ЖЭТФ, 2023, том 163, вып. 4, стр. 461–466

ОБ ИНТЕГРАЛЕ ПО ВРЕМЕНИ ОТ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Р. М. Фещенко [a*]

[a] *Физический институт им. П.Н. Лебедева Российской академии наук*
199991, Москва, Россия

Поступила в редакцию 11 октября 2022 г.,
после переработки 3 декабря 2022 г.
Принята к публикации 13 декабря 2022 г.

Рассмотрен интеграл по времени в бесконечных пределах от электрического или магнитного поля (интеграл Бессонова) и показано, что он равен нулю для любой конфигурации свободного электромагнитного поля, полная энергия которой равна нулю. Обсуждается связь равенства нулю интеграла Бессонова с невозможностью излучения или поглощения фотона свободной заряженной частицей. Получены точные выражения поля излучения, а также его преобразования Фурье, для электрического заряда, у которого скачком меняется скорость движения, и показано, что интеграл Бессонова от подобного излучательного поля равен нулю, как и следует из общего утверждения. В заключение, показано, что не равный нулю интеграл Бессонова от поля излучения ускоренно движущегося электрического заряда, о котором сообщается в ряде работ, возникает из-за некорректного разделения полного поля ускоренно движущегося заряда на излучательную и неизлучательную части.

DOI: 10.31857/S0044451023040028
EDN: KZALYM

1. ВВЕДЕНИЕ

Интеграл по времени от электрического или магнитного поля как для свободного, так и для несвободного (связанного) электромагнитного поля, является предметом исследования в течении достаточно продолжительного времени. Речь здесь идет об интеграле вида

$$\mathbf{I}_E = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)\, dt, \qquad (1)$$

где $\mathbf{E}$ — вектор электрического поля, а $\mathbf{r}$ и t — координаты и время. Величина, аналогичная (1), может быть введена и для магнитного поля. Очевидно, что в произвольном электромагнитном поле интеграл $\mathbf{I}_E$ не равен нулю. Для доказательства этого утверждения достаточно рассмотреть статическое электрическое поле или стационарное магнитное поле. Интеграл вида (1) иногда называется интегралом Бессонова [1].

Что касается свободного электромагнитного поля (например, поля конечного электромагнитного импульса или поля излучения конечной системы зарядов и токов) в отсутствие каких-либо зарядов и токов, то ситуация является в какой-то мере не ясной. Утверждается, что в большинстве случаев интеграл (1) равен нулю для любого электромагнитного импульса с конечной полной энергией [2], но иногда приводятся примеры свободных полей с ненулевым интегралом Бессонова [3]. Сложность здесь состоит в поиске точных аналитических моделей электромагнитных импульсов с конечной энергией (см., например, [4, 5]). Интерес также представляет промежуточная ситуация, когда одновременно присутствует как поле излучения, так и статическое или индукционное поле. В этом случае утверждается, что интеграл вида (1) даже от излучательной части полного поля может быть не равен нулю [2, 5, 6].

Заметим, что задача вычисления интегралов вида (1) для полей движущихся зарядов имеет отношение к определению так называемого тормозного излучения малых частот для системы взаимодействующих заряженных частиц. В частности, известно, что в этом случае спектральная плотность энергии излучения не зависит от частоты в пределе малых частот и, следовательно, не обращается в нуль при

* E-mail: rusl@lebedev.ru

нулевой частоте (детали см. в [7]). Последнее, как будет показано ниже, вовсе не означает, что интеграл Бессонова $\mathbf{I}_E$ от поля излучения в этом случае не равен нулю.

Целью настоящей статьи является доказательство общего утверждения о равенстве нулю интеграла вида (1) в поле произвольного свободного электромагнитного импульса с конечной энергией. Будет показано, что равенство интеграла Бессонова в этом случае связано с невозможностью для свободного электрона поглотить или испустить свободный фотон. Помимо этого будет рассмотрен случай, когда присутствуют также и статические и индукционные поля, создаваемые электрическими зарядами, и будет показано, что это утверждение сохраняет силу и в случае поля излучения ускоренно движущихся зарядов.

2. СПЕКТРАЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ СВОБОДНОГО ПОЛЯ

Пусть имеется некоторое свободное электромагнитное поле, не имеющее никаких пространственных или временных особенностей. Тогда его электрическое поле должно удовлетворять уравнениям

$$\Delta\mathbf{E} = \frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}, \tag{2}$$

$$\nabla\mathbf{E} = 0, \tag{3}$$

наиболее общее решение которых может быть представлено как

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{i\mathbf{k}'\mathbf{r}}\times \\ \times\left(\mathbf{E}_+(\mathbf{k}',\omega')e^{i\omega' t} + \mathbf{E}_-(\mathbf{k}',\omega')e^{-i\omega' t}\right)d^3k', \tag{4}$$

где $\mathbf{k}'$ — волновой вектор, а $\omega' = |\mathbf{k}'|$ — частота[1]. Комплексные трехмерные спектральные амплитуды $\mathbf{E}_+(\mathbf{k})$ и $\mathbf{E}_-(\mathbf{k})$ должны быть, в силу (3), ортогональны вектору $\mathbf{k}$, а в остальном выбираются произвольными. Они связаны между собой соотношением

$$\mathbf{E}_+(\mathbf{k}',\omega') = \mathbf{E}^*_-(-\mathbf{k}',\omega'), \tag{5}$$

следующим из вещественности поля $\mathbf{E}$. Амплитуды могут быть также представлены как функции от $\mathbf{n}' = \mathbf{k}'/\omega'$ и ω': $\mathbf{E}_+(\mathbf{n}',\omega')$ и $\mathbf{E}_-(\mathbf{n}',\omega')$.

[1] Здесь и везде далее скорость света $c = 1$.

Рассмотрим далее фурье-гармонику поля (4):

$$\mathbf{E}_\omega(\mathbf{r}) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathbf{E}e^{-i\omega t}\,dt = \\ = \frac{1}{(2\pi)^2}\int e^{i\mathbf{k}'\mathbf{r}}\mathbf{E}_+(\mathbf{k}',\omega)\delta(\omega'-\omega)\,d^3k' = \\ = \frac{\omega^2}{(2\pi)^2}\oint\limits_{4\pi} e^{i\omega\mathbf{n}'\mathbf{r}}\mathbf{E}_+(\mathbf{n}',\omega)\,d\mathbf{n}', \tag{6}$$

предел которой при $\omega \to 0$ есть интеграл Бессонова $\mathbf{I}_E$. Из выражения (6) следует, что для того чтобы выполнялось неравенство $\mathbf{I}_E \neq 0$, амплитуда $\mathbf{E}_+(\mathbf{n}',\omega)$ должна при $\omega \to 0$ расходиться по крайней мере как $\propto 1/\omega^2$. Однако в этом случае полная энергия поля

$$W = \frac{1}{(2\pi)^4}\int|\mathbf{E}_+(\mathbf{k}',\omega')|^2\,d^3k' = \\ = \frac{1}{(2\pi)^4}\int\limits_0^\infty\oint\limits_{4\pi}\omega'^2|\mathbf{E}_+(\mathbf{n}',\omega)|^2\,d\mathbf{n}'\,d\omega' = \\ = \int\limits_0^\infty W_{\omega'}\,d\omega' \sim \int\limits_0^\infty\frac{d\omega'}{\omega'^2} = \infty, \tag{7}$$

где $W_{\omega'}$ — спектральная плотность энергии, будет бесконечной. В равенстве (7) было учтено, что энергия магнитного поля равна энергии электрического поля для свободного электромагнитного поля, а также соотношение (5).

Из равенства (7) следует важное утверждение:

Утверждение 1 *Если электромагнитный импульс в свободном пространстве обладает конечной полной энергией, то интеграл* (1) *равен нулю в любой точке пространства.*

Данное утверждение также справедливо и для магнитного поля этого импульса. В частности, из этого следует, что некоторые утверждения, сделанные в статье [3], являются ошибочными и для приведенных примеров свободных полей или интеграл Бессонова на самом деле не равен нулю, или поля не являются регулярными во всем пространстве.

