ЖЭТФ, 2023, том 163, вып. 4, стр. 561–573

НЕУСТОЙЧИВОСТИ В СЛУЧАЙНЫХ СРЕДАХ И РЕЖИМЫ С ОБОСТРЕНИЕМ

В. А. Куценко [a*], *Д. Д. Соколов* [b,c**], *Е. Б. Яровая* [a***]

[a] *Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет 119991, Москва, Россия*

[b] *Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, физический факультет 119991, Москва, Россия*

[c] *Институт земного магнетизма, ионосферы и распространения радиоволн Российской академии наук 108840, Троицк, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 23 октября 2022 г.,
после переработки 23 октября 2022 г.
Принята к публикации 19 декабря 2022 г.

Рассматривается система из частиц (бактерий) в среде, в которой скорости размножения и гибели случайно распределены в пространстве. В этой системе изучается рост средней численности частиц, который зависит от разности между скоростью деления и скоростью гибели, называемой случайным потенциалом. Показано, что если потенциал достаточно медленно убывает на бесконечности, то происходит взрывной рост числа бактерий и их средняя численность формально обращается в бесконечность сразу после начала эволюции системы. Кроме того, показано, что конечность средней численности бактерий для каждой конкретной реализации среды не гарантирует конечность средней численности бактерий при усреднении по всем реализациям среды. Наконец, описано поведение усредненной по среде средней численности бактерий для широкого класса потенциалов при больших временах.

DOI: 10.31857/S0044451023040132
EDN: MHLMNR

1. ВВЕДЕНИЕ

При развитии различных неустойчивостей в случайных средах возникают явления, существенно отличающиеся от того, с чем обычно приходится встречаться в статистической физике. В частности, оказывается, что, скажем, средняя энергия рассматриваемой величины растет медленнее, чем корень из среднего квадрата этой величины, а обе эти скорости роста, в свою очередь, больше, чем скорость роста типичной реализации изучаемой величины. Подобное явление получило название перемежаемости (см., например, [1]).

Более того, оказывается, что в стационарной в статистическом смысле случайной среде возбуждаемая величина может расти суперэкспоненциально, например, как $\exp(t \ln t)$. Пример такого поведения исследован, в частности, в работе [2], где рассмотрена модельная популяция бактерий. Интенсивность деления бактерий полагалась стационарной во времени и случайной по пространственным переменным, причем ее среднее значение было равно нулю. Кроме того, в модель включена диффузия бактерий. Подобный суперэкспоненциальный рост более известен для нелинейных уравнений, так что можно сказать, что случайность воспроизводит некоторые эффекты, обычно связанные с нелинейностью.

Цель настоящей работы — сделать еще один шаг в этом направлении и показать, что случайность может воспроизводить и более тонкие явления, обычно связываемые с нелинейностью, а именно, изучаемая величина может за конечное время обратиться в бесконечность. Подобное явление хорошо известно для нелинейных уравнений теплопроводности с энерговыделением, растущем при росте температуры. Подобные режимы принято называть режимами с обострением (см., например, [3]), а в контексте близкой авторам физической тематики, см. [4].

* E-mail: vlakutsenko@yandex.ru
** E-mail: sokoloff.dd@gmail.com
*** E-mail: yarovaya@mech.math.msu.su

В настоящей работе мы покажем, что режимы с обострением могут возникать и при развитии неустойчивостей в случайных средах. Для этого достаточно, чтобы случайное поле, от которого зависит развитие неустойчивости, достаточно часто принимало достаточно большие значения.

Конечно, развитие неустойчивости в случайной среде зависит от того, какая неустойчивость конкретно рассматривается, хотя явление перемежаемости носит общий характер. Для конкретности мы ограничимся рассмотрением простой модели из работы [2]. При построении наших примеров мы будем опираться на работы [5, 6], развивших идеи работы [2].

