхтекучее состояние у системы появляются дополнительные гидродинамические переменные, связанные с пространственными градиентами величин, описывающих спонтанное нарушение симметрии системы. Параметром порядка полярной фазы является комплексная матрица 3×3 вида $A_{\mu j} \sim e^{i\varphi} d_\mu m_j$, где d_μ, m_j — единичные векторы в спиновом и орбитальном пространствах соответственно, поэтому дополнительными гидродинамическими переменными будут сверхтекучая скорость $(v_s)_i \sim \nabla_i \varphi$ и градиент спинового вектора параметра порядка $\nabla_i d_j$, который мы в дальнейшем, однако, рассматривать не будем, считая связь с другими гидродинамическими переменными слабой (пренебрежение слабым спинорбитальным взаимодействием). Особенностью полярной фазы, возникающей в нематических аэрогелях, является то, что направление орбитального вектора $\mathbf{m}$ задается направлением оси анизотропии аэрогеля, поэтому у системы нет непрерывного вырождения по направлению $\mathbf{m}$. В силу указанного взаимодействия, а также того, что градиентная энергия сверхтекучей фазы является функцией не только $\nabla_i m_j$, но и направления m_i, необходимо включить в рассмотрение обе данные переменные: $\nabla_i m_j$ и m_i. Для описания энергии анизотропии, возникающей в сверхтекучем состоянии из-за указанного выше взаимодействия с аэрогелем, удобно ввести дополнительную переменную $\delta_i = m_i - \nu_i$, где мы предположили, что в равновесии направления $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{r})$ и $\mathbf{m}(\mathbf{r})$ совпадают. Рассмотрение в качестве независимой переменной градиента вектора локальной анизотропии аэрогеля $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{r})$ привело бы к учету пространственных производных следующих порядков от поля локальных смещений $\mathbf{u}(\mathbf{r},t)$. Указанный набор переменных полностью описывает состояние системы.

Определим обобщенные силы, связанные с введенными выше переменными, через дифференциал энергии единицы объема тела в лабораторной системе отсчета:

$$\begin{aligned} d\varepsilon = T ds + \mu_l d\rho_l + \mu_a d\rho_a + (v_n)_i dj_i + \\ + (g_s)_i d(v_s)_i + \sigma_{ik} d(u_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik} u_{ll}) + \Delta_i d\delta_i + \\ + X_i dm_i + L_{ij} d\nabla_i m_j, \end{aligned} \quad (1)$$

где T — температура системы, μ_l — химический потенциал ^{3}He, отнесенный к массе атома ^{3}He, μ_a — химический потенциал аэрогеля, отнесенный к массе одной нити аэрогеля, σ_{ij} — бесследовая часть тензора напряжений аэрогеля, $(v_n)_i$ — скорость, сопряженная к полному потоку вещества, $(g_s)_i$ — поток массы, сопряженный к сверхтекучей скорости, Δ_i, X_i и L_{ij} — обобщенные силы, сопряженные соответственно к δ_i, m_i и $\nabla_i m_j$.

В гидродинамике введенная выше величина $\mathbf{v}_n$ определяется как импульс единицы массы вещества, которая в рассматриваемой задаче складывается из массы жидкости и аэрогеля в соответствующих пропорциях. Отметим также, что энергия предполагается функцией только двух скоростей v_n и v_s. Скорость $\dot{u}_i$, которая определяет усредненную по некоторому объему скорость нитей аэрогеля, связана с $(v_n)_i$ соотношением

$$\dot{u}_i = (v_n)_i + \left(\eta_\perp \delta_{ij} + (\eta_\parallel - \eta_\perp)\nu_i^{(0)}\nu_j^{(0)}\right) N_j, \quad (2)$$

где вектор N_j является линейной комбинацией величин $\nabla_i T$, $\nabla_k \sigma_{ik}$, Δ_i и т.д. и определяет скорость проскальзывания аэрогеля относительно жидкости, а коэффициенты η зависят от вязкости гелия. Градиенты обобщенных сил, входящих в выражение для N_j, инвариантны относительно инверсии времени, поэтому второй член в уравнении (2) связан с диссипативными процессами в жидкости, которыми мы в рассматриваемом приближении пренебрегаем. Применимость нашего приближения ограничивается малыми частотами, при которых можно считать, что аэрогель полностью увлекает нормальную компоненту жидкости при движении. Можно сформулировать последнее условие как малость среднего расстояния между нитями аэрогеля по сравнению с вязкой глубиной проникновения ^{3}He для рассматриваемых характерных частот движения.