Можно отметить, что из приведенных выше рассуждений следует, что амплитуда $\mathbf{E}_+(\mathbf{n},\omega)$ конечного электромагнитного импульса может быть разложена в следующий ряд:

$$\mathbf{E}_+(\mathbf{n},\omega) = \frac{\mathcal{E}_+^{-1}(\mathbf{n})}{\omega} + \sum_{s=0}^{\infty}\mathcal{E}_+^s(\mathbf{n})\omega^s, \tag{8}$$

где коэффициенты $\mathcal{E}_+^s(\mathbf{n})$ — некоторые функции угловых переменных, которые могут быть в свою очередь разложены в ряд по сферическим функциям. Заметим, что в выражении (8) расходящийся при $\omega \to 0$ член появляется (как будет показано ниже) только в поле излучения ускоренно движущейся заряженной частицы.

Рассмотрим в качестве примера поле дипольного электромагнитного импульса (см. детали в [8,9]), которое, как было упомянуто в работе [9], является оптимальным с точки зрения концентрации электромагнитной энергии в центре импульса. Можно показать, что для такого импульса амплитуда $\mathbf{E}_+(\mathbf{n},\omega)$ выражается как

$$\mathbf{E}_+(\mathbf{n},\omega) = 2\pi i\omega f(\omega)(\mathbf{A}_0 \times \mathbf{n}), \tag{9}$$

где $\mathbf{A}_0$ — произвольный вектор, а $f(\omega)$ — преобразование Фурье от произвольной вещественной функции, задающей форму импульса (см. [8]). Тогда фурье-гармоника (6) будет равна

$$\mathbf{E}_\omega(\mathbf{r}) = \frac{i\omega^3 f(\omega)}{2\pi}\mathbf{A}_0 \times \oint\limits_{4\pi} \mathbf{n}' e^{i\omega r \mathbf{n}'}\, d\mathbf{n}' = \\ = 2\omega^3 f(\omega)\left[\frac{\cos\omega r}{\omega r} - \frac{\sin\omega r}{(\omega r)^2}\right](\mathbf{A}_0 \times \mathbf{n}_r), \tag{10}$$

где $\mathbf{n}_r = \mathbf{r}/r$ и $r = |\mathbf{r}|$. Выражение (10) стремится к нулю при $\omega \to 0$ по крайней мере как ω^3, что означает равенство нулю интеграла Бессонова (1) для поля излучения диполя.

3. СОХРАНЕНИЕ ЭНЕРГИИ И ИМПУЛЬСА

Релятивистски инвариантным обобщением интеграла (1) является следующее четырехмерное векторное выражение:

$$I_E^i = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F^{ik}(x(s))u_k(s)\, ds, \tag{11}$$

где интегрирование ведется вдоль четырехмерной кривой $x(s)$, задаваемой единичным четырехмерным вектором $u^i(s) = dx^i(s)/ds$, а F^{ik} — тензор электромагнитного поля. Интеграл Бессонова (1) получается из (11), если взять пространственные компоненты 4D-вектора I_E^i в случае, если 4D-вектор u постоянен и равен $u^i(s) = (1, \mathbf{0})$.

Можно заметить, что выражение (11) представляет собой приращение 4D-импульса ΔP^i заряженной частицы с единичным зарядом и массой, получаемое ей при движение в электромагнитном поле по заданной траектории. При этом интеграл Бессонова $\mathbf{I}_E$ соответствует движению частицы вдоль прямой линии (в частном случае — покоящаяся частица), т.е. переданному полем частице импульсу в первом порядке теории возмущений или в так называемом одновершинном приближении в квантовой электродинамике. Однако известно, что свободная заряженная частица (электрон) в силу законов сохранения энергии и импульса не может ни поглотить свободный фотон, ни излучить его. С другой стороны, частица, движущаяся по кривой траектории (несвободная частица) будет в общем случае иметь не равный нулю интеграл (11).