Конкретизация и обобщения результатов, полученных в рамках изучения рассматриваемой простой модели, проводились в различных направлениях, в частности, рассматривались неустойчивости в нестационарных случайных средах и другие сходные задачи (см., например, [7]). Непосредственно используемая нами модель востребована скорее не непосредственно в физике, а в различных естественных и гуманитарных науках, например, демографии, где ее, несмотря на очевидную упрощенность, часто рассматривают как реалистическую модель для распространения людей, и в биологии в аналогичных задачах (см., например, краткий обзор подобных работ в [8]). Отметим также очень раннюю работу Я.Б. Зельдовича по развитию неустойчивости в случайных средах, в которой во многом зародились подходы к этой проблеме [9].

2. МОДЕЛЬ СЛУЧАЙНОЙ СРЕДЫ

Следуя работе [2], мы будем описывать нашу задачу в дискретном приближении, не фиксируя внимания на тонких деталях строения распределения плотности популяции бактерий.

Предположим, что частицы (бактерии) передвигаются по целочисленной решетке $\mathbb{Z}^d$, $d \in \mathbb{N}$. Время полагается непрерывным. Пусть в начальный момент времени в некоторой точке $x \in \mathbb{Z}^d$ находилась одна частица. За малое время эта частица может остаться на месте, переместиться в соседний узел решетки, разделиться надвое или погибнуть. Эволюция ее потомков происходит по тому же закону, независимо друга от друга и от всей предыстории. Этот процесс объединяет ветвление и блуждание частиц, потому его называют ветвящимся случайным блужданием (ВСБ) [10, 11]. Опишем конкретно механизмы ветвления и блуждания.

В нашей модели интенсивности деления и гибели частиц являются случайными величинами и не зависят от времени. Формально мы будем обозначать через $V^+(x) := V^+(x,\omega)$ интенсивность деления частиц надвое, а через $V^-(x) := V^-(x,\omega)$ — интенсивность их гибели. Переменная ω подчеркивает случайность величин. Мы считаем, что пары интенсивностей в различных точках решетки независимы и одинаково распределены. Величину $V(x) := V(x,\omega) = V^+(x) - V^-(x)$ будем называть случайным потенциалом. Математическое ожидание, вычисленное по распределению этой случайной величины или, говоря более формально, по соответствующему вероятностному пространству $(\Omega_V, \mathcal{F}_V, \mathbb{P}_V)$, будем обозначать угловыми скобками $\langle\cdot\rangle$, детали см. в работе [10].

Введенный потенциал можно понимать как случайную среду на $\mathbb{Z}^d$, которая управляет процессом ветвления. Еще раз подчеркнем, что случайная среда стационарна, т.е. не зависит от времени, и поведение процесса определяется конкретной реализацией среды. Подобную реализацию $V(x,\omega)$ при некотором фиксированном ω будем называть «замороженной средой» [10]. В дальнейшем, чтобы упростить выкладки, переменную ω будем писать, только если хотим подчеркнуть зависимость от конкретной реализации среды.

Перемещение частиц по решетке в нашей модели управляется простым симметричным случайным блужданием, как в [5,6,10]. Частица, находящаяся в любой точке решетки, ждет время, распределенное по экспоненциальному закону с параметром $\varkappa > 0$, а затем равновероятно перемещается в одну из соседних точек решетки. Подобное случайное блуждание будем описывать дискретным лапласианом

$$(\varkappa\Delta f)(x) = \varkappa\frac{1}{2d}\sum_{|x'-x|=1}(f(x') - f(x)),$$

где $\varkappa > 0$ — коэффициент диффузии.

Соединим описанные механизмы ветвления в случайной среде и блуждания, описав эволюцию частицы в ВСБ в случайной среде. Для удобства введем среднее время ожидания в произвольной точке $x \in \mathbb{Z}^d$ как

$$\tau(x) := \left(\varkappa + V^+(x) + V^-(x)\right)^{-1}.$$

Эволюция частицы, находящейся в точке x, выглядит следующим образом. Частица ждет экспоненциально распределенное время с параметром $\tau(x)^{-1}$, а затем мгновенно умирает, делится надвое или перемещается равновероятно в одну из соседних точек решетки. Выбор одного из этих трех событий производится с соответствующими вероятностями $V^{-}(x)\tau(x)$, $V^{+}(x)\tau(x)$ и $\varkappa\tau(x)$.