Выпишем некоторые очевидные соотношения, определяющие обобщенные силы для рассматриваемой системы. В системе отсчета, где сверхтекучая компонента жидкости покоится, плотность потока массы можно записать в виде

$$j_i^{(0)} = (\rho_a \delta_{ij} + (\rho_n)_{ij})((v_n)_j - (v_s)_j), \quad (3)$$

где тензор $(\rho_n)_{ij}$ определяет величину нормальной компоненты плотности жидкости в направлении соответствующего движения. Определение нормальной плотности жидкости следует уточнить. Заметим, что в силу неоднородности системы, связанной с нитями аэрогеля, компоненты тензора $(\rho_n)_{ij}$ для направлений, перпендикулярных оси анизотропии аэрогеля, не стремятся к нулю при стремлении к нулю температуры. Данное утверждение остается верным даже при условии, что нити аэрогеля не подавляют амплитуду параметра порядка. Это является следствием того, что из-за потенциальности сверхтекучей скорости движение нитей аэрогеля через сверхтекучую жидкость приводит к возникновению у нитей присоединенной массы. Вклад присоединенный массы в определение тензора нормальной компоненты при нуле температур будет порядка $\rho_l d/\xi_a$, где d — средний диаметр нитей, ξ_a — среднее расстояние между нитями аэрогеля. Далее, используя преобразование Галилея для импульса, получим выражение для полного тока:

$$j_i = (\rho_a \delta_{ij} + (\rho_n)_{ij})(v_n)_j + (\rho_s)_{ij}(v_s)_j, \quad (4)$$

$$(\rho_n)_{ij} + (\rho_s)_{ij} = \rho_l \delta_{ij}, \quad (5)$$

где $(\rho_s)_{ij}$ — тензор сверхтекучей плотности, который обращается в нуль в точке сверхтекучего перехода внутри аэрогеля. Ток, сопряженный сверхтекучей скорости, является галилеевским инвариантом и получается из последнего выражения при переходе в систему покоя нормальной компоненты жидкости и аэрогеля:

$$(g_s)_i = (\rho_s)_{ij} w_j, \tag{6}$$

где $w_j = (v_s)_j - (v_n)_j$ — скорость движения сверхтекучей компоненты по отношению к нормальной.

Для дальнейшего будет полезно выделить в химических потенциалах части $\mu_l^{(0)}$, $\mu_a^{(0)}$, относящиеся к системе отсчета, где жидкость (ее сверхтекучая компонента) покоится:

$$\begin{aligned} \mu_l &= \mu_l^{(0)} + \frac{v_s^2}{2} - v_s v_n, \\ \mu_a &= \mu_a^{(0)} + \frac{v_s^2}{2} - v_s v_n. \end{aligned} \tag{7}$$

Оставшиеся обобщенные силы выведем, используя феноменологические представления об энергии системы, как функции от δ_i, m_i, $\nabla_i m_j$, u_{ij}. Обобщенную силу Δ_i легко получить из энергии анизотропии, которая для малых углов отклонения имеет вид

$$\delta F_a = -\kappa_a(T)(\nu_i m_i)^2, \tag{8}$$

$\kappa_a > 0$ для нематического аэрогеля. Заметим, что

$$\delta F_a = \frac{1}{2}\kappa_a \delta_i \delta_i - \kappa_a,$$

поэтому

$$\Delta_i = \kappa_a \delta_i. \tag{9}$$

Для того чтобы найти обобщенные силы X_i и L_{ij}, необходимо написать градиентную энергию сверхтекучего ^{3}He, связанную с неоднородностью вектора $\mathbf{m}$, и кинетическую энергию в системе отсчета, где нормальная компонента покоится. Последнее утверждение следует из требования галилеевской инвариантности рассматриваемых сил. Итак,

$$\begin{aligned} \delta F_{grad}^{(0)} = (\rho_s)_{ij}\frac{w_i w_j}{2} + \frac{1}{2}[c_1(\nabla_i m_i)^2 + \\ + c_2(\nabla_i m_j \nabla_i m_j) + c_3(e_{ijk} m_i \nabla_j m_k)^2], \end{aligned} \tag{10}$$

где первый член соответствуют энергии сверхтекучего тока, а второй — энергии текстуры вектора $\mathbf{m}$. Тензор сверхтекучей плотности для полярной фазы дается выражением

$$(\rho_s)_{ij} = \rho_s^{\perp}\delta_{ij} + (\rho_s^{\parallel} - \rho_s^{\perp}) m_i m_j, \; \rho_s^{\parallel} > \rho_s^{\perp}. \tag{11}$$

Энергия текстуры вектора $\mathbf{m}$ по форме совпадает с градиентной энергией нематика. Отметим, что в области применимости теории Гинзбурга–Ландау коэффициенты $c_{1,2} \sim N_F \Delta_P^2 \xi_s^2$, где N_F — плотность состояний на поверхности Ферми, Δ_P — амплитуда параметра порядка, ξ_s — длина когерентности сверхтекучего ^{3}He, а $c_3 \sim N_F \Delta_P^2 \xi_s^2 \Delta_P^2 / T_c^2$, т.е. имеет следующий порядок малости по амплитуде параметра порядка, и поэтому член с c_3 может быть опущен. Таким образом, в интересующей нас области температур (удельных энтропий) можно записать

$$X_i = \frac{\partial F_{grad}^{(0)}}{\partial m_i} = (\rho_s^{\parallel} - \rho_s^{\perp}) w_i w_j m_j, \tag{12}$$

$$L_{ij} = \frac{\partial F_{grad}^{(0)}}{\partial \nabla_i m_j} \approx c_1(\nabla_k m_k)\delta_{ij} + c_2 \nabla_i m_j. \tag{13}$$