Таким образом, равенство нулю интеграла Бессонова для конечного электромагнитного импульса является простым следствием законов сохранения энергии и импульса для заряженных частиц и фотонов. И это свойство представляется достаточно общим и поэтому должно выполняться для любого мыслимого электромагнитного импульса с конечной энергией, подтверждая тем самым доказанное выше Утверждение 1.

4. ПОЛЕ ИЗЛУЧЕНИЯ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ В СПЕКТРАЛЬНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ

Рассмотрим теперь поле излучения ускоренно движущейся заряженной частицы. Для наших целей достаточно рассмотреть поле только одной частицы, поскольку, в силу линейности уравнений поля, утверждения, полученные для этого простого случая, могут быть распространены на электромагнитное поле, создаваемое произвольной системой зарядов и токов. Можно также считать, что рассматриваемая частица меняет свою скорость скачком, а в остальное время движется равномерно и прямолинейно. Это допустимо, поскольку нас интересует излучение только в области малых частот и в пределе при нулевой частоте.

Выпишем теперь общее выражение для четырехмерных фурье-гармоник четырехмерного векторного потенциала свободного электромагнитного поля через фурье-гармоники 4D-тока $j^i(k)$, породившего это поле [10]:

$$A^i(k) = i8\pi^2 \mathrm{sign}(k^0)\delta(k^2)j^i(k), \tag{12}$$

где $\mathrm{sign}(y) = 2\theta(y) - 1$, $\theta(y)$ — функция единичной ступеньки и $k^i = (k^0, \mathbf{k})$ — четырехмерный волновой вектор. Тогда тензор электромагнитного поля будет иметь вид

$$F^{im}(k) = 8\pi^2 \mathrm{sign}(k^0)\delta(k^2)(k^i j^m(k) - k^m j^i(k)). \quad (13)$$

Известно, что для заряженной частицы, движущейся по траектории $x^i(s)$, фурье-гармоники тока определяются выражением [7]

$$j^i(k) = \int e^{ikx(s)} u^i(s)\, ds, \quad (14)$$

которое для свободной частицы (с единичным зарядом), скачком меняющей свою скорость в момент $t \sim s = 0$ от $\mathbf{v}_1$ до $\mathbf{v}_2$, будет иметь вид

$$j^i(k) = \frac{1}{i}\left[\frac{u_2^i}{ku_2} - \frac{u_1^i}{ku_1}\right], \quad (15)$$

где $u_a^i = \gamma_a(1, \mathbf{v}_a)$, $\gamma_a = 1/\sqrt{1-\mathbf{v}_a^2}$, $a = 1, 2$. Тогда для положительно частотной части $\mathbf{E}_+$ в разложении (4) с учетом формулы (13) можно написать

$$\mathbf{E}_+(\mathbf{n}, \omega) = \frac{2\pi i}{\omega}\left[\frac{\mathbf{v}_2}{1-\mathbf{n}\mathbf{v}_2} - \frac{\mathbf{v}_1}{1-\mathbf{n}\mathbf{v}_1} - \mathbf{n}\left(\frac{\mathbf{v}_2}{1-\mathbf{n}\mathbf{v}_2} - \frac{\mathbf{v}_1}{1-\mathbf{n}\mathbf{v}_1}\right)\right]. \quad (16)$$

Выражение (16) обратно пропорционально частоте ω и соответствует первому члену в разложении (8). Отсюда на основе общего Утверждения 1 следует, что интеграл Бессонова (1) для электромагнитного поля импульса, излученного ускоренно движущейся заряженной частицей, будет тоже равен нулю.

