

# НЕЛИНЕЙНЫЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ РЕЗОНАНС В ПРОСТЕЙШЕЙ МОДЕЛИ СОЛНЕЧНОГО ДИНАМО

А. Ю. Серенкова <sup>a\*</sup>, Д. Д. Соколов <sup>a,c</sup>, Е. В. Юшков <sup>a,b,c\*\*</sup>

<sup>a</sup> *Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет  
119991, Москва, Россия*

<sup>b</sup> *Институт космических исследований Российской академии наук  
117997, Москва, Россия*

<sup>c</sup> *Московский центр фундаментальной и прикладной математики  
119991, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 21 октября 2022 г.,  
после переработки 23 ноября 2022 г.  
24 ноября 2022 г.

Исследуются свойства нелинейного параметрического резонанса на примере работы маломодовой динамо-модели Паркера. Данная модель представляет собой систему из четырех обыкновенных дифференциальных уравнений и в простейшем приближении описывает процессы генерации и осцилляции крупномасштабных магнитных полей в звездных системах. В отсутствие нелинейных эффектов рассматриваемая задача, по аналогии с системой гармонических колебаний, допускает асимптотическое выделение кратных резонансных частот. Однако несмотря на то, что на первый взгляд на этих частотах разумно ожидать усиления амплитуды и в нелинейном случае, продемонстрировано, что при наличии нелинейных слагаемых поведение системы существенно более сложное. В частности, на резонансных или малых частотах может наблюдаться подавление генерации, в то время как усиление происходит в непосредственной близости от резонанса или на достаточно больших частотах. Обсуждаются причины такого поведения, а также возможность влияния параметрического резонанса на установление планетарных динамо-циклов.

DOI: 10.31857/S0044451023040089  
EDN: LUGKNR

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Проведенное в настоящей работе исследование отталкивается от следующего замечательного факта. Период магнитной солнечной активности, известной как 11-летний солнечный цикл, практически совпадает с периодом обращения Юпитера. Этот факт неоднократно отмечался в литературе, так, например, история вопроса обсуждается в недавно опубликованной работе [1] и в приведенных там исторических ссылках. Заманчивым кажется предположить причинную связь между этими явлениями, т.е. считать, что слабое влияние Юпитера является физической причиной солнечного цикла.

Такое предположение многократно делалось в ряде работ прошлых лет, впрочем, делается и в настоящее время, так в качестве одной из последних можно упомянуть работу [2]. И хотя на самом деле полный период солнечного цикла составляет около 22 лет, в данных работах отмечается, что половинный период в 11 лет упоминается потому, что простейшие методы наблюдения магнитных колебаний нечувствительны к знаку магнитного поля.

Между тем, если не поддаваться на заманчивое предположение, то следует признать, что идея о непосредственном воздействии удаленного Юпитера на Солнце с образованием солнечного цикла магнитной активности совершенно не вписывается в имеющиеся в этой области представления. Так, в работе [1], при анализе имеющихся наблюдательных данных о магнитной активности звезд с экзопланетными системами, продемонстрировано, что для нашей звездной системы речь идет о случайном совпадении двух чисел. С другой стороны, известно много

\* E-mail: serenkova.ai19@physics.msu.ru

\*\* E-mail: yushkov.msu@mail.ru

экзопланетных систем, планеты которых находятся гораздо ближе к соответствующим звездам, чем Юпитер к Солнцу, не говоря уже о многочисленных тесных двойных звездных системах. Поэтому нет оснований заранее отвергать идею возникновения параметрического резонанса, связанного с периодическим воздействием экзопланеты на течения в звезде.

Задача о влиянии периодического возмущения на генерацию магнитного поля в сферической оболочке тоже многократно исследовалась в литературе (из сравнительно недавних статей упомянем работы [3, 4], а также приведенные там ссылки), однако полученные таким образом результаты не кажутся нам достаточно проясняющими ситуацию. Действительно, добавление периодического возмущения в уравнения динамо в ряде случаев сопровождается заметным увеличением амплитуды волны квазистационарного магнитного поля, с распространением которой связан солнечный цикл, однако это происходит далеко не только при стандартном соотношении частоты возмущения и собственной частоты, известном из теории параметрического резонанса. Убедительно идентифицировать изменение амплитуды волны магнитного поля в сложной многомерной задаче звездного динамо, которая содержит самые разнообразные эффекты, тоже непросто. Есть, например, случаи, когда не вызывающее сомнения периодическое воздействие на звездное динамо оказывается неожиданно скромным, так что его заметное проявление требует воздействия очень близкой звезды размера, сопоставимого с размером исходной звезды, см., например, [5].

Все это снова побуждает нас обратиться к задаче о параметрическом воздействии на работу звездного динамо и рассмотреть ее в постановке, ориентированной на выделение параметрических эффектов. Для этого мы рассматриваем простейшую постановку задачи о генерации магнитного поля в сферической конвективной оболочке звезды, предложенной в работе [6], разлагаем соответствующие уравнения в ряды Фурье по базису, состоящему из соответствующих мод свободного затухания и сохраняем минимальный набор мод, позволяющих возбуждать колеблющееся магнитное поле. В итоге мы приходим к сравнительно простой системе обыкновенных дифференциальных уравнений, в которую вписываем внешнее параметрическое воздействие. Эта система заметно сложнее уравнения Матье, которое обычно используется при исследовании задачи о параметрическом резонансе, поскольку результаты нетрудно сравнивать с аналогичными для урав-

нения Матье [7]. При этом предложенная нами система в определенных пределах допускает и аналитическое исследование, что, конечно, способствует пониманию физики явления. Отметим, что проводимое нами упрощение задачи лежит в русле вывода уравнения Матье для параметрического резонанса — строго говоря, полное описание человека, который раскачивается на качелях, изменяя свое положение на них, содержит много степеней свободы, а в уравнении Матье учитываются лишь главные из них.