Тензор напряжений аэрогеля в линейном по тензору деформаций приближении определим через квадратичную форму вида

$$\delta F_d = \mu_{ijkl}\frac{u_{ij}u_{kl}}{2}, \tag{14}$$

где тензор μ_{ijkl} имеет симметрию $\mu_{ijkl} = \mu_{jikl} = \mu_{ijlk} = \mu_{klij}$ и обладает свойством $\mu_{iikl} = \mu_{ijkk} = 0$. В нашем случае он содержит три феноменологические константы:

$$\begin{aligned} \mu_{ijkl} = \frac{\gamma_2}{2}\left(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\delta_{kl}\right) + \\ + \gamma_4\left(\frac{1}{4}[\delta_{ik}\nu_j^{(0)}\nu_l^{(0)} + \delta_{jl}\nu_i^{(0)}\nu_k^{(0)} + \right. \\ \left. + \delta_{jk}\nu_i^{(0)}\nu_l^{(0)} + \delta_{il}\nu_j^{(0)}\nu_k^{(0)}] - \nu_i^{(0)}\nu_j^{(0)}\nu_k^{(0)}\nu_l^{(0)}\right) + \\ + \gamma_5\left(\nu_i^{(0)}\nu_j^{(0)} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\right)\left(\nu_k^{(0)}\nu_l^{(0)} - \frac{1}{3}\delta_{kl}\right). \end{aligned} \tag{15}$$

Коэффициенты γ_i являются функциями ρ_a, ρ_l и s. Индексы “1” и “3” у коэффициентов γ зарезервированы для инвариантов $\delta_{ij}\delta_{kl}$ и $(\delta_{ij}\nu_k\nu_l + \delta_{kl}\nu_i\nu_j)$, которые исключаются из рассмотрения из-за условия $\mu_{iikl} = \mu_{ijkk} = 0$. Помимо рассмотренного вклада, есть еще линейный по деформации вклад в энергию, $\alpha u_{ij}\left(\nu_i^{(0)}\nu_j^{(0)} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\right)$. Таким образом,

$$\sigma_{ij} = \mu_{ijkl}u_{kl} + \alpha\left(\nu_i^{(0)}\nu_j^{(0)} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\right), \tag{16}$$

где второй член приводит к переопределению недеформированного состояния, т.е. описывает изменение равновесной формы аэрогеля при изменении удельной энтропии. Коэффициент α также является функцией s, ρ_a и ρ_l. Положим в дальнейшем $\alpha = 0$ для начального состояния равновесия, так чтобы в нем $\sigma_{ij} = 0$. Наконец, заметим, что линейный по деформации член вида $\sim \tilde{u}_{ij} m_i m_j$ рассматривать не нужно, так как влияние локальной оси анизотропии на направление вектора $\mathbf{m}$ уже было учтено в (8).

3. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Уравнения сохранения имеют для рассматриваемой системы стандартный вид:

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \nabla_i s(v_n)_i = 0, \tag{17}$$

$$\frac{\partial \rho_a}{\partial t} + \nabla_i \rho_a \dot{u}_i = 0, \tag{18}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla_i j_i = 0, \tag{19}$$

$$\frac{\partial j_i}{\partial t} + \nabla_j \Pi_{ij} = 0, \tag{20}$$

$$\frac{\partial (v_s)_i}{\partial t} + \nabla_j \phi_{ij} = 0, \tag{21}$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \nabla_i Q_i = 0, \tag{22}$$

где первое уравнение — это закон сохранения энтропии (в отсутствие затухания), второе и третье выражают законы сохранения массы аэрогеля и полной массы в произвольном объеме системы соответственно, четвертое уравнение — закон сохранения импульса, пятое — закон сохранения сверхтекучей скорости, шестое — закон сохранения энергии. Последнее уравнение должно удовлетворяться автоматически. Вместо уравнения сохранения полной массы можно пользоваться уравнением сохранения массы жидкости, которое получается при вычитании (18) из (19) при условии равенства $\dot{u}_i$ и $(v_n)_i$:

$$\frac{\partial \rho_l}{\partial t} + \nabla_i((\rho_s)_{ij}(v_s)_j + (\rho_n)_{ij}(v_n)_j) = 0. \tag{23}$$

Тензоры потока импульса и сверхтекучей скорости Π_{ij} и ϕ_{ij}, а также вектор потока энергии мы найдем далее с помощью стандартной процедуры. Помимо законов сохранения нам необходимы будут уравнения, описывающие движение остальных переменных: тензора деформаций и векторов m_i и δ_i.

Для того чтобы найти уравнение, описывающее изменение тензора деформации во времени, заметим следующее: при рассмотрении статических деформаций в теории упругости используется тензор деформаций (упругости) записываемый в координатах Лагранжа, т.е. в координатах, соответствующих недеформированному телу. В то же время в гидродинамике используются эйлеровы координаты, поэтому в нашем случае необходимо писать и тензор деформации в них же. Для начала введем тензор скоростей деформаций согласно определению

$$v_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right), \tag{24}$$

где $v_i \equiv \partial u_i/\partial t$. Учитывая формулу перехода от лагранжевых координат к эйлеровым, можно получить следующее соотношение [11]:

$$\frac{\partial u_{ij}}{\partial t} + v_k \frac{\partial u_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} u_{jk} + \frac{\partial v_k}{\partial x_j} u_{ki} = v_{ij}. \tag{25}$$

Заметим теперь, что в рассматриваемом приближении мы считаем, что $v_i \equiv \dot{u}_i = (v_n)_i$, и поэтому $v_{ij} = (v_n)_{ij}$. Таким образом, уравнение (25) можно рассматривать как уравнение движения для тензора деформаций.