Для спектральной плотности полной энергии, определенной в (7), получаем константу

$$W_\omega = \frac{1}{4\pi^2}\oint\limits_{4\pi}\left|\frac{\mathbf{v}_2}{1-\mathbf{n}\mathbf{v}_2} - \frac{\mathbf{v}_1}{1-\mathbf{n}\mathbf{v}_1} - \mathbf{n}\left(\frac{\mathbf{v}_2}{1-\mathbf{n}\mathbf{v}_2} - \frac{\mathbf{v}_1}{1-\mathbf{n}\mathbf{v}_1}\right)\right|^2 d\mathbf{n}, \quad (17)$$

что означает расходимость полной энергии по верхнему пределу интегрирования. Однако данная расходимость связана лишь с нефизическим предположением о мгновенном изменении скорости частицы и, следовательно, о бесконечном ускорении. Однако более важным результатом здесь является сходимость интеграла от (17) на нижнем пределе интегрирования, означающая, что, если ускорение заряженной частицы конечно, то энергия излученного электромагнитного импульса будет тоже конечной.

Формула (17) совпадает (после некоторого преобразования) с выражением для спектральной плотности тормозного излучения малых частот из [7].

5. ПОЛЕ ИЗЛУЧЕНИЯ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ В КООРДИНАТНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ

Несмотря на соображения, приведенные выше, в литературе [2, 5] встречаются утверждения о возможности излучения ускоренно движущейся заряженной частицей так называемых «необыкновенных» или униполярных импульсов с не равным нулю интегралом Бессонова. Такие утверждения основываются на анализе выражения для поля ускоренно движущейся частицы в координатном представлении с выделением членов, имеющих на бесконечности асимптотику $\propto 1/r$ и, как утверждается, соответствующих полю излучения. Очевидно, что утверждения, сделанные в упомянутых выше статьях, и Утверждение 1 несовместимы между собой. Поэтому вопрос о причине такого расхождения нуждается в дополнительном изучении.

Необходимо отметить, что разделение электромагнитного поля движущейся заряженной частицы на статическое и индукционное поля с одной стороны и на излучение — с другой стороны не является однозначным. В импульсном представлении это сделать достаточно просто: в выражении для поля излучения (4) коэффициент пропорциональности между потенциалами и токами есть известная функция Паули–Йордана $D(k)$, равная разности запаздывающего $\Pi_{ret}(k)$ и опережающего $\Pi_{adv}(k)$ пропагаторов электромагнитного поля [11]:

$$D(k) = i8\pi^2 \mathrm{sign}(k^0)\delta(k^2) = \Pi_{ret}(k) - \Pi_{adv}(k). \quad (18)$$

Однако в координатном представлении выделение поля излучения представляет собой более сложную задачу. Рассмотрим, например, формулу для электрического поля ускоренно движущегося заряда (см. формулу (1.1) в работе [2]):

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{(1-\mathbf{v}^2)(\mathbf{n}_r - \mathbf{v})}{R^2(1-\mathbf{n}_r\mathbf{v})^3} + \frac{\mathbf{n}_r \times ((\mathbf{n}_r - \mathbf{v}) \times \dot{\mathbf{v}})}{R(1-\mathbf{n}_r\mathbf{v})^3}, \quad (19)$$

где $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'(t')|$, $\mathbf{r}'(t)$ задает траекторию движения заряда, а $\dot{\mathbf{v}}$ — ускорение частицы. Все скорости, координаты и ускорения берутся в момент времени $t' = t - R$ для учета запаздывания. Поскольку интеграл по времени от второго слагаемого в (19), обычно отождествляемого с излучением, очевидно не равен нулю (особенно, если скорость меняется скачком), то это считается доказательством того, что интеграл (1) от поля излучения ускоренно движущегося заряда может быть в принципе не равен нулю.

