

# ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ДВУХ ЗАРЯЖЕННЫХ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ШАРОВ С ТОЧЕЧНЫМ ЗАРЯДОМ

*М. М. Родин, А. В. Филиппов\**

*Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)  
141701, Долгопрудный, Московская обл., Россия*

*ГНЦ РФ Троицкий институт инновационных и термоядерных исследований  
108840, Троицк, Москва, Россия*

*Объединенный институт высоких температур Российской академии наук  
125412, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 11 октября 2022 г.,  
после переработки 2 ноября 2022 г.  
Принята к публикации 4 ноября 2022 г.

Рассмотрена задача о взаимодействии трех заряженных частиц, размером одной из которых можно пренебречь. Методом разложения по шаровым гармоникам найдены уравнения для коэффициентов разложения потенциала электрического поля. Получены выражения для декартовых компонент силы и момента силы взаимодействия. Показано, что несмотря на нарушение аксиальной симметрии при добавлении третьей частицы, при равномерной зарядке частицы сферической формы все компоненты вектора момента силы, действующей на нее, равны нулю. Путем выделения вкладов зарядов-изображений в явном виде получены формулы для поверхностной плотности заряда и силы взаимодействия частиц. Исследованы условия возникновения притяжения между одноименно заряженными сферическими частицами в зависимости от положения точечной.

DOI: 10.31857/S0044451023030033

EDN: QDIKKL

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В природе и технике существует множество примеров, когда в механизме взаимодействия заряженных макроскопических объектов электростатическая сила играет главенствующую роль. К таким системам относятся заряженные пылевые частицы в космосе [1], заряженные аэрозоли в атмосферах планет и спутников [2–4], частицы конденсированной дисперсной фазы в плазме и электролитах [5], частицы порошковых красок [6] и ряд других. В качестве модели чаще всего рассматриваются пары проводящих [7, 8] или диэлектрических шаров [9–11], частицы сфероидальной формы [12, 13], системы, включающие в себя точечные частицы [14] или неограниченные плоскости [15]. Для выбранной геометрии рассчитываются сила и потенциал взаимодействия

заряженных тел, а также распределение связанных зарядов на поверхностях диэлектриков. Это позволяет, в частности, определить условия возникновения притяжения между одноименно заряженными объектами [16], что является существенным для описания эволюции таких систем и объяснения наблюдаемых в эксперименте эффектов [17].

Во многих работах, посвященных теоретическому исследованию взаимодействия двух диэлектрических частиц, поставленная задача решалась в бисферической системе координат (см., например, [7, 9, 16, 18–20]). Известны также результаты расчетов в сферической системе координат методом переразложения [11, 18, 19, 21], методом изображений [18, 19] и численные решения методом конечных элементов Галеркина [6]. В последние годы начаты исследования электростатического взаимодействия многих сферических частиц методом интегральных уравнений [22–25].

В настоящей работе исследуется влияние соседних частиц на взаимодействие пары заряженных диэлектрических частиц. В сферической системе координат рассматривается система из трех частиц,

\* E-mail: fav@triniti.ru

одна из которых для упрощения задачи полагается точечной (неполяризуемой). Это означает, что распределение связанных зарядов на поверхностях частиц конечного размера возмущено присутствием третьей частицы, но перераспределением заряда на поверхности самой этой частицы можно пренебречь, т. е. самосогласованное перераспределение плотности заряда затрагивает только две частицы из трех. Эта упрощенная модель приводит, однако, к существенным вычислительным трудностям, связанным с крайне медленной сходимостью рядов для электростатического потенциала вблизи поверхностей сферических частиц при малых межчастичных расстояниях. В данной работе предлагается метод преодоления этих трудностей на основе аналитических преобразований рядов, входящих в выражение для электростатического потенциала.

## 2. АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ В СФЕРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

### 2.1. Электростатический потенциал системы

Введем сферическую систему координат  $(r, \theta, \varphi)$  с началом в центре первого диэлектрического шара радиусом  $a_1$ , полярную ось  $z$  направим к центру второго шара (его радиус  $a_2$ , расстояние между центрами шаров  $R$ ), а плоскость  $xz$ , соответствующую нулю азимутального угла  $\varphi$ , проведем через третью точечную частицу (см. рис. 1). На рисунке точка наблюдения  $P$  определена также через координаты  $(r_2, \theta_2, \varphi_2)$ , связанные со вторым шаром (в дальнейшем введенные системы координат будем для краткости обозначать соответственно СК1 и СК2); отметим, что СК2 получена из СК1 сдвигом вдоль оси  $z$  без изменения ориентации осей, поэтому  $\varphi = \varphi_2$ . Полные заряды частиц обозначим  $q_1, q_2$  и  $q_0$ ; последняя, точечная, частица имеет координаты  $(r_{01}, \theta_0, \varphi = 0)$  в СК1 и  $(r_{02}, \theta_{02}, \varphi = 0)$  в СК2. Положение точки наблюдения  $P$  относительно точечной частицы определяется вектором  $\mathbf{r}_0$ , который из центра первого шара виден под углом  $\gamma$ .

Для определения электростатического потенциала системы воспользуемся методом разложения потенциалов сферических частиц по шаровым функциям в собственных системах координат с последующим переразложением для удобства подстановки в граничные условия. Данный метод использовался, например, в работах [11, 16], в которых решалась аксиально-симметричная задача. В рассматриваемой нами геометрии имеет место симметрия относительно плоскости  $xz$ ,

поэтому для разложения достаточно использовать четные по азимутальному углу функции  $r^{-n-1}P_n^m(\cos\theta)\cos m\varphi$  и  $r^n P_n^m(\cos\theta)\cos m\varphi$ . Обозначив  $\mu = \cos\theta$  и  $\mu_2 = \cos\theta_2$ , запишем представление потенциала внутри диэлектрических частиц:

$$\begin{aligned} \phi_I(r, \mu, \varphi) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \alpha_{1,n}^m r^n P_n^m(\mu) \cos m\varphi, \\ \phi_{II}(r_2, \mu_2, \varphi) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \alpha_{2,n}^m r_2^n P_n^m(\mu_2) \cos m\varphi, \end{aligned} \tag{1}$$

где  $\alpha_{1,n}^m, \alpha_{2,n}^m$  — коэффициенты разложения. Здесь учтено, что в центрах сферических частиц потенциал должен быть конечным. Аналогично, в силу обращения в нуль на бесконечности, разложение потенциала каждой из частиц во внешнем пространстве имеет вид

$$\phi_1(r, \mu, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n A_{n,1}^m \frac{P_n^m(\mu)}{r^{n+1}} \cos m\varphi, \tag{2}$$

$$\phi_2(r_2, \mu_2, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n B_{n,2}^m \frac{P_n^m(\mu_2)}{r_2^{n+1}} \cos m\varphi. \tag{3}$$

Второй нижний индекс коэффициентов указывает на систему координат, в которой проведено разложение.

Переразложение потенциалов  $\phi_1, \phi_2$  во взаимных системах координат реализуется с помощью взаимного представления шаровых функций, отнесенных к соответствующей системе координат. При  $r < R$  справедлива формула [26]

$$\begin{aligned} \frac{P_n^m(\mu_2)}{r_2^{n+1}} &= \frac{(-1)^{n-m}}{R^{n+1}} \times \\ &\times \sum_{k=m}^{\infty} \frac{(n+k)!}{(n-m)!(k+m)!} \left(\frac{r}{R}\right)^k P_k^m(\mu), \end{aligned} \tag{4}$$

следовательно, потенциал второй сферической частицы в системе координат, связанной с первой, можно представить в виде

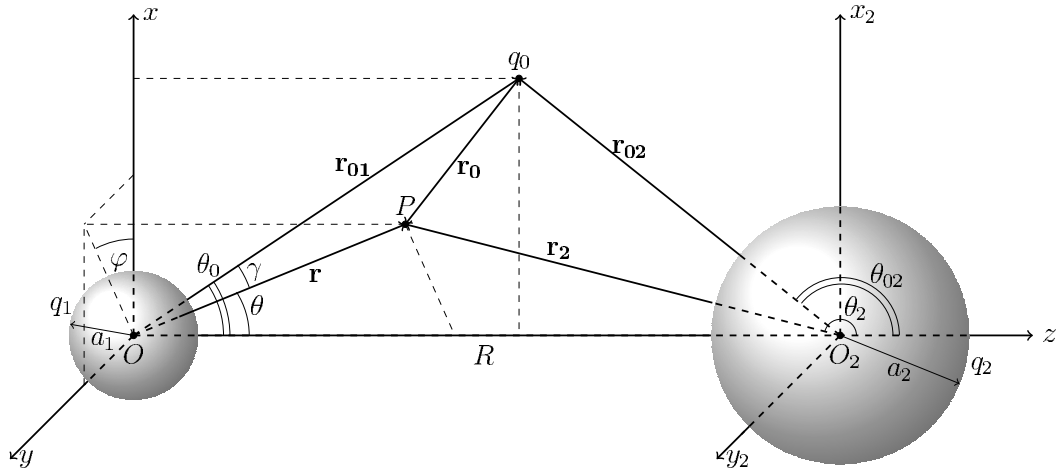
$$\phi_2(r, \mu, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n B_{n,1}^m r^n P_n^m(\mu) \cos m\varphi, \tag{5}$$