Уравнение движения для вектора $\mathbf{m}$ запишем аналогично тому, как это делается для директора в нематической фазе жидких кристаллов. Без учета релаксационного члена имеем

$$\frac{\partial m_i}{\partial t} + (v_n)_j \nabla_j m_i = \Omega_{ij} m_j + \\ + \lambda_m(\delta_{ij} - m_i m_j) m_k (v_n)_{jk}, \tag{26}$$

где

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial (v_n)_i}{\partial x_j} - \frac{\partial (v_n)_j}{\partial x_i}\right)$$

описывает скорость локального поворота системы, а λ_m — феноменологический коэффициент, имеющий кинематическую природу [9]. Наконец, последнее необходимое уравнение движения — это уравнение для вектора δ_i, который определяет разницу между направлением локальной анизотропии аэрогеля и направлением орбитальной части параметра порядка. Для получения необходимого уравнения запишем сначала уравнение, аналогичное уравнению для $\mathbf{m}$, только для направления локальной анизотропии аэрогеля:

$$\frac{\partial \nu_i}{\partial t} + (v_n)_j \nabla_j \nu_i = \\ = \Omega_{ij}\nu_j + \lambda_\nu(\delta_{ij} - \nu_i \nu_j)\nu_k (v_n)_{jk}. \tag{27}$$

Здесь λ_ν — феноменологический коэффициент, аналогичный λ_m. При написании данного уравнения мы опять учли приближение отсутствия проскальзывания, т.е. что скорость $\dot{u}_i$ равна скорости $(v_n)_i$. Используя уравнения (26) и (27), получим уравнение для вектора δ_i. Для этого вычтем из (26) уравнение (27) и умножим полученное равенство на $m_i - \nu_i$, тогда после очевидных преобразований имеем

$$\partial_t (m-\nu)_j^2/2 + (v_n)_i \nabla_i (m-\nu)_j^2/2 = \\ = -\lambda_m(\nu_j - m_j(\nu_l m_l))(v_n)_{jk} m_k - \\ -\lambda_\nu (m_j - \nu_j(\nu_l m_l))(v_n)_{jk}\nu_k. \tag{28}$$

Поскольку введение вектора δ_i оправдано только для малых отклонений из равновесия, правую часть последнего равенства можно упростить до вида

$$\partial_t \frac{\delta_j\delta_j}{2} + (v_n)_i\nabla_i \frac{\delta_j\delta_j}{2} = (\lambda_m - \lambda_\nu)\delta_j(v_n)_{jk}\nu_k^0. \quad (29)$$

Таким образом, в отсутствие затухания динамика вектора δ_i возникает только при условии различия кинематических коэффициентов λ_m и λ_ν и определяется уравнением

$$\partial_t\delta_j + (v_n)_i\nabla_i\delta_j = (\lambda_m - \lambda_\nu)(v_n)_{jk}\nu_k^0. \quad (30)$$

Отметим, что линеаризованное по малым отклонениям уравнение имеет решение

$$\delta_i = (\lambda_m - \lambda_\nu)u_{ik}\nu_k^0, \quad (31)$$

где мы учли, что в отсутствие деформации $\delta_i = 0$.

4. ЗАМЫКАНИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

Для того чтобы система уравнений (17)–(21), (25), (26), (30) была замкнутой, необходимо найти выражения для потоков Π_{ij} и ϕ_{ij} через введенные переменные и соответствующие им обобщенные силы. Для дальнейшего вывода нам потребуется определение давления как частной производной полной энергии системы по объему в системе отсчета, где жидкость покоится:

$$\begin{aligned} p = &-\left(\frac{\partial(V\varepsilon^{(0)})}{\partial V}\right)_{M_l,M_a,S,\mathbf{P}^{(0)},m_i,\delta_i,\tilde{u}_{ik},\nabla_i m_k} = \\ &= -V\left(\frac{\partial(\varepsilon^{(0)})}{\partial V}\right)_{M_l,M_a,S,\mathbf{P}^{(0)},m_i,\delta_i,\tilde{u}_{ik},\nabla_i m_k} - \varepsilon_0. \end{aligned} \quad (32)$$

Здесь M_a — масса аэрогеля, M_l — масса ^{3}He внутри аэрогеля, S — полная энтропия, $\mathbf{P}^{(0)}$ — полный импульс в системе покоя жидкости, $\tilde{u}_{ik} = u_{ik} - (1/3)\delta_{ik}u_{ll}$. Из постоянства массы M_a следует, что $-V\partial(\rho_a)/\partial V = \rho_a$ и т.п., откуда следует выражение для давления вида

$$p = -\varepsilon^{(0)} + Ts + \mu_a^{(0)}\rho_a + \mu_l^{(0)}\rho_l - j_i^{(0)}w_i, \quad (33)$$