Возникает вопрос: а действительно ли второе слагаемое в (19) (не являющееся в общем случае решением уравнений для свободного поля (2), (3)) соответствует полю излучения? С одной стороны, поле (и интеграл от него по времени) в этом случае убывает при $r \to \infty$ как $1/r$. С другой стороны, в точном выражении для поля, например, для дипольного импульса (10), присутствуют члены [8], на бесконечности ведущие себя как $1/r^2$. Слагаемые, ведущие себя как $1/r^2$, также должны присутствовать в координатном эквиваленте выражения (16), поскольку оно пропорционально $1/k$, что после обратного преобразования Фурье должно как раз дать член, пропорциональный $1/r^2$. Можно также заметить, что интеграл в бесконечных пределах по времени от первого слагаемого в (19) вполне может убывать как $1/r$ при $r \to \infty$, как и интеграл от второго слагаемого. Это становится очевидно, если заметить, что при больших по модулю временах $R \propto |t|$. Таким образом, можно заключить, что отождествление второго слагаемого в (19) с полем излучения (в том числе для целей вычисления интеграла (1)) является некорректным.

В качестве иллюстрации сделанных выше выводов рассмотрим поле в координатном представлении, соответствующее амплитуде (16) поля излучения заряда, скачком меняющего свою скорость. Для его вычисления проще всего сначала определить потенциалы поля $A^i = (A^0, \mathbf{A})$, применяя обратное преобразование Фурье к выражению (12) (с учетом формулы (15)) и при этом предполагая, что скорость $\mathbf{v}_1$ (или $\mathbf{v}_2$) равна нулю. Затем выражения для потенциалов при уже ненулевой скорости $\mathbf{v}_1$ (или $\mathbf{v}_2$) находятся применением соответствующих преобразований Лоренца для потенциалов и координат. Это дает

$$A^0 = \left(\frac{\gamma_2}{R_2} - \frac{\gamma_1}{R_1}\right)\theta(r^2 - t^2), \tag{20}$$

$$\mathbf{A} = \left(\frac{\mathbf{v}_2\gamma_2}{R_2} - \frac{\mathbf{v}_1\gamma_1}{R_1}\right)\theta(r^2 - t^2), \tag{21}$$

где

$$R_a^2 = r^2 + \gamma_a^2(\mathbf{v}_a\mathbf{r})^2 - 2\gamma_a^2(\mathbf{v}_a\mathbf{r})t + (\gamma_a^2 - 1)t^2, \tag{22}$$

$v_a = |\mathbf{v}_a|$, $a = 1, 2$. Теперь для электрического поля $\mathbf{E} = -\nabla A^0 - \partial\mathbf{A}/\partial t$ можно получить следующее выражение:

$$\begin{aligned}\mathbf{E} = {} & \left(\frac{\gamma_2(\mathbf{r} - \mathbf{v}_2 t)}{R_2^3} - \frac{\gamma_1(\mathbf{r} - \mathbf{v}_1 t)}{R_1^3}\right)\theta(r^2 - t^2) - \\ & - \frac{1}{r}\left[\left(\frac{\mathbf{n}_r - \mathbf{v}_2}{1 - \mathbf{v}_2\mathbf{n}_r} - \frac{\mathbf{n}_r - \mathbf{v}_1}{1 - \mathbf{v}_1\mathbf{n}_r}\right)\delta(r - t) + \right. \\ & \left. + \left(\frac{\mathbf{n}_r + \mathbf{v}_2}{1 + \mathbf{v}_2\mathbf{n}_r} - \frac{\mathbf{n}_r + \mathbf{v}_1}{1 + \mathbf{v}_1\mathbf{n}_r}\right)\delta(r + t)\right]. \end{aligned} \tag{23}$$

Можно показать, что магнитное поле выражается как $\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}$ и является поперечным в отличие от электрического поля (23), а вектор Пойнтинга будет равен, соответственно, $\mathbf{S} = \mathbf{n}_r|\mathbf{H}|^2/(4\pi)$. Полная длительность излученного электромагнитного импульса составляет $2r$. На границах импульса имеются резкие (дельтообразные в данной модели) пики поля. Путем прямого вычисления несложно показать, что интеграл Бессонова (1) от выражения (23) равен точно нулю. Также выражение (23) содержит члены имеющие на бесконечности асимптотику $\propto 1/r^2$, как предполагалось выше.