Наконец, заметим, что хотя рассматриваемая задача возникает при изучении физики Солнца, она, как и явление резонанса вообще, имеет общезначимые применения. Речь идет о резонансе в системах, в которых наряду с параметрическим воздействием присутствует самовозбуждение и его последующее нелинейное подавление. Подобные задачи могут, конечно, возникать в различных областях физики. Мы, естественно, не претендуем на полное исследование таких резонансных явлений, но думаем, что опыт исследования данной задачи может быть востребован и в других сходных ситуациях.

## 2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Для анализа нелинейного параметрического резонанса мы сознательно используем простейшую динамо-модель. Эта модель была предложена в работе [6] для описания миграционной волны в конвективной оболочке Солнца. Она является прямым следствием уравнения магнитной индукции, усредненного по случайному двухмасштабному полю скорости, хотя следует признать, что в 1955 г. Ю. Паркер лишь гениально угадал вид основного уравнения. Позднее же (см., например, [8]) уравнение для среднего магнитного поля  $\mathbf{V}$  было выведено в явном виде:

$$\dot{\mathbf{V}} = \text{rot}[\mathbf{V}, \mathbf{V}] + \alpha \cdot \text{rot} \mathbf{V} + \beta \cdot \Delta \mathbf{V}. \quad (1)$$

Таким образом, для описания линейных эффектов генерации в рамках данной модели достаточно знать среднюю скорость течения  $\mathbf{V} = \langle \mathbf{v} \rangle$ , поле гидродинамической спиральности  $\alpha \sim \langle \mathbf{v}, \text{rot} \mathbf{v} \rangle$  и коэффициент турбулентной диффузии  $\beta$ , включающий в себя магнитную диффузию и энергию турбулентного потока [8].

При наличии достаточной асимметрии конвективного потока  $\alpha$  и дифференциального вращения  $\mathbf{V}(r)$  усредненное уравнение (1) может описывать перекачку гидродинамической энергии в энергию

среднего магнитного поля, см., например, [9]. Магнитная энергия в такой модели нарастает экспоненциально, при этом образуются периодические осцилляции, представляющие собой, с физической точки зрения, волны активности, бегущие от полюсов к экватору. Нелинейные эффекты, характеризующие уменьшение гидродинамической спиральности с ростом поля, приводят к стабилизации экспоненциального роста. В итоге образуется периодический процесс, описывающий открытый еще в 1844 г. периодический 11-летний динамо-цикл Солнца [10] и влияющий на всевозможные плазменные явления в Солнечной системе, в частности, на формирование корональных петель, вспышечную активность и прочее [11].

Ключевым упрощением, предложенным Паркером, при переходе в сферическую систему координат являлось представление аксиально-симметричного магнитного поля в виде суммы тороидальной компоненты  $B$  и полоидальной компоненты  $A$ :

$$\mathbf{B} = B\mathbf{e}_\varphi + R \cdot \text{rot}(A\mathbf{e}_\varphi).$$

Такое представление в случае тонкого сферического слоя радиуса  $R$ , в котором величина поля зависит только от времени и зенитного угла  $\theta$ , переводит уравнение (1) в систему из двух уравнений. В безразмерном виде она имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{A} &= R_\alpha B + A_{\theta\theta} - \mu^2 A, \\ \dot{B} &= R_\omega (A \sin(\theta))_\theta + B_{\theta\theta} - \mu^2 B, \end{aligned} \quad (2)$$

и носит название системы Паркера. Два параметра, входящие в систему,  $R_\alpha$  и  $R_\omega$ , описывают безразмерные интенсивности источников генерируемых магнитных полей, а вспомогательное число  $\mu$  определяет радиальную часть диффузии и пропорционально отношению радиуса к толщине конвективной оболочки (для Солнца эта величина традиционно принимается равной 3, см., например, комментарии в работе [12]).

Примечательно, что полученная система (2) описывает не специфическое поведение Солнца, а процесс, характерный для многих звезд, обладающих магнитным полем. Генерируемые в такой системе миграционные волны (их часто называют динамоволнами), да и сам динамо-процесс наиболее чувствительны к так называемому динамо-числу  $D$  — произведению безразмерных параметров, отвечающих за дифференциальное вращение  $R_\omega$  и спиральность  $R_\alpha$ . В целом, перенормировка компонент в системе (2) позволяет объединить  $R_\alpha$  и  $R_\omega$  и далее использовать исключительно управляющий параметр

$D$ , однако для удобства анализа (см. последний раздел) мы оставим два параметра, а не один. Гипотетически периодическое влияние двойных звезд друг на друга может приводить к периодическому изменению  $R_\alpha$  или  $R_\omega$ , что, в свою очередь, может вызывать параметрический резонанс. При этом, как было сказано выше, сам периодический звездный цикл, а точнее, стабилизация экспоненциально растущего поля, является типично нелинейным процессом. Поэтому возникает интересный и важный вопрос, насколько при нелинейном подавлении в параметрическом резонансе может быть выше амплитуда колебаний и может ли резонанс в системе (2) приводить к эффектам, принципиально отличающимся от наблюдаемых на Солнце.