где

$$B_{n,1}^m = \frac{1}{R^n} \sum_{k=m}^{\infty} \frac{(-1)^{k-m} (k+n)!}{(k-m)!(n+m)!} \frac{B_{k,2}^m}{R^{k+1}}. \tag{6}$$

Аналогично, при  $r_2 < R$

$$\phi_1(r_2, \mu_2, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n A_{n,2}^m r_2^n P_n^m(\mu_2) \cos m\varphi, \tag{7}$$



**Рис. 1.** Геометрия задачи о взаимодействии двух сферических шаров с точечным зарядом  $q_0$ ;  $O$  — центр первой макрочастицы с радиусом  $a_1$  и зарядом  $q_1$ ,  $O_2$  — центр второй макрочастицы с радиусом  $a_2$  и зарядом  $q_2$ ;  $r$ ,  $\theta$  и  $r_{01}$ ,  $\theta_0$  — радиус-вектор, полярный угол точки наблюдения  $P$  и координаты точечного заряда в сферической системе координат с полюсом в точке  $O$  и с осью, направленной к  $O_2$ ;  $r_2$ ,  $\theta_2$  и  $r_{02}$ ,  $\theta_{02}$  — радиус-вектор, полярный угол точки наблюдения  $P$  и координаты точечного заряда в сферической системе координат с полюсом в центре второй макрочастицы;  $R$  — расстояние между центрами макрочастиц,  $r_0$  — расстояние между точечным зарядом и точкой наблюдения

где

$$A_{n,2}^m = \frac{(-1)^{n-m}}{R^n} \sum_{k=m}^{\infty} \frac{(k+n)!}{(k-m)!(n+m)!} \frac{A_{k,1}^m}{R^{k+1}}. \quad (8)$$

Наконец, найдем выражение для потенциала третьей частицы в системах координат, связанных с первыми двумя. При  $r < r_{01}$  имеем

$$\phi_0 \equiv \frac{q_0}{\epsilon r_0} = \frac{q_0}{\epsilon r_{01}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{r_{01}}\right)^n P_n(\nu). \quad (9)$$

Здесь мы воспользовались производящей функцией многочленов Лежандра;  $\nu = \cos \gamma$ ,  $\epsilon$  — диэлектрическая проницаемость среды. Согласно теореме сложения [27],

$$P_n(\nu) = \sum_{m=0}^n \frac{2}{1 + \delta_{m0}} \times \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\mu_0) P_n^m(\mu) \cos m\varphi, \quad (10)$$

где  $\delta_{m0}$  — символ Кронекера. Следовательно, в СК1

$$\phi_0(r, \mu, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n C_{n,1}^m r^n P_n^m(\mu) \cos m\varphi, \quad (11)$$

где

$$C_{n,1}^m = \frac{2}{1 + \delta_{m0}} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \frac{q_0}{\epsilon r_{01}^{n+1}} P_n^m(\mu_0). \quad (12)$$

Выражение для  $\phi_0(r_2, \mu_2, \varphi)$  будет отличаться только индексами.

Суммарный потенциал  $\phi$ , полученный как суперпозиция (2), (5) и (11),

$$\phi = \phi_0 + \phi_1 + \phi_2, \quad (13)$$

и потенциал  $\phi_1$  из (1) должны удовлетворять граничным условиям, которые на границе однородных диэлектриков имеют вид

$$\begin{aligned} \phi_1|_{r=a_1} &= \phi|_{r=a_1}, \\ \epsilon_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial r} \Big|_{r=a_1} - \epsilon \frac{\partial \phi}{\partial r} \Big|_{r=a_1} &= 4\pi\sigma_{1,f}. \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь  $\epsilon_1$  — диэлектрическая проницаемость материала первого шара,  $\sigma_{1,f}$  — плотность свободного заряда на его поверхности. Считая, что свободный заряд на сферических частицах распределен равномерно, из уравнений (14), дополненных аналогичными для второй частицы, получаем систему уравнений ( $n = 0, 1, \dots, m = 0, 1, \dots, n$ ):

$$\begin{aligned} \frac{A_{n,1}^m}{a_1^{2n+1}} + \beta_{1,n} B_{n,1}^m &= 4\pi\sigma_{1,f} a_1 \delta_{n0} - \beta_{1,n} C_{n,1}^m, \\ \frac{B_{n,2}^m}{a_2^{2n+1}} + \beta_{2,n} A_{n,2}^m &= 4\pi\sigma_{2,f} a_2 \delta_{n0} - \beta_{2,n} C_{n,2}^m, \end{aligned} \quad (15)$$

где  $C_{n,2}^m$  — коэффициенты разложения  $\phi_0$  в СК2, аналогичные (12);  $\beta_{1,n}$ ,  $\beta_{2,n}$  — коэффициенты, определенные соотношениями

$$\beta_{i,n} = \frac{n(\epsilon_i - \epsilon)}{n\epsilon_i + (n+1)\epsilon}, \quad i = 1, 2; \quad (16)$$

$\epsilon_i$  — проницаемость  $i$ -го диэлектрического шара.

Из системы (15) с учетом (6), (8) можно найти коэффициенты разложения  $A_{n,1}^m, B_{n,2}^m$  потенциалов шаров в собственных системах координат. При этом для монопольных членов из (15) следуют явные решения:

$$\begin{aligned} A_{0,1} &= \frac{4\pi\sigma_{1,f}a_1^2}{\varepsilon} \equiv \frac{q_1}{\varepsilon}, \\ B_{0,2} &= \frac{4\pi\sigma_{2,f}a_2^2}{\varepsilon} \equiv \frac{q_2}{\varepsilon}. \end{aligned} \quad (17)$$

### 2.2. Плотность поверхностного заряда

В ряде работ [11, 16] было показано, что одноименно заряженные тела на близких расстояниях могут испытывать притяжение вследствие перераспределения заряда на их поверхностях. При этом вклад в отталкивание всегда дает свободный заряд, распределение которого  $\sigma_{i,f}$  ( $i = 1, 2$ ) мы считаем равномерным. Получим выражение для плотности связанных зарядов  $\sigma_{i,b} = \sigma_i - \sigma_{i,f}$ , возмущение которой может вызвать притяжение. Плотность полного заряда  $\sigma_1$  на поверхности диэлектрика определяется скачком напряженности электрического поля:

$$\left. \frac{\partial\phi_1}{\partial r} \right|_{r=a_1} - \left. \frac{\partial\phi}{\partial r} \right|_{r=a_1} = \frac{4\pi\sigma_1}{\varepsilon}. \quad (18)$$

В итоге из выражений (14) и (18) имеем

$$\sigma_{1,b} = \frac{\varepsilon}{4\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n (2n+1) \frac{A_{n,1}^m}{a_1^{n+2}} P_n^m(\mu) \cos m\varphi. \quad (19)$$

Отметим, что, подставив в эту формулу  $A_{n,1}^m$  из первого уравнения системы (15), можно разделить вклады второй сферической и точечной частиц в плотность заряда на первой (они будут выражаться рядами с общим членом, пропорциональным соответственно  $B_{n,1}^m$  и  $C_{n,1}^m$ ). Для второго шара справедливы аналогичные соображения.

### 2.3. Сила взаимодействия

Найдем теперь составляющие силы, действующей на первый диэлектрический шар. На элемент поверхности частицы действует сила, определяемая максвелловским тензором натяжений [28], проекции которой в декартовой системе координат имеют вид

$$\begin{aligned} f_{1x} &= \frac{\varepsilon}{4\pi} \left[ \frac{1}{2} \sin\theta \cos\varphi (E_r^2 - E_\theta^2 - E_\varphi^2) + \right. \\ &\quad \left. + \cos\theta \cos\varphi E_r E_\theta - \sin\varphi E_r E_\varphi \right] \Big|_{r=a_1}, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} f_{1y} &= \frac{\varepsilon}{4\pi} \left[ \frac{1}{2} \sin\theta \sin\varphi (E_r^2 - E_\theta^2 - E_\varphi^2) + \right. \\ &\quad \left. + \cos\theta \sin\varphi E_r E_\theta + \cos\varphi E_r E_\varphi \right] \Big|_{r=a_1}, \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} f_{1z} &= \frac{\varepsilon}{4\pi} \left[ \frac{1}{2} \cos\theta (E_r^2 - E_\theta^2 - E_\varphi^2) - \right. \\ &\quad \left. - \sin\theta E_r E_\theta \right] \Big|_{r=a_1}. \end{aligned} \quad (22)$$

Здесь  $E_r, E_\theta, E_\varphi$  — компоненты электрического поля  $\mathbf{E} = -\nabla\phi$  вдоль ортов СК1.