а для дифференциала давления имеем соответственно

$$\begin{aligned} dp = &sdT + \rho_a d\mu_a^{(0)} + \rho_l d\mu_l^{(0)} - j_i^{(0)}dw_i - \\ &- \sigma_{ij}d\tilde{u}_{ij} - X_i dm_i - \Delta_i d\delta_i - L_{ij}d\nabla_i m_j. \end{aligned} \quad (34)$$

Найдем теперь явные выражения для тензоров потока импульса, сверхтекучей скорости и потока энергии. Для этого воспользуемся стандартной процедурой, согласно которой необходимо свести частную производную энергии единицы объема к полной дивергенции потока энергии. Используя соотношение (1), запишем частную производную энергии по времени и подставим вместо частных производных переменных их выражения из уравнений (17)–(21), (25), (26), (30):

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varepsilon}{\partial t} = &T\frac{\partial s}{\partial t} + \mu_a\frac{\partial\rho_a}{\partial t} + \mu_l\frac{\partial\rho_l}{\partial t} + \\ &+ (v_n)_i\frac{\partial j_i}{\partial t} + (g_s)_i\frac{\partial(v_s)_i}{\partial t} + \\ &+ \sigma_{ik}\frac{\partial\tilde{u}_{ik}}{\partial t} + \Delta_i\frac{\partial\delta_i}{\partial t} + X_i\frac{\partial m_i}{\partial t} + L_{ij}\frac{\partial\nabla_i m_j}{\partial t} = \\ &= T(-\nabla_i s(v_n)_i) + \mu_a(-\nabla_i(\rho_a(v_n)_i)) + \\ &+ \mu_l(-\nabla_i(\rho_l(v_n)_i + (\rho_s)_{ij}w_j) + \\ &+ \sigma_{ij}[(v_n)_{ij} - (v_n)_k\frac{\partial u_{ij}}{\partial x_k} - \frac{\partial(v_n)_k}{\partial x_i}u_{jk} - \frac{\partial(v_n)_k}{\partial x_j}u_{ki}] + \\ &(v_n)_i(-\nabla_j\Pi_{ij}) + (\rho_s)_{ik}w_k(-\nabla_j\phi_{ij}) + \\ &+ \Delta_i[(\lambda_m - \lambda_\nu)(v_n)_{ij}\nu_j^0 - (v_n)_j\nabla_j\delta_i] + \\ &+ X_i[\Omega_{ij}m_j + \lambda_m(\delta_{ij} - m_i m_j)m_k(v_n)_{jk} - (v_n)_j\nabla_j m_i] + \\ &+ L_{ij}\nabla_i[\Omega_{jk}m_k + \lambda_m(\delta_{jk} - m_j m_k)m_p(v_n)_{kp} - \\ &- (v_n)_k\nabla_k m_j], \end{aligned}$$

где при подстановке частной производной тензора деформаций мы воспользовались тем, что

$$\sigma_{ik}\frac{\partial\tilde{u}_{ik}}{\partial t} = \sigma_{ik}\frac{\partial u_{ik}}{\partial t}.$$

Выделим теперь в написанном выражении полную производную вида

$$\begin{aligned} &-\nabla_i[(Ts + \mu_a\rho_a + \mu_l\rho_l)(v_n)_i + \\ &+ \phi_{ij}(\rho_s)_{jk}[(v_s)_k - (v_n)_k] - \\ &- (\rho_s)_{ij}[(v_s)_j - (v_n)_j](v_n)_k(v_s)_k + \Pi_{ij}(v_n)_j - \\ &- L_{ij}[\Omega_{jk}m_k + \lambda_m(\delta_{jk} - m_j m_k)m_p(v_n)_{kp}]]. \end{aligned} \quad (35)$$

Оставшиеся члены сначала сгруппируем следующим образом:

$$\begin{aligned} &\nabla_j(g_s)_i[(-\mu_l^{(0)} - \frac{v_s^2}{2})\delta_{ij} + \phi_{ij}] - \\ &- (\rho_s)_{ij}w_j\nabla_i[(v_s)_k(v_n)_k] + \\ &+ (v_n)_i[s\nabla_i T + \rho_a\nabla_i\mu_a^{(0)} + \rho_l\nabla_i\mu_l^{(0)} + \\ &+ (\rho_a\delta_{jk} + (\rho_n)_{jk})w_k\nabla_i w_j - \\ &- \sigma_{jk}\nabla_i\tilde{u}_{jk} - \Delta_j\nabla_i\delta_j - X_j\nabla_i m_j - L_{jk}\nabla_i\nabla_j m_k] + \\ &+ (v_n)_i\{(\rho_a + \rho_l)\nabla_i(\frac{v_s^2}{2} - (v_s)_j(v_n)_j) - \\ &- (\rho_a\delta_{jk} + (\rho_n)_{jk})w_k\nabla_i w_j\} + \\ &+ \nabla_i(v_n)_j[\Pi_{ij} + \sigma_{ij} - u_{ik}\sigma_{jk} - u_{jk}\sigma_{ik} + \end{aligned}$$

$$+\frac{1}{2}(\lambda_m-\lambda_\nu)\left(\Delta_i\nu_j^0+\Delta_j\nu_i^0\right)+\frac{1}{2}(\tilde{X}_i m_j-\tilde{X}_j m_i)+ \\ +\frac{1}{2}\lambda_m(\tilde{X}_i m_j+\tilde{X}_j m_i)- \\ -\lambda_m(\tilde{X}_k m_k)m_i m_j-L_{ik}\nabla_j m_k], \quad (36)$$