Для упрощения модели сведем систему в частных производных к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, принимая в расчет тот факт, что  $B$  и  $A$  из-за наличия ротора имеют разную симметрию относительно экватора. Предположим, что  $B$  антисимметрично, а  $A$  — симметрично относительно  $\theta = \pi/2$ , и воспользуемся маломодовым подходом, раскладывая тороидальную и полоидальную компоненты по гармоникам:

$$\begin{aligned} B &= b_1 \sin(2\theta) + b_2 \sin(4\theta), \\ A &= a_1 \sin(\theta) + a_2 \sin(3\theta). \end{aligned} \quad (3)$$

Подставляя такое разложение в систему Паркера, получим четыре дифференциальных уравнения для каждой моды:

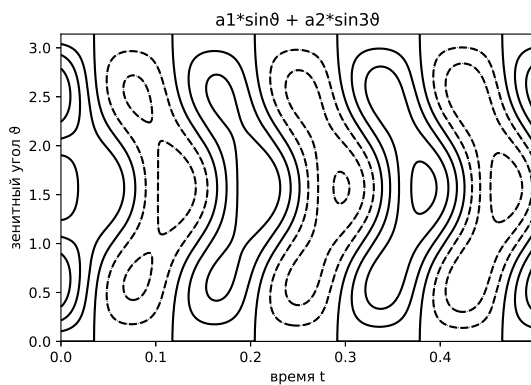
$$\begin{aligned} \dot{a}_1 &= (R_\alpha/2)b_1 - (1 + \mu^2)a_1, \\ \dot{a}_2 &= (R_\alpha/2)(b_1 + b_2) - (9 + \mu^2)a_2, \\ \dot{b}_1 &= R_\omega(a_1 - a_2) - (4 + \mu^2)b_1, \\ \dot{b}_2 &= 2R_\omega a_2 - (16 + \mu^2)b_2. \end{aligned} \quad (4)$$

Это основная система для дальнейшего анализа и моделирования, для которой остается сделать последние предположения о том, что, во-первых, внешние источники приводят к осцилляции динамо-параметров, а во-вторых, что рост магнитного поля приводит к уменьшению гидродинамической спиральности и к стабилизации роста магнитного поля:

$$R_\omega \rightarrow R_\omega(1 + \sigma \sin(\omega t)); \quad R_\alpha \rightarrow \frac{R_\alpha}{1 + \langle b_1^2 + b_2^2 \rangle}. \quad (5)$$

Мы специально разделили воздействия параметрической модуляции и нелинейного подавления для  $R_\omega$  и  $R_\alpha$ , это принципиально не меняет результаты, зато помогает при теоретическом анализе сводить систему из четырех уравнений первого порядка к системе

из двух уравнений второго порядка, см. ниже. Еще раз подчеркнем, что используемая система (4) является максимально упрощенной моделью, демонстрирующей при этом базовое поведение миграционных волн. Пример такой волновой динамики показан на рис. 1, где изображена зависимость амплитуды полоидальной компоненты  $A$  от времени  $t$  и угла  $\theta$ . Сплошные и штриховые кривые являются линиями уровня амплитуды (сплошные — положительные значения, штриховые — отрицательные), а сам рисунок носит название баттерфляй-диаграммы динамоволны (о солнечной баттерфляй-диаграмме более подробно можно прочитать, например, в [13]). Наш же интерес в первую очередь связан с периодическим изменением параметра и наличием параметрического резонанса, который мы и попробуем зафиксировать, как численно, так и аналитически.



**Рис. 1.** Баттерфляй-диаграмма: зависимость амплитуды полоидальной компоненты  $A$  от времени  $t$  и угла  $\theta$ . Сплошные и штриховые кривые являются линиями уровня амплитуды, сплошные соответствуют положительным значениям, штриховые — отрицательным

### 3. ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Для численного решения системы дифференциальных уравнений мы используем метод Рунге–Кутты 4 порядка, см., например, [14]. Шаг при этом подбирается таким образом, чтобы ошибка вычисления была менее 0.1% (для представляемых результатов выбран шаг  $dt = 0.001$ , а время моделирования  $t_{max} = 50$ ). Начальные условия можно выбирать свободно, так как в линейных случаях нас интересует только скорость экспоненциального роста, а в нелинейных — уровень, на который выходит система после стабилизации, в частности, у нас  $a_1(0) = 0.01$ ,  $a_2(0) = 0.02$ ,  $b_1(0) = 0.03$ ,  $b_2(0) = 0.04$ . Для каждой

задачи сначала восстанавливаются частота и амплитуда собственных колебаний в отсутствие параметрического возбуждения, т. е. при  $\sigma = 0$ . Для этого находятся последние два максимума осцилляций в отсутствие параметрического возбуждения, затем из разности координат максимумов находится собственная частота, а из квадрата максимума, деленного пополам — амплитуда.

В случае линейного режима для каждой моды восстанавливается скорость экспоненциального роста. Для этого на интервале времени  $[(5/6)t_{max}, t_{max}]$  находятся максимумы осцилляций, которые должны образовывать растущую экспоненту, от полученных значений берутся натуральные логарифмы и аппроксимируются прямой с помощью хорошо известного метода наименьших квадратов (МНК) [15]. Это позволяет не только найти скорость экспоненциального роста, но и убедиться в том, что рост действительно имеет показательную скорость, так как полученная ошибка МНК близка к машинному нулю. Данная процедура повторяется для различных частот возбуждающей силы с шагом  $d\omega = 0.1$  на диапазоне частот  $\omega = [25, 140]$  для маломодовой системы и  $\omega = [15, 80]$  для симметричной, в том числе в районе собственной и удвоенной частот систем (на малых частотах  $\omega$  скорость экспоненциального роста не ищется в силу увеличения периода периодического воздействия, пропорционального  $\sin(\omega t)$ , и ограниченности полного времени счета). Тут следует заметить, что на левых графиках, приведенных ниже на рис. 2–4, соответствующих линейному режиму, иногда можно наблюдать наличие шума, которое связано с методикой определения роста; так, на рис. 2 шум появляется там, где рост сменяется на затухание, а на рис. 3 и 4 — там, где сумма колебаний вырождается в биения (см. рассуждения в следующем разделе).

В случае нелинейного режима, когда рост амплитуды прекращается, анализируется амплитуда осцилляций энергетической характеристики  $\langle b_1^2 + b_2^2 \rangle$ . При этом сама стабилизация происходит за счет подавления  $R_\alpha$ , см. (5), где среднее от этой энергетической характеристики пересчитывается на каждом периоде колебаний. Амплитуда колебаний нормируется на соответствующую ей амплитуду в случае отсутствия параметрического воздействия, т. е. при  $\sigma = 0$ . Здесь важным моментом является то, что указанное отношение энергий находится после стабилизации процесса генерации и при этом на достаточно широком интервале частот  $\omega$ , см. предыдущий раздел, что требует достаточно больших численных мощностей.