Полную силу получим интегрированием выражений (20)–(22) по поверхности первой сферы. Используя известные интегралы от выражений, содержащих присоединенные функции Лежандра, приходим к следующим формулам для компонент силы:

$$\begin{aligned} F_{1x} &= -\frac{\varepsilon}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (1 + \delta_{m0}) \frac{(n+m+2)!}{(n-m)!} \times \\ &\quad \times \left[ A_{n,1}^m (B_{n+1,1}^{m+1} + C_{n+1,1}^{m+1}) - \right. \\ &\quad \left. - A_{n+1,1}^{m+1} (B_{n+2,1}^m + C_{n+2,1}^m) \right], \end{aligned} \quad (23)$$

$$F_{1y} = 0,$$

$$\begin{aligned} F_{1z} &= -\varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{1 + \delta_{m0}}{2} \frac{(n+m+1)!}{(n-m)!} \times \\ &\quad \times A_{n,1}^m (B_{n+1,1}^m + C_{n+1,1}^m). \end{aligned}$$

Полученные выражения позволяют рассмотреть вклады второго шара и точечной частицы независимо. Последний мы бы могли найти, взяв с обратным знаком величину проекции силы, с которой первая сферическая частица действует на точечную:

$$\mathbf{F}_0^{(1)} = -q_0 \nabla\phi_1 \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_{01}}. \quad (24)$$

### 2.4. Момент силы взаимодействия

В ряде работ (см., например, [29–37]) было экспериментально обнаружено собственное вращение пылевых частиц в пылевой плазме. В работе [14] было показано, что к этому может приводить неоднородное распределение свободного заряда на поверхности пылевой частицы. Поэтому получим выражение для момента силы электростатического взаимо-

действия, действующей на первую частицу, который определяется выражением [28]

$$M_1 = \frac{\varepsilon a_1^2}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left\{ [\mathbf{r} \times \mathbf{E}] (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) - \frac{1}{2} E^2 [\mathbf{r} \times \mathbf{n}] \right\} \Big|_{r=a_1} \sin \theta d\theta d\varphi, \quad (25)$$

где  $\mathbf{n}$  — вектор нормали к поверхности первой сферы. Отсюда с учетом того, что  $\mathbf{n} = \mathbf{e}_r$ , находим

$$M_1 = \frac{\varepsilon a_1^3}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi E_r [E_\theta \mathbf{e}_\varphi - E_\varphi \mathbf{e}_\theta] \Big|_{r=a_1} \times \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (26)$$

Интегрируя (26) (интегралы от произведений шаровых функций см. в [38]), для рассматриваемой здесь задачи, симметричной относительно плоскости  $xz$ , находим

$$M_{1,x} = 0, \quad M_{1,z} = 0, \quad (27)$$

$$M_{1,y} = \frac{\varepsilon}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(n+m+1)!}{(n-m-1)!} [A_{n,1}^{m+1} (B_{n,1}^m + C_{n,1}^m) - A_{n,1}^m (B_{n,1}^{m+1} + C_{n,1}^{m+1})]. \quad (28)$$

Обращение в нуль  $x$ - и  $z$ -составляющих момента силы в нашей задаче вызвано тем, что плоскость  $xz$  является плоскостью симметрии и ось вращения может быть только перпендикулярной этой плоскости.

В случае равномерной зарядки первой частицы из первого уравнения системы (15) следует равенство

$$B_{n,1}^m + C_{n,1}^m = -\frac{1}{a_1^{2n+1} \beta_{1,n}} A_{n,1}^m, \quad n \geq 1, \quad 0 \leq m \leq n,$$

подстановка которого в выражение (28) приводит к обнулению и  $y$ -составляющей момента:  $M_{1,y} = 0$ . Следовательно, при равномерной зарядке рассматриваемой частицы присутствие третьей точечной частицы, нарушающей аксиальную симметрию задачи, не может приводить к возникновению ее собственного вращения.

В заключение данного раздела отметим, что непосредственное использование формул (19), (23), как показали расчеты, в области малых межчастичных расстояний приводит к сильному снижению точности. Особенно это заметно при визуализации распределения заряда по поверхности сферической частицы, где из-за близости точечного заряда и вызванного им дельтаобразного пика плотности

на сферической поверхности возникают чередующиеся области противоположных знаков, тем более явные, чем меньше число учитываемых членов в рядах и чем мельче сетка, в точках которой вычисляется плотность заряда. Для решения этой проблемы ряды, содержащие коэффициенты разложения потенциала точечной частицы  $C_{n,1}^m$ , преобразуем таким образом, чтобы под знаком суммы не оставалось медленно сходящихся членов.

### 3. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ШАРА И ТОЧЕЧНОГО ЗАРЯДА: ПРОЦЕДУРА УСКОРЕНИЯ СХОДИМОСТИ

Как подчеркивалось выше, выражения (19) и (23) позволяют выделить вклад точечной частицы, вызывающий ухудшение сходимости входящих в них рядов. Покажем, как можно преобразовать исходные формулы, для чего рассмотрим систему из двух частиц: сферической и точечной.

Будем придерживаться обозначений, принятых в разд. 2. Исключим из рассмотрения вторую сферу и положим  $\mu_0 = 1$ . Известно [18, 19], что электростатический потенциал первой диэлектрической частицы равен

$$\phi_1 = \frac{q_1}{\varepsilon r} - \frac{q_0}{\varepsilon r} \sum_{n=1}^{\infty} \beta_{1,n} \frac{a_1^{2n+1}}{r_0^{n+1} r^n} P_n(\mu). \quad (29)$$

Входящий в это выражение ряд преобразуем следующим образом:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \beta_{1,n} \frac{a_1^{2n+1}}{r_0^{n+1} r^n} P_n(\mu) = -\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon}{\varepsilon_1 + \varepsilon} \frac{a_1}{r_0} \times \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{n\varepsilon_1 + (n+1)\varepsilon} \left( \frac{r'_{01}}{r^n} \right)^n P_n(\mu) + 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{r'_{01}}{r^n} \right)^n P_n(\mu) \right], \quad (30)$$

где  $r'_{01}$  — расстояние, определяющее инверсный образ точки, в которой находится заряд  $q_0$ , относительно поверхности сферы:  $r'_{01} = a_1^2/r_{01}$ . Тогда, по определению производящей функции, ряд в последнем слагаемом при  $r > r'_{01}$  равен  $1/r'_0$ , где  $r'_0$  — расстояние от образа до точки наблюдения (см. рис. 2):

$$r'_0 = \sqrt{r^2 + r_{01}^2 - 2rr'_{01}\mu}.$$

Обозначив

$$q'_0 = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon}{\varepsilon_1 + \varepsilon} \frac{a_1}{r_0} q_0, \quad (31)$$

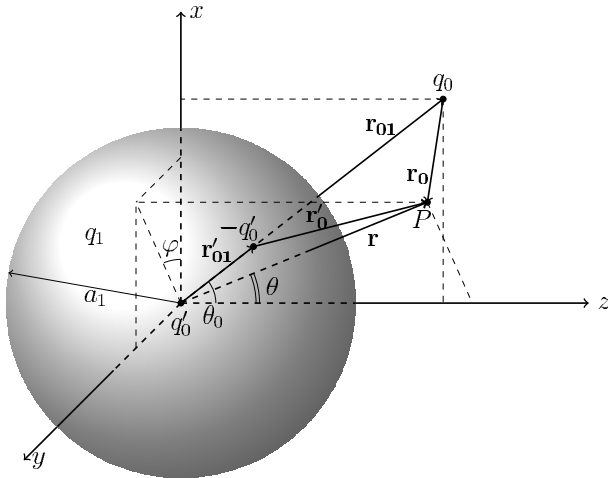


Рис. 2. Положение зарядов-изображений, возникающих при взаимодействии сферической и точечной частиц

из (29), (30) получим

$$\phi_1 = \frac{q_1}{\epsilon r} + \frac{q'_0}{\epsilon r} - \frac{q'_0}{\epsilon r'_0} + \frac{q'_0}{\epsilon r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{n\epsilon_1 + (n+1)\epsilon} \left(\frac{r'_{01}}{r}\right)^n P_n(\mu). \quad (32)$$

Таким образом, из ряда в (29) мы в явном виде выделили вклады двух зарядов-изображений:  $+q'_0$  в центре сферы и  $-q'_0$  на расстоянии  $r'_{01}$  от него. Отметим, что общий член ряда в преобразованном выражении (32) при  $r_{01} \simeq a_1$  убывает на порядок быстрее по сравнению с исходным (29).

Преимущество в скорости сходимости потенциала, рассчитанного по новой формуле, продемонстрировано на рис. 3. Здесь  $L$  — расстояние между поверхностью диэлектрического шара и точечным зарядом:  $L = r_{01} - a_1$ . На рис. 3 дана угловая зависимость потенциала при  $r = a_1 + L/2$ . Видно, что модифицированная формула для потенциала обеспечивает большую устойчивость, особенно в области, близкой к полярной оси.