где $\tilde{X}_i = X_i - \nabla_j L_{ji}$. Для химических потенциалов была использована формула (7). Далее можно легко показать, что симметричный тензор $\nabla_i(v_s)_k$ в выражении (36) сворачивается с антисимметричным тензором $(\rho_s)_{kj}w_j(v_n)_i-(\rho_s)_{ij}w_j(v_n)_k$, а оставшиеся члены, пропорциональные тензору $\nabla_i(v_n)_j$, приводятся к виду

$$-\nabla_i(v_n)_j\Big\{(\rho_s)_{ik}(v_s)_k(v_s)_j+ \\ +\{\rho_a\delta_{jk}+(\rho_n)_{jk}\}(v_n)_k(v_n)_i- \\ -(\rho_s)_{ik}(v_n)_k(v_s)_j+(\rho_s)_{jk}(v_n)_k(v_s)_i\Big\}.$$

Согласно (34) выражение, на которое умножается $(v_n)_i$ в (36), равно $\nabla_i p$. Выделим из данного члена полную дивергенцию, и заметим, что поскольку рассматриваются только обратимые процессы, коэффициенты перед $\nabla_j(v_n)_i$ и $\nabla_j(g_s)_i$ должны тождественно обратиться в нуль. Из данных двух уравнений мы в итоге получим выражения для тензоров Π_{ij} и ϕ_{ij}:

$$\phi_{ij}=(\mu_l^{(0)}+\frac{v_s^2}{2})\delta_{ij}, \quad (37)$$

$$\Pi_{ij}=p\delta_{ij}+(\rho_s)_{ik}(v_s)_k(v_s)_j+ \\ +(\rho_a\delta_{jk}+(\rho_n)_{jk})(v_n)_k(v_n)_i- \\ -(\rho_s)_{ik}(v_n)_k(v_s)_j+(\rho_s)_{jk}(v_n)_k(v_s)_i- \\ -\sigma_{ij}+\tilde{u}_{ik}\sigma_{jk}+\tilde{u}_{jk}\sigma_{ik}- \\ -\frac{1}{2}(\lambda_m-\lambda_\nu)\left(\Delta_i\nu_j^0+\Delta_j\nu_i^0\right)- \\ -\frac{1}{2}(\tilde{X}_i m_j-\tilde{X}_j m_i)-\frac{1}{2}\lambda_m(\tilde{X}_i m_j+\tilde{X}_j m_i)+ \\ +\lambda_m(\tilde{X}_k m_k)m_i m_j+L_{ik}\nabla_j m_k. \quad (38)$$

Тензор Π_{ij} можно привести к симметричному виду, так как у полярной фазы нет вектора, описывающего спонтанный орбитальный момент. В рассматриваемом в задаче приближении (имеется в виду вид тензора L_{ij} вблизи T_c, выражения для силы X_i и тензора сверхтекучей плотности $(\rho_s)_{ij}$) данное действие можно проделать непосредственно. Легко показать, что антисимметричную часть тензора Π_{ij} можно представить в виде дивергенции от тензора третьего ранга, антисимметричного по двум оставшимся индексам:

$$\Pi_{ij}-\Pi_{ji}=\nabla_k(m_i L_{kj}-m_j L_{ki}), \quad (39)$$

тогда, воспользовавшись стандартной процедурой симметризации [9], в итоге получим

$$\Pi_{ik}=\Pi_{ik}^0+j_i^{(0)}(v_s)_k+j_k^{(0)}(v_s)_i+ \\ +(\rho_l+\rho_a)(v_s)_i(v_s)_k, \\ \Pi_{ij}^0=p\delta_{ij}-\sigma_{ij}+\tilde{u}_{ik}\sigma_{jk}+\tilde{u}_{jk}\sigma_{ik}-\sigma_{ij}^m- \\ -\frac{\kappa_a}{2}(\lambda_m-\lambda_\nu)\left(\delta_i\nu_j^0+\delta_j\nu_i^0\right)+ \\ +\{\rho_a+\rho_l\}w_i w_j+ \\ +\frac{1}{2}(1-\lambda_m)(\rho_s^{\parallel}-\rho_s^{\perp})w_k m_k\{w_i m_j+w_j m_i\}+ \\ +\lambda_m(\rho_s^{\parallel}-\rho_s^{\perp})(w_k m_k)^2 m_i m_j, \quad (40)$$