При этом нельзя не заметить, что выбранный способ стабилизации — когда усреднение энергии подавления происходит за предыдущий период — это только один из возможных вариантов подавления. Он является достаточно простым и традиционным способом описания  $\alpha$ -квенчинга, однако в численном эксперименте мы пробовали и другие способы, например, стабилизация за счет энергии в предыдущий момент времени или за счет энергии, усредненной с начала моделирования процесса, или за счет энергии, рассчитанной по компонентам  $a_{1,2}$ . Но поскольку различные способы нелинейного подавления дают схожие результаты, мы остановились на изложенном выше.

#### 4. АНАЛИТИЧЕСКИЙ ПОДХОД

При теоретическом анализе параметрического воздействия можно оттолкнуться от того факта, что классическое уравнение гармонических колебаний с параметрическим резонансом при малой величине периодического возмущения ( $\sigma \ll 1$ ) допускает асимптотическое решение вблизи резонансных частот, кратных удвоенной частоте системы, см., например, [9]. Отсюда хотелось бы сделать вывод, что в более сложных, но подобных системах, например, при наличии нелинейности или при наличии дополнительного экспоненциального роста/затухания, и ситуация с резонансом будет подобной.

**Упрощенная система.** Для того чтобы это продемонстрировать, рассмотрим колебательную систему из двух уравнений, являющуюся некоторым упрощением модели Паркера:

$$\begin{aligned} \dot{a} &= -\omega_0^2 b - \mu^2 a, \\ \dot{b} &= (1 + \sigma \sin(\omega t))a - \mu^2 b. \end{aligned} \quad (6)$$

В случае постоянной частоты  $\omega_0$ , выражая из первого уравнения  $b(t)$  и подставляя его во второе, несложно свести систему к стандартному уравнению параметрических колебаний с вязкостью:

$$\ddot{a} + 2\mu^2 \dot{a} + (\omega_0^2 + \mu^4 + \omega_0^2 \sigma \sin(\omega t))a = 0, \quad (7)$$

а замена

$$a(t) = f(t) \exp(-\mu^2 t)$$

приводит нас к классическому уравнению Матье [7]:

$$\ddot{f} + \omega_0^2(1 + \sigma \sin(\omega t))f = 0. \quad (8)$$

Резонансные решения для уравнения Матье ищутся в околорезонансной области в виде гармонической функции с малым экспоненциальным ростом:

$$f(t) = f_1 \exp(st + i(\omega_0 + \varepsilon/2)t) + f_1^* \exp(st - i(\omega_0 + \varepsilon/2)t). \quad (9)$$

Подставим (9) в уравнение (8) и рассмотрим удвоенную возбуждающую частоту  $\omega = 2\omega_0 + \varepsilon$ . Затем для малой амплитуды возбуждающей силы  $\sigma \sim \varepsilon$  пренебрежем старшими гармониками и соберем слабые при  $\exp(i(\omega_0 + \varepsilon/2)t)$  и  $\exp(-i(\omega_0 + \varepsilon/2)t)$ . Получим систему из двух уравнений

$$\begin{aligned} (\omega_0^2 + (s + i(\omega_0 + \varepsilon/2))^2)f_1 + (\sigma\omega_0^2/2i)f_1^* &= 0, \\ -(\sigma\omega_0^2/2i)f_1 + (\omega_0^2 + (s - i(\omega_0 + \varepsilon/2))^2)f_1^* &= 0. \end{aligned}$$

Однородная система имеет нетривиальное решение, если ее определитель равен нулю. Приравняем к нулю определитель и получим скорость роста  $s$  из квадратного уравнения

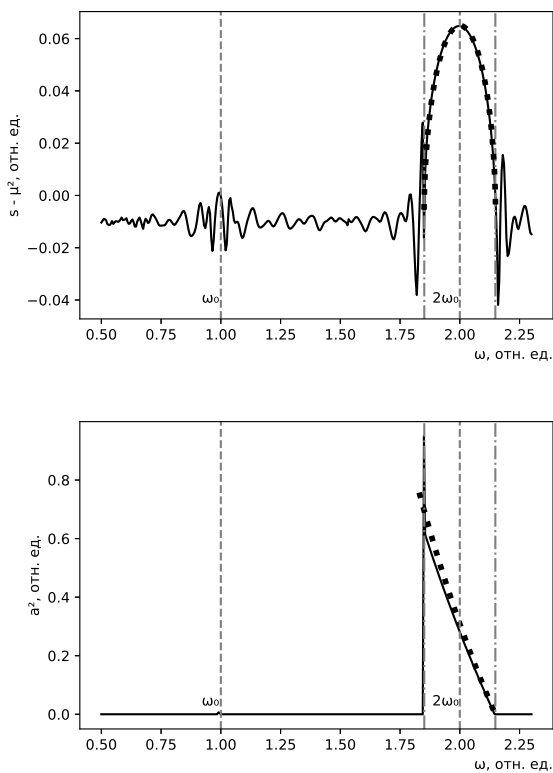
$$\begin{aligned} (\omega_0^2 + s^2 - (\omega_0 + \varepsilon/2)^2)^2 + 4s^2(\omega_0 + \varepsilon/2)^2 &= \frac{\sigma^2\omega_0^4}{4} \Rightarrow \\ \Rightarrow s &= \pm \sqrt{\frac{\sigma^2\omega_0^2/4 - (\omega_0^2 - (\omega_0 + \varepsilon/2)^2)^2}{2(\omega_0^2 + (\omega_0 + \varepsilon/2)^2)}} = \\ &= \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\sigma^2\omega_0^2}{4} - \varepsilon^2}. \end{aligned} \quad (10)$$