Из выражения (29) можно получить известную формулу для силы взаимодействия [18]:

$$F = \frac{q_0 q_1}{\epsilon r_{01}^2} - \frac{q_0^2}{\epsilon r_{01}^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)(\epsilon_1 - \epsilon)}{n\epsilon_1 + (n+1)\epsilon} \left(\frac{a_1}{r_{01}}\right)^{2n+1} \quad (33)$$

(положительное значение силы соответствует отталкиванию, отрицательное — притяжению). Используя выражение (32), находим альтернативную фор-

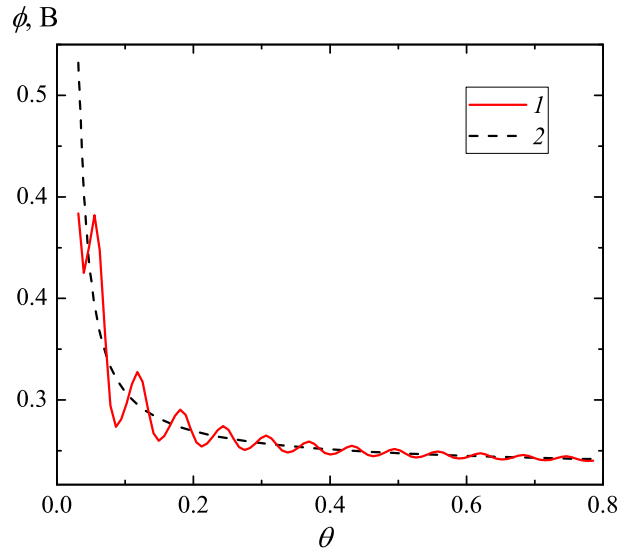


Рис. 3. Потенциал шара при  $r = a_1 + 0.5L$  в зависимости от полярного угла  $\theta$ , найденный по формулам (29) и (32) (кривые 1 и 2 соответственно) при  $a_1 = 1$  мкм,  $q_1 = 10^2 e$ ,  $\epsilon_1 = 25$ ,  $q_0 = 50e$

мулу для силы, которая, как ожидается, будет давать лучшую сходимость:

$$F = \frac{q_0 q_1}{\epsilon r_{01}^2} + \frac{q_0 q'_0}{\epsilon r_{01}^2} - \frac{q_0 q'_0}{\epsilon (r_{01} - r'_{01})^2} + \frac{q_0 q'_0}{\epsilon r_{01}^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)\epsilon}{n\epsilon_1 + (n+1)\epsilon} \left(\frac{a_1}{r_{01}}\right)^{2n}. \quad (34)$$

Второе и третье слагаемые в (34) соответствуют кулоновскому взаимодействию точечного заряда  $q_0$  с двумя его изображениями, причем третье слагаемое быстро растет по абсолютной величине по мере сближения сферической и точечной частиц, что на достаточно малых межчастичных расстояниях приводит к переходу от отталкивания одноименных зарядов к их притяжению.

Из табл. 1 видно, что расчеты по формуле (34) с учетом всего нескольких первых членов ряда уже приводят к результату, отличающемуся от окончательного только в третьей-четвертой значащей цифре. Для достижения такой точности при расчетах с использованием исходной формулы (33), если  $L$  достаточно мало, может потребоваться вплоть до нескольких тысяч членов.

Отметим, что задача, поставленная в данной работе, предполагает решение системы линейных уравнений (15) с матрицей порядка  $(N-m) \times (N-m)$  для каждого  $m = 0, 1, \dots, M$  (в силу отсутствия аксиальной симметрии), причем максимальное значение  $M \leq N$  определяется скоростью убывания

**Таблица 1.** Сравнение расчетов по формулам (33) и (34) для силы взаимодействия сферической и точечной частиц при  $q_1 = 10^2 e$ ,  $a_1 = 1$  мкм,  $\varepsilon_1 = 25$ ,  $q_0 = 50e$  для межчастичных расстояний  $L_1 = 1$  нм,  $L_2 = 10^2$  нм и  $L_3 = 10^4$  нм

	$N$	10	100	1000	7000
$L = 1$ нм	Из (33) в $10^{-7}$ Н	$-3.26 \cdot 10^{-4}$	$-2.39 \cdot 10^{-2}$	-0.79122	-1.33087
	Из (34) в $10^{-8}$ Н	-1.33099	-1.33097	-1.33090	-1.33089
$L = 100$ нм	$N$	2	5	20	100
	Из (33) в $10^{-11}$ Н	$-4.88 \cdot 10^{-2}$	-0.32216	-1.07034	-1.18280
	Из (34) в $10^{-11}$ Н	-1.18865	-1.18592	-1.18297	-1.18280
$L = 10^4$ нм	$N$	1	2	3	5
	Из (33) в $10^{-15}$ Н	9.52701	9.52693	9.52693	9.52693
	Из (34) в $10^{-15}$ Н	9.52693	9.52693	9.52693	9.52693

коэффициентов (12). Это накладывает определенные ограничения на количество учитываемых членов разложения  $N$ ; в финальных расчетах мы положили  $N = 40$ . Как видно из полученных в этом разделе данных, этого вполне достаточно для достижения приемлемой точности при вычислении вклада точечного заряда в силу взаимодействия.

Получим теперь выражение для плотности связанных зарядов на поверхности сферической частицы, находящейся в поле точечного заряда. Выражение (19) с учетом вида потенциала (29) в данном случае переходит в следующее:

$$\sigma_{1,b} = -\frac{q_0}{4\pi a_1^2} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \beta_{1,n} \left(\frac{a_1}{r_{01}}\right)^{n+1} P_n(\mu).$$

Проделав преобразования с общим членом ряда, аналогичные выполненным при получении (30), после некоторых алгебраических преобразований формулы для производящей функции приходим к следующему выражению:

$$\sigma_{1,b} = \frac{q'_0}{4\pi a_1^2} \left[ 1 - \frac{r_{01} (r_{01}^2 - a_1^2)}{(a_1^2 + r_{01}^2 - 2a_1 r_{01} \mu)^{3/2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1) \varepsilon}{n\varepsilon_1 + (n+1)\varepsilon} \left(\frac{a_1}{r_{01}}\right)^n P_n(\mu) \right]. \quad (35)$$

Здесь  $q'_0$  по-прежнему обозначает величину зарядов-изображений (31). Выражение в знаменателе второго слагаемого в квадратных скобках — это расстояние от  $q_0$  до точки на сфере, задаваемой переменной  $\mu$ . Ясно, что при  $\mu = 1$  это расстояние тем меньше отличается от нуля, чем ближе точечная частица к поверхности сферической. Как показывают расчеты, после выделения этой сингулярности ряд в последнем слагаемом (35) сходится достаточно быстро.

#### 4. СИЛА ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПРИ $a_2/R \ll 1$

Рассмотрим случай, когда в поляризацию поверхностного заряда первой частицы основной вклад от второй частицы вносит монополярный член разложения потенциала этой частицы, а вкладом более высоких мультипольных моментов можно пренебречь. Такой случай реализуется при  $a_2/R \ll 1$ . В этом случае в разложении (6) коэффициента  $B_{n,1}^m$  остается только  $B_{0,2}$ , поэтому все коэффициенты с  $m \geq 1$  исчезают:  $B_{n,1}^m = 0$ , а коэффициенты для  $m = 0$  с учетом (17) принимают вид

$$B_{n,1} = \frac{q_2}{\varepsilon R^{n+1}}. \quad (36)$$

Теперь из первого уравнения системы (15) находим

$$A_{n,1}^m = -a_1^{2n+1} \beta_{1,n} (B_{n,1} \delta_{m0} + C_{n,1}^m), \quad n = 1, 2, \dots, \infty, m = 0, 2, \dots, n. \quad (37)$$

На основе найденного приближенного решения, для составляющих силы взаимодействия из (23) получим выражения

$$F_{1x} \approx -\frac{q_0 q_1}{\varepsilon r_{01}^2} P_1^1(\mu_0) - \frac{q_0}{\varepsilon r_{01}^2} P_1^1(\mu_0) \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon)}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon} \left( q_2 \frac{a_1^3}{R^3} + q_0 \frac{a_1^3}{r_{01}^3} P_2(\mu_0) \right) + \frac{q_0 q_2}{2\varepsilon r_{01}^2} \sum_{n=1}^{\infty} P_{n+1}^1(\mu_0) \frac{a_1^{2n+1}}{r_{01}^n R^{n+1}} \left( \beta_{1,n} - \frac{a_1^2}{R^2} \beta_{1,n+1} \right) + \frac{\varepsilon}{4\varepsilon r_{01}^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{a_1^{2n+1}}{r_{01}^{2n+1}} P_{n+1}^{m+1}(\mu_0) \times \left[ \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \beta_{1,n} P_n^m(\mu_0) - \frac{a_1^2}{r_{01}^2} \beta_{1,n+1} \frac{(n-m+2)!}{(n+m+2)!} P_{n+2}^m(\mu_0) \right], \quad (38)$$

$$\begin{aligned}
 F_{1z} \approx & -\frac{q_1 q_2}{\varepsilon R^2} - \frac{q_1 q_0}{\varepsilon r_{01}^2} P_1(\mu_0) + \\
 & + \frac{q_2^2}{\varepsilon R^2} \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \beta_{1,n} \frac{a_1^{2n+1}}{R^{2n+1}} + \\
 & + \frac{q_0 q_2}{\varepsilon r_{01} R} \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \beta_{1,n} \frac{a_1^n}{r_{01}^n} \frac{a_1^n}{R^n} \times \\
 & \times \left[ \frac{a_1}{R} P_n(\mu_0) + \frac{a_1}{r_{01}} P_{n+1}(\mu_0) \right] + \\
 & + \frac{q_0^2}{2\varepsilon r_{01}^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n (1 + \delta_{m0}) \beta_{1,n} \frac{(n+1-m)!}{(n+m)!} \times \\
 & \times \frac{a_1^{2n+1}}{r_{01}^{2n+1}} P_n^m(\mu_0) P_{n+1}^m(\mu_0). \quad (39)
 \end{aligned}$$

В выражении (38) первый член соответствует  $x$ -составляющей силы взаимодействия “точечных” зарядов  $q_0$  и  $q_1$ ,  $z$ -составляющая этой силы — второй член в правой части (39). Из (38) видно, что  $F_{1x}$  прямо пропорциональна  $q_0$  и исчезнет, если удалить точечную частицу. Отметим, что ценность выражений (38) и (39) заключается в том, что они справедливы при любом положении третьей точечной частицы, требуется только выполнение условия  $a_2/R \ll 1$ . В этих формулах можно также выделить расходящуюся при малых значениях  $L_{01} = r_{01} - a_1$  часть силы взаимодействия, как это было сделано в разд. 3.