где σ_{ij}^m — симметричный тензор вида

$$\sigma_{ij}^m=-\frac{1}{2}(L_{jk}\partial_i m_k+L_{ik}\partial_j m_k)- \\ -\frac{1}{2}\partial_k[(L_{ij}+L_{ji})m_k-L_{jk}m_i-L_{ik}m_j], \quad (41)$$

а выражение для X_i было подставлено из (12). Как и должно было быть, тензор потока импульса при галилеевском преобразовании меняется аналогично случаю изотропной сверхтекучей жидкости. Взаимодействие сверхтекучей системы с аэрогелем заключается в появлении дополнительной плотности ρ_a в определении $j_i^{(0)}$, а также в появлении в выражении для потока импульса тензора напряжений аэрогеля. Отметим также, что согласно введенному определению давление включает в себя зависимость от плотности аэрогеля (аналог парциального давления в смеси газов). Наконец, итоговое выражение для потока энергии имеет вид

$$Q_i=(Ts+\mu_a\rho_a+\mu_l\rho_l-p)(v_n)_i+\mu_l(g_s)_i+ \\ +\Pi_{ij}(v_n)_j-L_{ij}[\Omega_{jk}m_k+ \\ +\lambda_m(\delta_{jk}-m_j m_k)m_p(v_n)_{kp}]. \quad (42)$$

После определения тензоров Π_{ij} и ϕ_{ij} можно говорить о замкнутой системе нелинейных уравнений (17)–(21), (25), (26), (30), которая описывает совместные движения аэрогеля, нормальной и сверхтекучей компонент жидкости. В случае малых деформаций уравнения могут быть существенно упрощены. Во-первых, в выражении для потока импульса можно пренебречь членами $\tilde{u}_{ik}\sigma_{jk}$, $\tilde{u}_{jk}\sigma_{ik}$. Во-вторых, заметим, что левые части уравнений (26), (30) можно линеаризовать по параметру u/L, где L

— характерный масштаб пространственного изменения гидродинамичесих переменных, u — характерная амплитуда смещения. Тогда δ_i становится линейной функцией деформации, а член в потоке импульса, содержащий данную переменную, приводится к виду

$$\frac{\kappa_a}{2}(\lambda_m-\lambda_\nu)^2\left(u_{ik}\nu_k^0\nu_j^0+u_{jk}\nu_k^0\nu_i^0\right),$$

который имеет ту же тензорную структуру, что и член, пропорциональный γ_4, в σ_{ij}. Данная перенормировка коэффициента γ_4 возникает при переходе в полярную фазу, так как $\kappa_a\sim\Delta_P^2$. Также покажем, что в рассматриваемом приближении учет неоднородности вектора $\mathbf{m}$ в энергии приводит к превышению точности. Действительно, из линеаризованного уравнения (26),

$$\frac{\partial m_i}{\partial t}=\Omega_{ij}m_j^{(0)}+\lambda_m(\delta_{ij}-m_i^0m_j^{(0)})m_k^{(0)}v_{jk},\qquad(43)$$

следует, что

$$\partial_j m_i=\frac{1}{2}\partial_j\left(\partial_i u_k-\partial_k u_i\right)m_k^{(0)}+ \\ +\lambda_m(\delta_{il}-m_i^0m_l^{(0)})m_k^{(0)}\partial_j u_{lk}.\qquad(44)$$

В теории упругости рассматриваются только длинноволновые возмущения, поэтому в рассматриваемом приближении $\partial_j m_i$ является малой величиной следующего порядка по пространственному градиенту вектора смещения. Из сравнения соответствующих градиентных членов в выражении для энергии следует, что малым параметром разложения является $\frac{N_f\Delta_P^2}{\rho_a c_a^2}\frac{\xi_s^2}{L^2}$, где c_a — скорость звука в аэрогеле. Заметим, что здесь малой величиной помимо отношения длин является еще и величина $\frac{N_f\Delta_P^2}{\rho_a c_a^2}$, которая показывает, что вкладом в жесткость системы сверхтекучей компоненты можно пренебречь. Из сказанного выше следует, что в выражениях для потока импульса и потока энергии можно пренебречь членами с σ_{ij}^m, поэтому уравнения (17)–(25) можно решать независимо от уравнения (26).

В качестве граничных условий к написанным уравнениям можно использовать требование непрерывности потоков через границу аэрогеля:

$$j_i^{in}n_i=j_i^{out}n_i,\qquad(45)$$

$$\phi_{ij}^{in}n_j=\phi_{ij}^{out}n_j,\qquad(46)$$

$$\Pi_{ij}^{in}n_j=\Pi_{ij}^{out}n_j,\qquad(47)$$

где n_i — внешняя нормаль к поверхности аэрогеля, а все потоки вычисляются в системе, где аэрогель покоится. В линейном приближении, а также учитывая, что между аэрогелем и нормальной компонентой жидкости нет проскальзывания, получим следующие условия непрерывности на границе аэрогеля:

$$(g_s)_i n_i=\mathrm{const},\qquad(48)$$

$$\mu_l=\mathrm{const},\qquad(49)$$

$$(p\delta_{ij}-\sigma_{ij})n_j=\mathrm{const}.\qquad(50)$$

Заметим, что в работе [12] было показано, что при потенциальном обтекании аэрогеля сверхтекучей жидкостью фаза параметра порядка является непрерывной функцией на границе аэрогеля в случае слабой неоднородности модуля параметра порядка в этой области, что не противоречит условию (49). Из непрерывности потока энтропии следует также, что