Таким образом, с учетом диффузии, генерация в системе (6), когда  $s > \mu^2$ , возможна в достаточно узкой полосе  $\omega \in [2\omega_0 - \varepsilon, 2\omega_0 + \varepsilon]$ :

$$|\varepsilon| \leq \sqrt{\frac{\sigma^2\omega_0^2}{4} - 4\mu^4}.$$

Заметим, что из формулы (4) следует, что величина  $s$  порядка  $\varepsilon \sim \sigma$ , т. е. мала, при этом аналогичные резонансные коридоры есть и на частотах, кратных  $2\omega_0$ , однако скорость генерации и ширина коридора там существенно меньше. На верхней панели рис. 2 приведена зависимость показателя скорости роста от частоты вынуждающей силы. Сплошной линией показаны численные результаты (причины шума описаны более подробно в предыдущем разделе), а черными точками — аналитические, полученные с помощью формулы (10). Вертикальные штриховые линии выделяют удвоенную и основную частоты системы, а штрих-пунктирные отсекают область генерации  $s - \mu > 0$ .

В нелинейном режиме параметрического резонанса для системы (6) с ростом амплитуды  $a(t)$



**Рис. 2.** Упрощенный случай. Верхняя панель — зависимость скорости экспоненциального роста  $a$  от частоты параметрического возбуждения в случае линейного режима. Нижняя панель — зависимость энергии системы от частоты параметрического возбуждения в случае нелинейного режима. Точки — аналитическое решение в районе удвоенной частоты, штрих-пунктирные вертикальными линиями — коридор генерации. Параметры моделирования  $\omega_0 = 1, \mu^2 = 0.01, \sigma = 0.3$

уменьшается параметр  $\omega_0^2$ , за счет чего система постепенно «развязывается», а это, в свою очередь, приводит к стабилизации экспоненциального роста и выходу на квазистационар. Стационар понимается в том смысле, что решение осциллирует, но энергия осцилляций, которую мы берем равной среднему от  $\langle a^2 \rangle$  за период, остается постоянной. С помощью функции (4) оценим уровень стационара в зависимости от частоты осцилляции параметра  $\omega$ . Зададим уменьшение параметра  $\omega_0^2$  как

$$\omega_{eff}^2 = \frac{\omega_0^2}{1 + \langle a^2 \rangle}, \tag{11}$$

тогда при стабилизации, приравнивая скорость генерации к нулю, из (4) получаем

$$\frac{\omega_{eff}^2 \sigma^2}{4} - \varepsilon^2 = 4\mu^4.$$

Выражая отсюда  $\varepsilon$  и подставляя в выражение для частоты  $\omega = 2\omega_{eff} + \varepsilon$ , получаем

$$\omega - \frac{2\omega_0}{\sqrt{1 + \langle a^2 \rangle}} = \sqrt{\frac{\sigma^2 \omega_{eff}^2}{4} - 4\mu^4},$$

откуда следует зависимость для  $\langle a^2 \rangle$  от  $\omega$ :

$$\langle a^2 \rangle = \sqrt{\frac{(4\omega_0 + \sqrt{\sigma^2 \omega_0^2 - 16\mu^4})^2}{4\omega^2}} - 1. \tag{12}$$

Нижняя панель рис. 2 демонстрирует зависимость энергии системы при наличии нелинейной стабилизации от частоты вынуждающей силы. Сплошной линией показаны численные результаты, а черными точками — аналитические результаты, полученные с помощью формулы (12). Явно видно, что согласно и тем, и другим результатам в нелинейном режиме кривая насыщения становится несимметричной относительно резонансной частоты, а максимум амплитуды насыщения смещается от нее влево.

**Динамо-система Паркера.** Теперь рассмотрим маломодовую систему (4), главное отличие которой от упрощенной системы в том, что генерация в ней системе происходит наравне с осцилляцией и при отсутствии параметрического резонанса. Определяется это тем, что система из четырех уравнений может иметь комплексные собственные значения, в отличие от системы из двух уравнений, где комплексные значения либо вещественные, либо чисто мнимые. С этим же связана и сложность, так как в общем случае, чтобы найти собственные частоты системы Паркера, надо найти корни уравнения четвертого порядка. Поэтому начнем с симметричного случая, для которого корни находятся явно. Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \dot{a}_1 &= (R_\alpha/2)b_1 - \mu^2 a_1, \\ \dot{a}_2 &= (R_\alpha/2)(b_1 + b_2) - \mu^2 a_2, \\ \dot{b}_1 &= R_\omega(1 + \sigma \sin(\omega t))(a_1 - a_2) - \mu^2 b_1, \\ \dot{b}_2 &= 2R_\omega(1 + \sigma \sin(\omega t))a_2 - \mu^2 b_2. \end{aligned} \tag{13}$$

Выразив  $b_1(t)$  и  $b_2(t)$  из первых двух уравнений, подставим их во вторые два (заметим, что это удобно сделать в силу нашего предположения о параметрической модуляции параметра  $R_\omega$ , а не  $R_\alpha$ ). Получим систему из двух уравнений второго порядка, для которой по аналогии с уравнением (7) сделаем замену

$$a_{1,2}(t) = f_{1,2}(t) \exp(-\mu^2 t).$$

Получим систему типа системы Матъе:

$$\begin{aligned} \ddot{f}_1 - (R_\alpha R_\omega/2)(1 + \sigma \sin(\omega t))(f_1 - f_2) &= 0, \\ \ddot{f}_2 - (R_\alpha R_\omega/2)(1 + \sigma \sin(\omega t))(f_1 + f_2) &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Для такой системы при отсутствии периодической силы  $\sigma = 0$  несложно вычислить собственные частоты  $\omega_0$  и скорости генерации  $\gamma_0$  гармонического решения:

$$\lambda_0 = \gamma_0 + i\omega_0 = \pm \sqrt{-\frac{R_\alpha R_\omega}{\sqrt{2}}} \exp(\pm 3i\pi/8). \quad (15)$$