Рассмотрим более простой случай расположения зарядов, когда точечный заряд лежит на оси  $z$  и задача становится аксиально-симметричной. При этом  $\theta = 0$  или  $\pi$  и  $\mu_0 = \pm 1$ . В этом случае  $x$ -составляющая сила станет равной нулю:  $F_{1x} = 0$ . Для  $z$ -составляющей с учетом того, что  $P_n(1) = 1$ ,  $P_n(-1) = (-1)^n$ , из (39) находим

$$\begin{aligned}
 F_{1z} = & \frac{q_1 q_2}{\varepsilon R^2} - \frac{q_1 q_0}{\varepsilon r_{01}^2} \mu_0 + \\
 & + \frac{1}{\varepsilon a_1^2} \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \beta_{1,n} \Psi_n \Psi_{n+1}, \quad (40)
 \end{aligned}$$

где величина  $\Psi_n$  определена соотношением

$$\Psi_n = q_2 \frac{a_1^{n+1}}{R^{n+1}} + q_0 \frac{a_1^{n+1}}{r_{01}^{n+1}} \mu_0^n.$$

## 5. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

### 5.1. Сила взаимодействия

Применим теперь описанную в разд. 3 процедуру к задаче, поставленной в статье. Проекцию силы на ось  $z$ , с которой на первую сферическую частицу

действует вторая, будем находить согласно (23) по формуле

$$\begin{aligned}
 F_{1z}^{(2)} = & -\varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{1 + \delta_{m0}}{2} \frac{(n+m+1)!}{(n-m)!} \times \\
 & \times A_{n,1}^m B_{n+1,1}^m. \quad (41)
 \end{aligned}$$

Вклад точечной частицы вычислим по формуле (24). Для этого в потенциал (2) подставим  $A_{n,1}^m$  из первого уравнения системы (15), раскроем скобки и преобразуем ряд, содержащий коэффициенты  $C_{n,1}^m$ , для которых мы имеем явные формулы (12). Это приведет нас к выражению, аналогичному (32) и переходящему в него при  $m = 0$ ,  $\mu_0 = 1$  и  $B_{n,1}^m = 0$ . Соответствующая сила (взятая с обратным знаком, чтобы отражать действие точечной частицы на первую сферическую) оказывается равной

$$\begin{aligned}
 F_{1z}^{(0)} = & -\frac{q_0 q_1}{\varepsilon r_{01}^2} \mu_0 - \frac{q_0 q_0'}{\varepsilon r_{01}^2} \mu_0 + \frac{q_0 q_0'}{\varepsilon (r_{01} - r_{01}')^2} \mu_0 - \\
 & - \frac{q_0 q_0'}{\varepsilon r_{01}^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{2}{1 + \delta_{m0}} \frac{(n-m+1)!}{(n+m)!} \times \\
 & \times \frac{\varepsilon}{n\varepsilon_1 + (n+1)\varepsilon} \left( \frac{a_1}{r_{01}} \right)^{2n} P_n^m(\mu_0) P_{n+1}^m(\mu_0) + \\
 & + \frac{q_0}{r_{01}^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n (n-m+1) \beta_1^n B_{n,1}^m \times \\
 & \times \frac{a_1^{2n+1}}{r_{01}^{2n+1}} P_{n+1}^m(\mu_0). \quad (42)
 \end{aligned}$$

Полная сила, действующая на первый диэлектрический шар вдоль оси  $z$ , есть сумма (41) и (42).

Вклад второго шара в силу, действующую на первый вдоль оси  $x$ , выделим из выражения (23):

$$\begin{aligned}
 F_{1x}^{(2)} = & -\frac{\varepsilon}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (1 + \delta_{m0}) \frac{(n+m+2)!}{(n-m)!} \times \\
 & \times (A_{n,1}^m B_{n+1,1}^{m+1} - A_{n+1,1}^{m+1} B_{n+2,1}^m). \quad (43)
 \end{aligned}$$

Для силы, действующей на первый шар со стороны точечной частицы вдоль оси  $x$ , имеем модифицированную формулу:

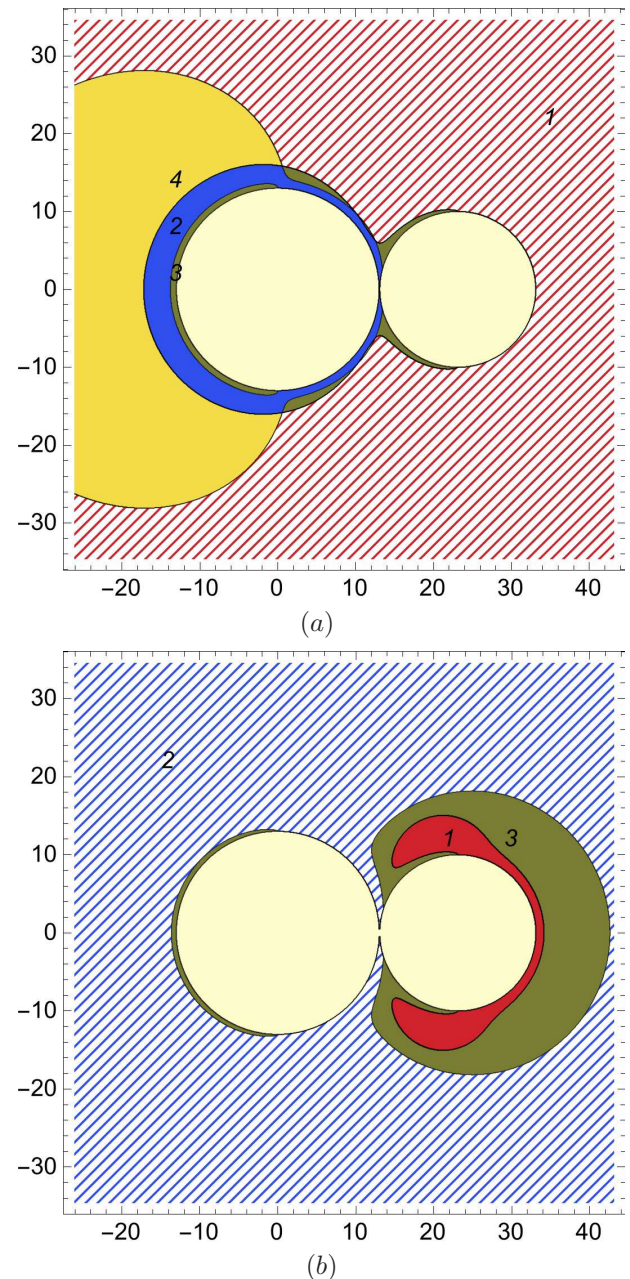
$$\begin{aligned}
 F_{1x}^{(0)} = & \left[ -\frac{q_0 q_1}{\varepsilon r_{01}^2} - \frac{q_0 q_0'}{\varepsilon r_{01}^2} + \frac{q_0 q_0'}{\varepsilon (r_{01} - r_{01}')^2} \right] P_1^1(\mu_0) - \\
 & - \frac{q_0}{r_{01}^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{a_1^n}{r_{01}^n} \left[ \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \frac{q_0'}{n\varepsilon_1 + (n+1)\varepsilon} \frac{a_1^n}{r_{01}^n} \times \right. \\
 & \times P_n^m(\mu_0) - \frac{1 + \delta_{m0}}{2} \beta_1^n a_1^{n+1} B_{n,1}^m \left. \right] \left[ P_{n+1}^{m+1}(\mu_0) - \right. \\
 & \left. - (n-m+1)(n-m+2) P_{n+1}^{m-1}(\mu_0) \right]. \quad (44)
 \end{aligned}$$



В работах [11, 16] исследовался вопрос о том, при каких соотношениях размеров, зарядов и значениях диэлектрических проницаемостей две одноименно-заряженные сферические частицы по мере сближения могут начать притягиваться друг к другу. Проанализируем влияние третьей частицы на этот переход. Рассмотрим сначала пару одинаковых диэлектрических шаров, которые при равных зарядах согласно [16] ни на каких расстояниях притяжения не испытывают. Расчеты показывают, что присутствие третьей частицы приводит к изменению характера их взаимодействия только при малых расстояниях между их поверхностями, причем сам точечный заряд должен находиться в очень ограниченной области между ними. При этом понятно, что смена знака проекции силы, действующей на каждую из сфер, происходит вследствие притяжения к точечной частице, обусловленного третьим слагаемым в формуле (42), на малых расстояниях преобладающим над остальными.