$$(v_n)_i^{out}n_i=(v_n)_i^{in}n_i.\qquad(51)$$

При сделанных предположениях уравнение непрерывности потока энергии выполняется автоматически. Дополнительно отметим, что при выводе уравнений делалось предположение о сохранении полной массы жидкости, заключенной внутри аэрогеля. Поэтому, так как в рассматриваемом приближении нормальная компонента жестко связана с каркасом аэрогеля, сверхтекучие токи на границе аэрогеля должны удовлетворять дополнительному условию

$$\oint(g_s)_i n_i dS=0,$$

где dS — элемент поверхности аэрогеля.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Подытожим полученные результаты: нами получена система гидродинамических уравнений для полярной фазы сверхтекучего ^{3}He в одноосном нематическом аэрогеле, которая включает в себя уравнения для переменных s, ρ_a, ρ_l, v_s, j_i, u_{ij}, m_i и δ_i. В линейном приближении движение орбитального вектора m_i, определяющего направление орбитальной части параметра порядка, не входит в уравнения для остальных гидродинамических переменных, а переменная δ_i становится линейной функцией тензора деформаций, что приводит к перенормировке коэффициента γ_4 в тензоре напряжений системы. Таким образом, в этом приближении гидродинамические уравнения для полярной фазы по форме ничем не отличаются от уравнений для изотропной сверхтекучей жидкости в том же аэрогеле за исключением замены сверхтекучей плотности (скаляра) в изотропном случае на тензор сверхтекучей плотности в случае полярной фазы. Так как в рассматриваемом приближении отсутствует проскальзывание между нормальной компонентой ^{3}He и аэрогелем, то плотность тока массы является линейной функцией от производной по времени от вектора смещения $\dot{u}_i$ и сверхтекучей скорости $(v_s)_i$. Поэтому в качестве независимых переменных можно рассматривать s, ρ_a, ρ_l, v_s и u_i, причем уравнение сохранения импульса является уравнением второго порядка по пространственным и временным производным вектора смещения u_i. Отметим, что из-за взаимодействия аэрогеля и ^{3}He сохраняется полный импульс системы, т.е. происходит передача импульса от аэрогеля к ^{3}He. Данный факт отражен в том, что тензор потока импульса содержит компоненты тензора напряжений аэрогеля. Таким образом, колебательный спектр системы должен включать в себя совместные колебания каркаса аэрогеля и сверхтекучего ^{3}He. Исследование данного вопроса требует отдельного рассмотрения.

Отметим также еще одну деталь, которая отличает данную задачу от рассмотренной Халатниковым: помимо того, что тензор потока импульса содержит компоненты тензора напряжений аэрогеля, химический потенциал жидкости $\mu_l^{(0)}$ будет теперь зависеть не только от s, ρ_l и ρ_a, но и от компоненты u_{zz} тензора деформаций аэрогеля, что обеспечивает дополнительную возможность связи между различными колебательными степенями свободы в системе. Граничные условия к написанным уравнениям включают в себя требования непрерывности потоков рассмотренных гидродинамических величин. Поэтому при решении задачи о колебаниях аэрогеля внутри сверхтекучей жидкости необходимо также добавить в рассмотрение задачу о движении сверхтекучей жидкости вокруг аэрогеля с заданными граничными условиями на бесконечности.

Благодарности. Автор признателен Л.А. Мельниковскому, И.А. Фомину и А.Н. Юдину за полезные комментарии.

Финансирование. Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект №18-12-00384).

ЛИТЕРАТУРА

1. V. V. Dmitriev, A. A. Senin, A. A. Soldatov, and A. N. Yudin, Phys. Rev. Lett. **115**, 165304 (2015).

2. В. В. Дмитриев, М. С. Кутузов, А. А. Солдатов, Е. В. Суровцев, А. Н. Юдин, Письма в ЖЭТФ **112**, 820 (2020).

3. V. V. Dmitriev, M. S. Kutuzov, A. A. Soldatov, and A. N. Yudin, Phys. Rev. Lett. **127**, 265301 (2021).

4. И. М. Халатников, ЖЭТФ **23**, 169 (1952).

5. M. J. McKenna, T. Slawecki, and J. D. Maynard, Phys. Rev. Lett. **66**, 1878 (1991).

6. A. Golov, D. A. Geller, and J. M. Parpia, Phys. Rev. Lett. **82**, 3492 (1999).

7. H. R. Brand and H. Pleiner, Phys. Rev. B **102**, 094510 (2020).

8. H. R. Brand and H. Pleiner, Phys. Rev. B **105**, 174508 (2022).

9. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория упругости*, Наука, Москва (2005).

10. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Гидродинамика*, Наука, Москва (2005).

11. М. Э. Эглит, *Лекции по основам механики сплошных сред*, Ленанд, Москва (2020).

12. Е. В. Суровцев, ЖЭТФ **160**, 553 (2021).