При  $\sigma \neq 0$  также можно искать решение в гармоническом виде, однако в отличие от описанной ранее упрощенной системы (6) такое решение будет иметь комплексные добавки к частотам. Эту проблему можно обойти, если искать решение системы (14) в виде суммы не двух, а четырех комплексно сопряженных слагаемых:

$$\begin{aligned} f_{1,2} = & \bar{f}_{1,2} \exp((\gamma_0 + s + i\beta)t + i(\omega_0 + \varepsilon/2)t) + \\ & \bar{f}_{1,2}^* \exp((\gamma_0 + s - i\beta)t - i(\omega_0 + \varepsilon/2)t) + \\ & \bar{f}_{1,2} \exp((\gamma_0 + s - i\beta)t + i(\omega_0 + \varepsilon/2)t) + \\ & \bar{f}_{1,2}^* \exp((\gamma_0 + s + i\beta)t - i(\omega_0 + \varepsilon/2)t). \end{aligned} \quad (16)$$

По аналогии с предыдущим случаем рассмотрим внешнее периодическое воздействие, имеющее удвоенную частоту  $\omega = 2\omega_0 + \varepsilon$ . Пренебрегая старшими гармониками и собирая слагаемые у каждой из четырех гармоник экспонент, получим для  $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_1^*$  и  $\bar{f}_2^*$  систему из четырех уравнений с определителем

$$\begin{vmatrix} a & -d & c & -c \\ d & a & c & c \\ -c & c & b & -d \\ -c & -c & d & b \end{vmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} a &= (\gamma_0 + s + i\beta + i\omega/2)^2 - R_\alpha R_\omega/2, \\ b &= (\gamma_0 + s + i\beta - i\omega/2)^2 - R_\alpha R_\omega/2, \\ c &= -R_\alpha R_\omega \sigma / 4i, \\ d &= -R_\alpha R_\omega / 2. \end{aligned}$$

Приравнивая этот определитель к нулю, получаем уравнение

$$(d(a + b) - 2c^2)^2 + (ab - d^2)^2 = 0, \quad (17)$$

решая которое относительно  $\gamma_0 + s + i\beta$ , получаем

$$\gamma_0 + s + i\beta = \sqrt{\lambda_0^2 \pm i\gamma_0\omega \sqrt{1 \pm \frac{iR_\alpha^2 R_\omega^2 \sigma^2}{8\lambda_0^2 \omega^2}} - \frac{\omega^2}{4}}.$$

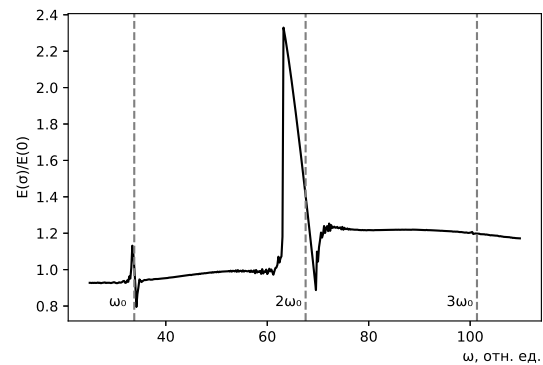
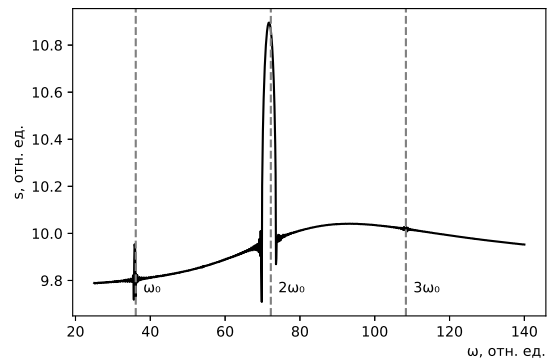
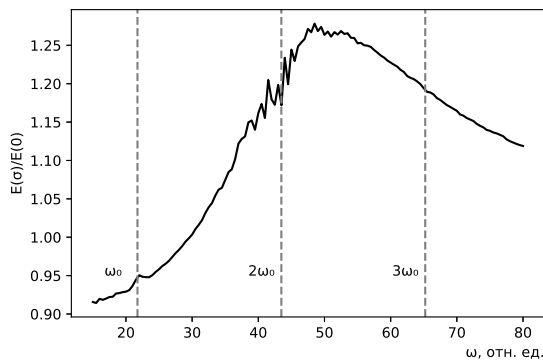
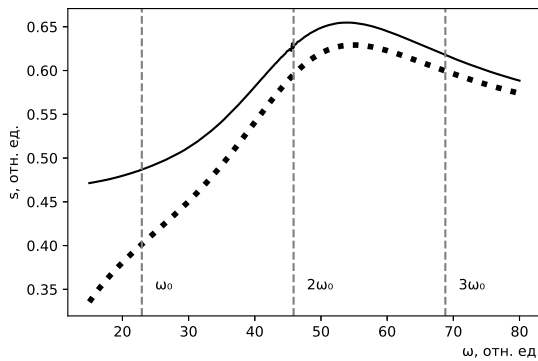
При малых  $\sigma$  асимптотически это можно переписать как

$$s + i\beta + i\varepsilon/2 = \pm \frac{R_\alpha^2 R_\omega^2 \sigma^2}{32\lambda_0\omega(\lambda_0 \pm i\omega/2)} + o(\sigma^2). \quad (18)$$

Левая часть равенства (18) и есть добавка к скорости генерации при наличии периодического воздействия с частотой  $\omega$ . При  $\sigma = 0$  эта добавка равна нулю, а следовательно, скорость генерации полностью совпадает с  $\lambda_0$ , определяемой формулой (15). При  $\sigma \neq 0$  вещественная часть решения (18) при больших  $\omega$  больше  $\lambda_0$ , а при малых — меньше, в районе удвоенной частоты скорость генерации имеет локальный максимум. На верхней панели рис. 3 приведена зависимость скорости экспоненциального роста  $a_{1,2}$  от частоты параметрического возбуждения. Численные результаты вычисления скорости генерации показаны сплошной линией, а аналитические — точками. При этом уменьшение  $\sigma$  приводит к тому, что две кривые стремятся к прямой  $s = \gamma_0$ . Отличительной чертой является отсутствие четко выделенного узкого максимума резонанса на кратных частотах, что, однако, объясняется вырожденностью симметричной системы и отсутствием гармонического решения для системы (14).