Рассмотрим теперь сферические частицы с таким соотношением размеров и зарядов, при которых притяжение между ними возможно (мы выбрали параметры, соответствующие кривой 2 рисунка 5 в статье [16]), и расположим их на расстоянии чуть большем и чуть меньшем переходного. Как и следовало ожидать, в этом случае влияние третьей частицы качественно заметнее и проявляется в более широком диапазоне изменения ее координат. На рис. 4а сферические частицы в отсутствие точечной отталкиваются друг от друга — и продолжают отталкиваться (область 1), если последняя находится в правой полуплоскости (т. е. при  $z_0 > 0$ ), не считая области вблизи поверхностей шаров при  $0 < z_0 < R$ . Притяжение (область 2) возникает, когда точечный заряд расположен в кольцевидной области вокруг большей из сфер, за исключением тонких участков (область 3) внутри при  $z_0 < 0$  и снаружи при  $z_0 > 0$ . В этих участках, а также у поверхности второй частицы со стороны, обращенной к первой (т. е. при  $z_0 < L$ ), знаки обеих сил отрицательные, а в довольно широкой области за большей из частиц, наоборот, положительные (область 4). В этих случаях нельзя говорить о взаимном притяжении или отталкивании сферических частиц.

На рис. 4б показано, как положение неполяризуемой частицы влияет на режим взаимодействия диэлектрических шаров с теми же параметрами, но находящихся на чуть меньшем расстоянии, когда для изолированной пары отталкивание уже перешло в притяжение. В основной части пространства, окружающего сферы, точечная частица, как и раньше,



**Рис. 4.** Области притяжения и отталкивания сферических частиц в зависимости от положения точечной при  $a_1 = 1.3a_2$ ,  $a_2 = 10 \text{ мкм}$ ,  $q_0 = 50e$ ,  $q_1 = 3q_2$ ,  $q_2 = 10^3 e$ ,  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 25$  при межчастичном расстоянии  $L = 100 \text{ нм}$  (а) и  $L = 70 \text{ нм}$  (б). Область 1 — имеет место отталкивание сферических частиц, 2 — притяжение, 3 — знаки обеих сил отрицательные, 4 — знаки обеих сил положительные; на рис. 4а заштрихована область отталкивания, а на рис. 4б — область притяжения

не меняет характер их взаимодействия, но теперь та область, где ее влияние приводит к смене знаков обеих сил (область 1), находится за меньшей из них и становится тем шире по  $x$ , чем ближе  $q_0$  к  $q_1$ , в отличие от предыдущего случая. Кроме того, пере-

хода от притяжения к отталкиванию не возникает, когда точечный заряд располагается в промежутке между сферическими поверхностями; как мы видели, в этой зоне при изначальном отталкивании притяжение возникает в первую очередь. Отметим сходство с ранее рассмотренным случаем чуть большего межчастичного расстояния: здесь мы также видим отрицательные знаки сил в областях у сферических поверхностей при  $\pi/2 < \theta_{1,2} < 3\pi/2$  (область 3). Однако основной участок, где обе силы обращены против оси  $z$ , окружает меньшую из сфер и по форме напоминает область положительных  $F_{1z}$  и  $F_{2z}$  (область 4) вокруг большей из них, которую мы видели в предыдущей конфигурации. При этом в рассматриваемом случае такого режима не наблюдается во все.

Дадим несколько более общую картину зависимости сил, действующих на сферические частицы, от положения точечной. На рис. 5 приведены данные для векторов  $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$  как функций  $(x_0, z_0)$ , полученные с использованием формул (43), (44) для  $x$ -компоненты и аналогичных выражений для второй макрочастицы. На данном рисунке длины векторов не согласованы с абсолютным значением сил взаимодействия, за счет чего анализ становится проще, но имеет качественный характер. Однако, в отличие от еще более упрощенного и наглядного рис. 4, данные на рис. 5 позволяют определить, в каких участках критических областей (т.е. тех, где характер взаимодействия сфер противоположен невозмущенному) действительно имеет место «чистое» притяжение или отталкивание. Это можно сделать исходя из отклонения изображенных векторов от оси  $z$ : мы говорим об относительно «чистом» притяжении, если  $\mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{e}_z \approx |\mathbf{F}_1|$  и  $\mathbf{F}_2 \cdot \mathbf{e}_z \approx -|\mathbf{F}_2|$ ; аналогичное определение можно сформулировать для отталкивания. Так, в случае макрочастиц, находящихся на границе перехода от отталкивания к притяжению (рис. 4a), описанная ситуация возникает, только когда точечный заряд находится за большей из сфер (см. рис. 5a). Если же переход уже совершен (рис. 4b), отталкивание скорее будет вызвано третьей частицей, находящейся вблизи меньшей из них возле оси  $x_2$ , что видно из рис. 5b.

Представленные рисунки указывают только на знаки сил  $F_{1z}$  и  $F_{2z}$  и описывают взаимодействие частиц лишь качественно. Для получения количественной картины рассмотрим зависимость величины  $z$ -компоненты силы, действующей на первый шар при  $L = 100$  нм (что соответствует рис. 4a), от положения третьей частицы (см. рис. 6). В участках, занятых сферами, значение силы для наглядности

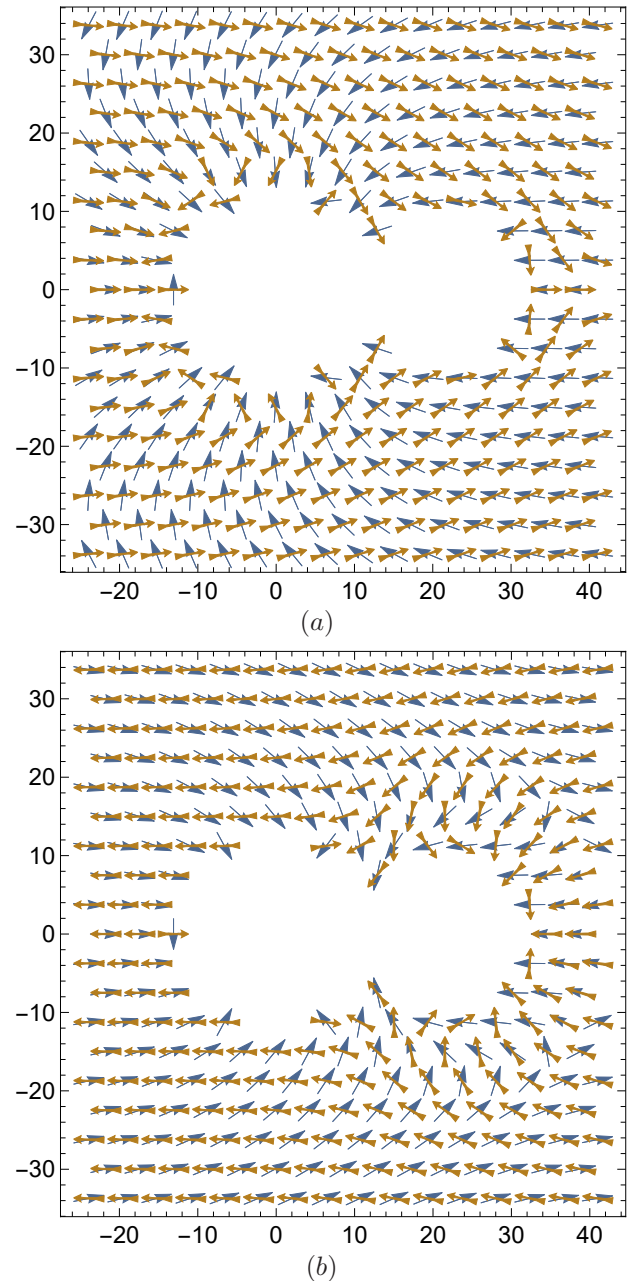
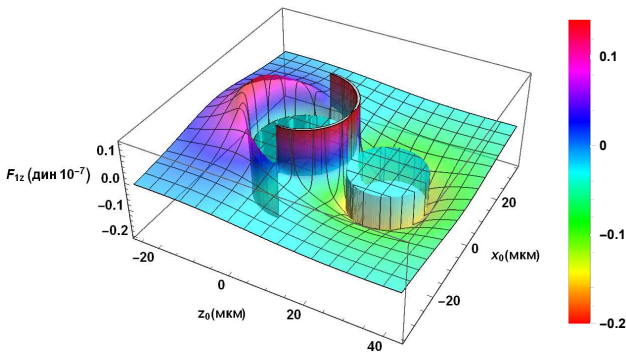


Рис. 5. Поле сил  $\mathbf{F}_1$  (тонкие стрелки) и  $\mathbf{F}_2$  (жирные стрелки) в зависимости от координат точечной частицы. Параметры частиц и межчастичные расстояния, как на рис. 4

выбрано таким, каким бы оно было в отсутствие точечного заряда.