Причину, по которой интеграл Бессонова от (23) равен нулю, можно понять, если обратить внимание на то, что это выражение является разностью двух волн: сходящейся и расходящейся. Интегралы Бессонова от этих волн равны друг другу и при вычитании дают нуль. Такая структура поля излучения связана с общим определением (18) для функции Паули–Йордана как разности двух пропагаторов: запаздывающего и опережающего. Интегралы Бессонова от запаздывающей и опережающей частей поля излучения равны друг другу и, следовательно, их разность равна нулю, что приводит нас опять к общему Утверждению 1.

Можно отметить, что экспериментальные измерения интеграла Бессонова для импульсов от некоторых источников электромагнитных волн (в том числе терагерцового диапазона), в которых были получены ненулевые его значения [12], можно объяснить существованием там неучтенных электростатических полей. Такие поля может быть трудно контролировать в эксперименте.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе рассмотрено произвольное свободное электромагнитное поле с конечной энергией и показано, что для него интеграл Бессонова (1) всегда равен нулю. Также показано, что равенство нулю интеграла Бессонова прямо связано с невозможностью в силу законов сохранения энергии и импульса для свободной заряженной частицы поглотить или испустить свободный фотон.

В работе рассмотрен случай ускоренно движущейся заряженной частицы и получено точное выражение для ее поля излучения (в импульсном и координатном представлениях) в случае, когда скорость ее движения меняется скачком. Показано, что при правильном выделении поля излучения из полного электромагнитного поля ускоренно движущейся частицы интеграл Бессонова от такого, должным образом определенного, поля излучения всегда равен нулю, как и должно следовать из общего утверждения первого раздела.

Имеющиеся в литературе утверждения, что интеграл Бессонова от поля излучения уско ренно движущейся заряженной частицы может быть отличен от нуля, являются ошибочными и связаны с использованием некорректных выражений для поля излучения, в которых на самом деле присутствуют добавки от статического или индукционного поля, которые и обеспечивают неравенство нулю интеграла Бессонова.

Благодарности. Автор выражает благодарность А. В. Виноградову и И. А. Артюкову за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. N.L. Popov and A V. Vinogradov, Foundations **1**, 169 (2021).

2. Е. Г. Бессонов, ЖЭТФ **80**, 852 (1981) [E.G. Bessonov, Sov. Phys. JETP **53**, 433 (1981)].

3. P. Saari and I.M Besieris, Foundations **2**, 199 (2022).

4. Z. Wang, Q. Lin, and Z. Wang, Phys. Rev. E **67**, 016503 (2003).

5. Р.М. Архипов, М.В. Архипов, Н. Н. Розанов, КЭ **50**, 801 (2020) [R.M. Arkhipov, M.V. Arkhipov, and N.N. Rosanov, Quantum Electronics **50**, 801 (2020)].

6. R. Arkhipov, M. Arkhipov, A. Pakhomov, I. Babushkin, and N. Rosanov, Laser Phys. Lett. **19**, 043001 (2022).

7. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, *Теория поля*, Наука, Москва (1988).

8. И. А. Артюков, А. В. Виноградов, Н. В. Дьячков и Р. М. Фещенко, КЭ **50**, 187 (2020) [I.A. Artyukov, A.V. Vinogradov, N.V. D'yachkov, and R.M. Feshchenko, Quantum Electronics **50**, 187 (2020)].

9. I. Gonoskov, A. Aiello, S. Heugel, and G. Leuchs, Phys. Rev. A **86**, 053836 (2012).

10. R.M. Feshchenko and A.V. Vinogradov, Physica Scripta **94**, 065501 (2019).

11. Д. Ширков, Н. Боголюбов, *Квантовые поля*, Наука, Москва (1993).

12. М. В. Архипов, А. Н. Цыпкин, М. О. Жукова, А. О. Исмагилов, А. В. Пахомов, Н. Н. Розанов и Р. М. Архипов, Письма в ЖЭТФ **115**, 3 (2022) [M.V. Arkhipov, A.N. Tsypkin, M.O. Zhukova, A.O. Ismagilov, A.V. Pakhomov, N.N. Rosanov, and R.M. Arkhipov, JETP Letters **115**, 3 (2022)].