Кроме того, заметим, что найденные решения представляют собой две гармоники с близкими частотами — разница между частотами  $2\beta$  — и экспоненциально растущими амплитудами, что наравне с колебаниями может приводить к появлению биений. Биения проявляют себя при минимуме правой части выражения (18) и при численных расчетах приводят к появлению шума, что связано с методикой вычислений (см. предыдущий раздел). Появление диффузии, пропорциональной  $\mu^2$ , см. систему (4), приведет лишь к уменьшению скорости генерации на  $\mu^2$ , сам же характер решения останется таким же.

Если включить нелинейное подавление в симметричном случае, то энергия колебаний, а соответственно и  $R_\alpha$ , изменится настолько, что генерация стабилизируется. Но так как на малых частотах  $\omega$  скорость генерации меньше, чем в невозбужденном случае, а на больших — больше, то относительно энергии системы при отсутствии внешнего возбуждения на больших частотах энергия установившихся колебаний вырастет, а на малых — наоборот, упадет. Такая зависимость энергии системы от частоты параметрического возбуждения приведена на нижней панели рис. 3. Шумы, появляющиеся на зависимости, как было сказано выше, являются прямым следствием используемого численного алгоритма.



**Рис. 3.** Симметричный случай. Верхняя панель — зависимость скорости экспоненциального роста  $a_{1,2}$  от частоты параметрического возбуждения в случае линейного режима. Нижняя панель — зависимость энергии системы от частоты параметрического возбуждения в случае нелинейного режима (энергия нормируется на энергию системы без возбуждения). Параметры моделирования  $R_\alpha = 0.35, R_\omega = -2500, \sigma = 0.3, \xi = 1$ ; собственные частоты для линейного случая  $\omega_0 \approx 23.02$ , для нелинейного —  $\omega_0 \approx 21.74$

**Рис. 4.** Несимметричный случай. Верхняя панель — зависимость скорости экспоненциального роста  $a_{1,2}$  от частоты параметрического возбуждения в случае линейного режима. Нижняя панель — зависимость энергии системы от частоты параметрического возбуждения в случае нелинейного режима (энергия нормируется на энергию системы без возбуждения). Параметры моделирования  $R_\alpha = 1.0, R_\omega = -2500, \sigma = 0.3, \xi = 1$ ; собственные частоты  $\omega_0 \approx 36.11$

При рассмотрении несимметричной системы (4), т. е. случая, когда помимо  $\mu^2$  есть константы, появляющиеся из-за взятия вторых производных по  $\theta$  от соответствующих гармоник, аналитически вычислить собственные частоты системы не представляется возможным. Однако относительно симметричного случая можно сказать следующее: система (4) будет также приводить к уравнению четвертого порядка, но если в симметричном случае положительная вещественная часть корней  $\lambda_0$  была одинаковой, что приводило к решению из четырех экспонент (14), то в несимметричном случае будет существовать корень с большей вещественной частью. Следовательно, решение будет гармоническим и схожим как с симметричным случаем (13), так и с упрощенной системой (6).

Это мы и наблюдаем при численном анализе. Так, в линейном режиме, см. верхнюю панель рис. 4, зависимость скорости генерации от частоты периодического воздействия представляет собой суперпозицию аналогичных зависимостей для упрощенной и симметричной систем. Хорошо виден широкий профиль подложки во всем диапазоне частот и острые пики вблизи удвоенной частоты (и кратных удвоенной). В нелинейном режиме график энергии насыщения тоже представляет собой комбинацию подложки (симметричная система, нижняя панель рис. 3) и треугольников (упрощенная системы, нижняя панель рис. 2). При этом картина параметрического резонанса для системы Паркера стала существенно сложнее ожидаемой для гармонических колебаний. Появились области подавления генера-



ции на низких частотах и усиления на высоких, пики усиления сдвинуты от кратных частот и находятся левее, в непосредственной близости от них. Точно в такой же близости, но правее, находятся пики подавления генерации. Из этого можно сделать вывод, что природа параметрического резонанса для динамо-систем объяснима, но имеет гораздо больше особенностей, нежели стандартная картина.

## 5. ОБСУЖДЕНИЕ И ВЫВОДЫ

В настоящей работе исследован параметрический резонанс в маломодовой динамо-системе Паркера. Эта система является одной из простейших моделей процессов генерации крупномасштабных магнитных полей в случайных проводящих средах и в первом приближении описывает формирование звездных динамо-циклов, аналогичных 11-летнему циклу солнечной активности. Мы не рассматриваем в работе причины, приводящие к периодическим параметрическим осцилляциям, ограничиваясь общими соображениями, такими как, например, периодическое влияние вращающихся планет на гидродинамическую спиральность в конвективной оболочке. Более того, мы не утверждаем, что такое периодическое воздействие присутствует, например, в системах Солнце–Юпитер, или Земля–Луна, а сосредотачиваемся на вопросе о том, насколько картина параметрического резонанса в динамо-системах может отличаться от классического параметрического резонанса, описываемого уравнением Матве. Благодаря настолько упрощенной постановке, эти отличия удастся проанализировать как численно, так и аналитически.