В первую очередь внимание на себя обращает область вблизи первой сферической частицы, где касательная плоскость к графику почти вертикальна. В этой области (см., например, рис. 4) вне зависимости от параметров сферических частиц, возможности возникновения притяжения между ними и реализованности этого перехода та или иная частица испытывает силу,  $z$ -проекция которой имеет тот



**Рис. 6.** Зависимость  $z$ -компоненты полной силы, действующей на первый диэлектрический шар, от положения точечного заряда. Параметры частиц соответствуют рис. 4, расстояние между сферическими поверхностями  $L = 100$  нм. В отсутствие третьей частицы сфера отталкивается с силой  $2.84 \cdot 10^{-14}$  Н

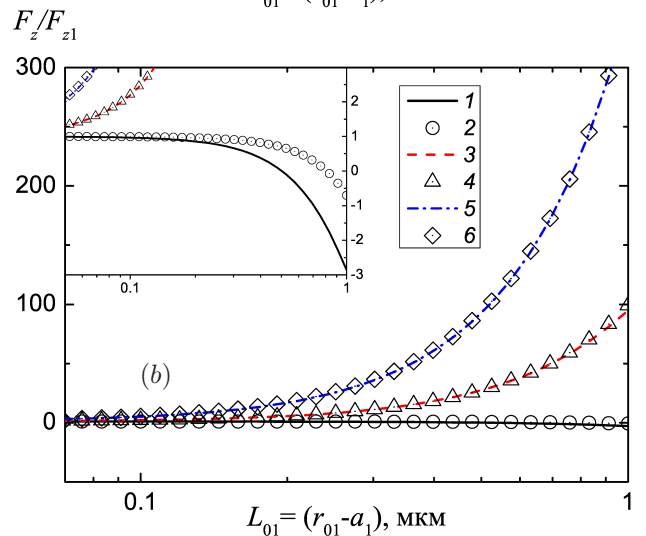
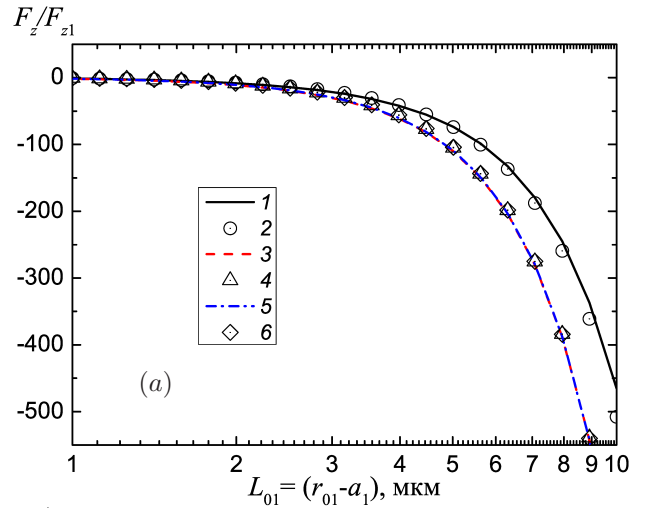
же знак, что  $z$ -координата точечного заряда в соответствующей системе координат. Учитывая рис. 6 и аналогичные ему картины для второго шара, можно говорить, что при различных параметрах системы не меняется не только знак проекции силы, но и то, как резко ее абсолютная величина отличается от таковой на некотором отдалении от сфер. Как уже говорилось выше, причину следует искать в третьем слагаемом в формуле (42): даваемый им вклад при малых  $r_{01}$  многократно превышает вклады других слагаемых, равно как и само значение проекции силы при больших расстояниях между точечной и сферической частицами.

Рассмотрим более детально влияние точечной частицы на направление силы, действующей на шар, когда расстояние между ними мало. На рис. 7 приведены зависимости  $z$ -проекции полной силы, действующей на первую частицу, от положения точечного заряда на оси  $z$ , полученные из решения системы (15) и по приближенной формуле (40). Для приведения к безразмерной силе использована сила взаимодействия точечного заряда с наведенным им поверхностным зарядом, определяемая выражением

$$F_{z1} = \frac{q_0^2}{\epsilon r_{01}^2} \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \beta_{1,n} \left( \mu_{01} \frac{a_1}{r_{01}} \right)^{2n+1}. \quad (45)$$

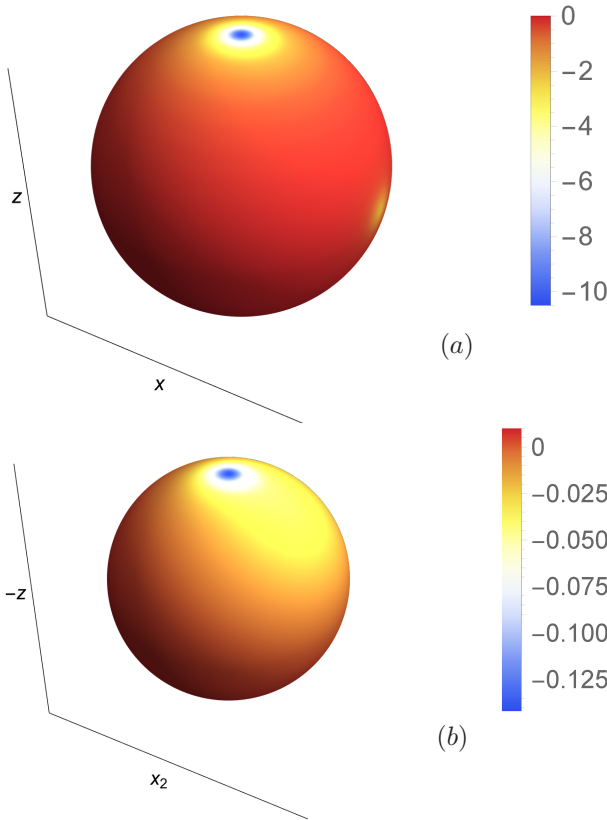
Как видно из выражения (45), эта сила при  $\mu_{01} = 1$  (как на рис. 7) положительна, поэтому знак приведенной силы при изменении  $L_{01}$  не меняется.

Из рис. 7 видно, что при малых расстояниях между поверхностью первой частицы и точечной частицей сила взаимодействия точечного заряда с наведенным им поверхностным зарядом оказывается преобладающей, но по мере удаления точечного



**Рис. 7.** Зависимости  $z$ -проекции полной силы, действующей на первую частицу, от положения точечного заряда на оси  $z$ . Данные для кривых 1, 3 и 5 получены из решения системы (15), 2, 4 и 6 — по приближенной формуле (40). Расчеты проведены при  $q_1 = q_2 = 10^3 e$ ,  $a_1 = 10$  мкм,  $a_2 = 10$  (1, 2), 1 (3, 4), 0.1 (5, 6) мкм,  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 25$ ,  $q_0 = 50e$ ,  $L = 10$  (a), 1 (b) мкм. Здесь  $F_{z1}$  — сила взаимодействия точечного заряда с наведенным им поверхностным зарядом, определенная выражением (45)

заряда от поверхности первой частицы она становится все меньше и меньше. Из рис. 7 также видно, что приближенная формула (40) является достаточно точной и ее точность растет по мере уменьшения радиуса второй частицы как при  $L = 10$  мкм, так и при  $L = 1$  мкм. Из вкладки на рис. 7b видно, что при  $L = 1$  мкм для частиц одинакового размера формула (40) при  $L_{01} > 0.1$  мкм приводит к значительным ошибкам. Нужно отметить, что при выполнении условия  $a_2 \ll R$  выражение (40) не теряет своей точности и при меньших рассмотренных на рис. 7 значениях  $L$ .



**Рис. 8.** Плотность связанных зарядов на поверхности первой (a) и второй (b) диэлектрических частиц с характеристиками, соответствующими рис. 4a; положение точечного заряда:  $x = 15$  мкм,  $z = 0$ , значения плотности приведены в  $[e/\text{мкм}^2]$ ,  $e$  — элементарный заряд

**5.2. Плотность поверхностного заряда**

Перейдем к вычислению поверхностной плотности заряда на сферах и анализу влияния точечной частицы на ее распределение. Как и в случае с проекцией силы взаимодействия, приведем модифицированную версию формулы (19):

$$\begin{aligned} \sigma_{1,b} = & \frac{q'_0}{4\pi a_1^2} \left[ 1 - \frac{r_{01} (r_{01}^2 - a_1^2)}{(a_1^2 + r_{01}^2 - 2a_1 r_{01} \nu)^{3/2}} + \right. \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{2}{1 + \delta_{m0}} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \frac{(2n+1)\epsilon}{n\epsilon_1 + (n+1)\epsilon} \times \\ & \times \frac{a_1^n}{r_{01}^n} P_n^m(\mu_0) P_n^m(\mu) \cos m\varphi \left. - \right. \\ & - \frac{\epsilon}{4\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{n(2n+1)(\epsilon_1 - \epsilon)}{n\epsilon_1 + (n+1)\epsilon} \times \\ & \times B_{n,1}^m a_1^{n-1} P_n^m(\mu) \cos m\varphi. \end{aligned} \quad (46)$$

Выражение в правой части, занимающее строки 1–3 в приведенной формуле, отвечает вкладу точеч-

ной частицы и представляет собой обобщение (35) на случай отсутствия аксиальной симметрии в расположении частиц. Последний член дает вклад второго диэлектрического шара в соответствии с формулой (19) и первым уравнением (15). Полученная формула обнаруживает хорошую скорость сходимости, в том числе при существенно более близких к нулю расстояниях между сферической поверхностью и точечным зарядом, чем рассматриваемые далее.