В рассмотренных случаях на графиках зависимости скорости генерации от частоты параметрического воздействия, действительно видны пики, которые можно отождествить с эффектами параметрического резонанса. Примечательно, что эти пики для динамо-систем не обязательно возникают при периоде внешнего воздействия, вдвое меньшем собственного периода колебаний. Более того, в ряде случаев удается объяснить аналитически, почему иногда условия возникновения параметрического резонанса совпадают с классическими, а иногда — отличаются от него. Оказывается, что в общем случае в динамо-системах влияние периодического внешнего воздействия на скорость генерации есть на всех частотах. Особенно при этом выделяется частный случай совпадающих коэффициентов диффузии при различных компонентах разложения маг-

нитного поля по модам, так как в этом частном случае классического параметрического резонанса вообще не наблюдается, а наблюдается следующее: во-первых, подавление генерации на малых частотах периодической модуляции и усиление генерации на больших, во-вторых, пик такого параметрического усиления генерации, лежащий между удвоенной и утроенной собственными частотами системы, более широкий, чем на удвоенной частоте в классическом случае, но при этом более низкий по амплитуде. Может быть, более грамотно такой отклик системы на периодическое изменение параметров следовало бы назвать не «параметрическим резонансом», для которого характерен избирательный по частоте отклик, а «неизбирательным параметрическим резонансом». Тогда можно было бы сказать, что в общем случае наблюдается суперпозиция «классического» и «неизбирательного» резонансов. Однако, оставляя вопросы терминологии для дальнейшего обсуждения, нельзя не отметить, что обнаруженное явление — отсутствие классического параметрического резонанса при совпадении коэффициентов диффузии для разных компонент магнитного поля — совпадает по смыслу с результатами, полученными ранее в других работах, в частности, в работе [16].

Еще одним важным с нашей точки зрения результатом является то, что возникновение резонансных пиков не кажется столь ярким явлением, как возникновение резонансных пиков в задачах, не связанных с развитием неустойчивостей. Конечно, это объясняется тем, что появление неустойчивости само по себе является очень заметным явлением, которое вполне может быть более заметным, чем резонанс, поэтому усиление или подавление генерации на фоне уже происходящей генерации заметить гораздо сложнее.

Если говорить о реальных динамо-системах, то следует учитывать тот факт, что экспоненциальное нарастание крупномасштабного магнитного поля — очень редко наблюдаемое явление. В подавляющем большинстве систем экспоненциальная генерация затухает за счет обратного влияния растущего магнитного поля на гидродинамические параметры системы. В настоящей работе учитывалось влияние роста магнитного поля на гидродинамическую спиральность. Анализ энергии установившихся колебаний в зависимости от параметрического воздействия показал, что резонансное воздействие может приводить не к возрастанию, а к уменьшению амплитуды динамо-волны, т.е. может возникать не резонансное усиление, а резонансное поглощение как

в близких к резонансу областях, так и просто на малых частотах периодической силы. Резонансное поглощение, конечно, известно в ряде физических контекстов, но в контексте задачи динамо является очевидно недостаточно изученным. Говоря о непосредственных приложениях проведенного исследования к физике Солнца, отметим, что на фоне полученных результатов факт совпадения длины солнечного цикла с периодом обращения Юпитера перестает представлять столь привлекательным в контексте исследования природы солнечного цикла. Также еще раз отметим, что проведенное в конкретной ситуации исследование параметрического резонанса в системах с самовозбуждением и нелинейным подавлением может быть интересно и в других аналогичных ситуациях.

**Финансирование.** Численный анализ параметрического резонанса в динамо-системах выполнен при поддержке Минобрнауки РФ в рамках программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики (проект № 075–15–2019–1621). Асимптотический анализ периодического воздействия на генерацию крупномасштабных структур проводился при поддержке фонда Базис (грант № 21-1-3-63-1).

## ЛИТЕРАТУРА

1. V.N. Obridko, M.M. Katsova, and D.D. Sokoloff, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **516.1**, 1251 (2022).
2. F. Stefani, J. Beer, A. Giesecke, T. Gloaguen, M. Seilmayer, R. Stepanov, and T. Weier, *Astronomische Nachrichten* **341**, 600 (2020).
3. D. Moss and D. Sokoloff, *Astr. and Astrophys.* **553**, A37 (2013).
4. D. Moss and D. Sokoloff, *Astr. Reps.* **61(10)**, 878 (2017).
5. D. Moss, N. Piskunov, and D. Sokoloff, *Astr. and Astrophys.* **396(3)**, 885 (2002).
6. E.N. Parker, *The Astrophys. J.* **122**, 293 (1955).
7. N.W. McLachlan, *Theory and Application of Mathieu Functions*, Clarendon Press, Oxford (1947).
8. Ф. Краузе, К.-Х. Рэдлер, *Магнитная гидродинамика средних полей и теория динамо*, Пер. с англ., Мир, Москва (1984).
9. Л. Ландау, Е. Лифшиц, *Теоретическая физика*, Физматлит, Москва (2001).
10. H. Schwabe, *Sonnenbeobachtungen im Jahre 1843, Von Herrn Hofrath Schwabe in Dessau.* **21**, 233 (1844).
11. M.N. Gnevyshev, *Solar Phys.* **51(1)**, 175 (1977).
12. S.M. Tarbeeva, V.B. Semikoz, and D.D. Sokoloff, *Astr. Reps.* **55(5)**, 456 (2011).
13. G. Ruediger and A. Brandenburg, *Astr. and Astrophys.* **296**, 557 (1995).
14. J.C. Butcher, *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations*, John Wiley and Sons (2016).
15. S.M. Stigler, *The History of Statistics: The Measurement of Uncertainty Before 1900*, Harvard University Press, Harvard (1986).
16. Л.Л. Кичатинов, А.А. Непомнящих, *Письма в Астрон. Ж.* **41(7)**, 409 (2015).