Расчеты показывают, что при параметрах сферических частиц, как на рис. 4, степень поляризации поверхностного заряда на большей из них существенно выше, чем на меньшей: если в первом случае значения плотности заряда на полюсах (ближайшем ко второму шару и противоположном ему, соответственно) составляют  $-12.3$  и  $+0.189$ , то во втором — лишь  $-0.150$  и  $+0.00144$  (здесь и далее плотность выражена в элементарных зарядах на квадратный микрон). Для исследования влияния точечной частицы на картину распределения связанных зарядов на сферах поместим ее в области, которым на рис. 4 соответствует смена знака проекций сил, действующих на сферы, т. е. в области 2 на рис. 4a и 1 на рис. 4b. Одну точку мы взяли на оси  $x$  на расстоянии 2 мкм от поверхности первого шара, вторую — на оси  $x_2$  на расстоянии 3 мкм от второго.

Рассмотрим первый случай (см. рис. 8). Как видно из рис. 8a, на фоне «шапки» отрицательного заряда на полюсе первого шара возмущение плотности, вызванное близостью третьей частицы, не так велико. При этом оба участка отрицательной плотности локализованы на довольно небольшой площади и разделены областью положительного заряда. Иначе дело обстоит с плотностью заряда на меньшем из диэлектрических шаров (см. рис. 8b). Ее распределение гораздо более равномерно, так что влияние третьей частицы оказывается заметным даже при больших  $r_{02}$ . В рассматриваемом случае, когда другие две частицы расположены недалеко друг от друга, участки вызванного ими возмущения плотности перекрываются, и область отрицательного заряда занимает сравнительно большой телесный угол.

Если же точечная частица расположена ближе к меньшему из шаров, то отрицательный пик плотности, индуцированный ей на его поверхности, оказывается в разы заметнее расположенного на полюсе и вызванного первым диэлектрическим шаром; качественно картина распределения в этом случае напоминает рис. 8a, если поменять местами оси  $x$  и  $z$ . Что касается первой частицы, при данных параметрах системы и на таком большом расстоянии точечный

заряд не оказывает видимого влияния на распределение связанных зарядов на ее поверхности.

## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе изучено взаимодействие трех заряженных частиц, размером одной из которых можно пренебречь. Установлено, что присутствие третьей частицы может существенно изменить характер взаимодействия двух одноименно заряженных диэлектрических частиц, меняя отталкивание на притяжение и наоборот. Показано, что, несмотря на нарушение аксиальной симметрии при добавлении третьей частицы, при равномерной зарядке диэлектрической частицы сферической формы все компоненты вектора момента силы, действующей на нее, принимают нулевое значение. Продемонстрирована применимость метода выделения вкладов зарядов-изображений для значительного повышения точности расчета поверхностной плотности заряда и силы взаимодействия частиц. Развита в настоящей работе методика расчета может быть использована для учета влияния соседних зарядов на скорость коагуляции частиц в облаке заряженного аэрозоля, при этом влияние дальних заряженных частиц может быть учтено в рамках линейаризованной теории Дебая – Хюккеля.

**Финансирование.** Настоящая работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 20-32-90054 Аспиранты).

## ЛИТЕРАТУРА

1. A. A. Sickafoose, J. E. Colwell, M. Horanyi, and S. Robertson, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 6034 (2000).
2. J. D. Sartor, *J. Geophys. Res.* **65**, 1953 (1960).
3. H. T. Ochs and R. R. Czys, *Nature* **327**, 606 (1987).
4. E. B. Lindgren, B. Stamm, H.-K. Chan et al., *Icarus* **291**, 245 (2017).
5. А. В. Филиппов, И. Н. Дербенев, *ЖЭТФ* **150**, 1262 (2016).
6. J. Q. Feng, *Phys. Rev. E* **62**, 2891 (2000).
7. M. H. Davis, *Q. J. Mech. Appl. Math.* **17**, 499 (1964).
8. J. Lekner, *Proc. Roy. Soc. A* **468**, 2829 (2012).
9. А. В. Филиппов, *ЖЭТФ* **136**, 601 (2009).
10. A. V. Filippov, *Contrib. Plasma Phys.* **49**, 433 (2009).
11. E. Bichoutskaia, A. L. Boatwright, A. Khachatourian, and A. J. Stace, *J. Chem. Phys.* **133**, 024105 (2010).
12. V. Jadhao, Z. Yao, C. K. Thomas, and M. O. De La Cruz, *Phys. Rev. E* **91**, 032305 (2015).
13. I. N. Dербенев, A. V. Filippov, A. J. Stace, and E. Besley, *J. Chem. Phys.* **152**, 024121 (2020).
14. В. Р. Муниров, А. В. Филиппов, *ЖЭТФ* **142**, 594 (2012).
15. A. Khachatourian, H.-K. Chan, A. J. Stace, and E. Bichoutskaia, *J. Chem. Phys.* **140**, 074107 (2014).
16. В. Р. Муниров, А. В. Филиппов, *ЖЭТФ* **144**, 931 (2013).
17. B. A. Tinsley, *Rep. Prog. Phys.* **71**, 066801 (2008).
18. В. В. Батыгин, И. Н. Топтыгин, *Сборник задач по электродинамике*, Наука, Москва (1970).
19. В. Смайт, *Электростатика и электродинамика*, Изд-во иностр. лит., Москва (1954) [W. R. Smythe, *Static and Dynamic Electricity*, McGraw-Hill, New York–Toronto–London, 2-nd edition (1950)].
20. J. D. Love, *Q. J. Mech. Appl. Math.* **28**, 449 (1975).
21. Y. Nakajima and T. Sato, *J. Electrostat.* **45**, 213 (1999).
22. E. B. Lindgren, H.-K. Chan, A. J. Stace, and E. Besley, *Phys. Chem. Chem. Phys.* **18**, 5883 (2016).
23. E. B. Lindgren, A. J. Stace, E. Polack, Y. Maday, B. Stamm, and E. Besley, *J. Comp. Phys.* **371**, 712 (2018).
24. M. Hassan and B. Stamm, *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis* **55**, S65 (2021).
25. B. Bramas, M. Hassan, and B. Stamm, *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis* **55**, S625 (2021).
26. Е. В. Гобсон, *Теория сферических и эллипсоидальных функций*, Изд-во иностр. лит., Москва (1952) [E. W. Hobson, *The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics*, University Press, Cambridge (1931)].
27. Э. Т. Уиттекер, Д. Н. Ватсон, *Курс современного анализа, ч. 2, Трансцендентные функции*, Физматгиз, Москва (1963).
28. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика, т. VIII, Электродинамика сплошных сред*, Наука, Москва (1982) [L. D. Landau, E. M. Lifshitz, and L. P. Pitaevskii, *Electrodynamics of Continuous Media*, Vol. 8, Pergamon Press, Oxford (1984)].

29. N. Sato, AIP Conf. Proc. **799**, 97 (2005).
30. S. I. Krasheninnikov, Phys. Plasmas **13**, 114502 (2006).
31. S. I. Krasheninnikov, V. I. Shevchenko, and P. K. Shukla, Phys. Lett. A **361**, 133 (2007).
32. V. Y. Karasev, E. S. Dzlieva, A. I. Eikhval'd, M. A. Ermolenko, M. S. Golubev, and A. Y. Ivanov, Phys. Rev. E **79**, 026406 (2009).
33. S. I. Krasheninnikov, R. D. Smirnov, and D. L. Rudakov, Plasma Phys. Control. Fusion **53**, 083001 (2011).
34. Е. С. Дзlieва, В. Ю. Карасев, О. Ф. Петров, ЖЭТФ **14**, 189 (2012)
35. V. Y. Karasev, E. S. Dzlieva, S. I. Pavlov, L. A. Novikov, and I. C. Mashek, Technical Phys. **64**, 42 (2019).
36. L. Simons and A. Long, Phys. Plasmas **28**, 093702 (2021).
37. S. Ratynskaia, A. Bortolon, and S. I. Krasheninnikov, Rev. Mod. Plasma Phys. **6**, 1 (2022).
38. M. E. Rose, *Elementary Theory of Angular Momentum*, John Wiley & Sons, New York (1957).