ВСБ в случайной среде в момент времени t есть система частиц на $\mathbb{Z}^d$, а, значит, полностью описывается набором численностей частиц $\mu_t(y)$ в точках $y \in \mathbb{Z}^d$ в момент времени t. В наших предположениях $\mu_0(y) = \delta(x, y)$, где x — начальное положение первой частицы.

В замороженной среде $V(x, \omega)$, т.е. при фиксированном ω, эволюция частиц представляет собой стохастический процесс, а потому численность частиц в каждой точке $\mu_t(y) = \mu_t(y, \omega)$ есть случайная величина. Численность частиц является сложным объектом, потому в этой работе мы остановимся на изучении первого момента, т.е. средней численности частиц, как в [5]. Для замороженной среды средние численности частиц в точке $y \in \mathbb{Z}^d$ при условии старта процесса в точке x называются «замороженными» (quenched moments, см., например, [5]) и вычисляются усреднением по реализациям ВСБ в этой среде:

$$m_1(t, x, y) := m_1(t, x, y, \omega) = \mathbb{E}_x \mu_t(y, \omega).$$

Заметим, что из локальных средних численностей частиц в точке y в момент времени t можно получить средние численности частиц в произвольной области $A \subseteq \mathbb{Z}^d$ при помощи суммирования:

$$m_1(t, x, A) := \sum_{y \in A} m_1(t, x, y).$$

В том числе, можно исследовать численность частиц на всей решетке:

$$m_1(t, x, \mathbb{Z}^d) := \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} m_1(t, x, y).$$

Каждой замороженной среде соответствует свой набор замороженных средних $m_1(t, x, y)$. В нашей модели среда случайна, поэтому замороженные моменты — тоже случайные величины. Вновь, случайные величины сложно изучать напрямую, и мы будем усреднять их, но в этот раз — по реализациям среды. Усредненные по среде моменты по устоявшейся терминологии называются «отожжеными» (annealed moments, см., например, [5]) и обозначаются следующим образом: $\langle m_1(t, x, y) \rangle$.

3. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ТИПА ФЕЙНМАНА–КАЦА

Можно показать (см., например, [10]), что замороженные средние численности частиц $m_1(t, x, y)$ в ВСБ удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} \frac{\partial m_1(t, x, y)}{\partial t} &= \varkappa \Delta m_1(t, x, y) + V(x, \omega) m_1(t, x, y), \\ m_1(0, x, y) &= \delta(x, y). \end{aligned} \tag{1}$$

Рассмотренное уравнение есть дискретный аналог уравнения теплопроводности со случайным энерговыделением.

Как показано в работе [2], эволюция поля замороженных средних $m_1(t, x, y)$ в рамках задачи (1) может быть изучена с помощью интеграла по случайным траекториям, т.е. с помощью формулы типа Фейнмана–Каца:

$$m_1(t, x, y, \omega) = \mathbb{E}_x \left[\exp\left\{ \int_0^t V(x_s, \omega)\, \mathrm{d}s \right\} \delta(x_s, y) \right], \tag{2}$$

где x_s — случайное блуждание с генератором $\varkappa\Delta$, а математическое ожидание $\mathbb{E}_x$ вычисляется для траекторий случайного блуждания при условии старта в точке x.

Представление (2) можно интерпретировать следующим образом. Фиксируем замороженную среду, соответствующую некоторому ω. Блуждание x_s начинается в точке x и имеет единичную «массу». Далее, в каждой точке z, в которую попадает случайное блуждание, «масса» увеличивается в $\exp(V(z)\,\tau(z))$ раз, где $\tau(z)$ — время пребывания в этой точке. Блуждание останавливается в момент времени t. Если оно оказалось не в точке y, то его масса зануляется. Решение $m_1(t, x, y)$ представляет собой усреднение полученных «масс» по всем траекториям блуждания x_s. Эта интерпретация позволяет говорить о представлении (2) и, соответственно, о задаче (1), как о «случайном блуждании в случайном потенциале», см., например, [12].

Важный результат, доказанный в [5], гласит, что представление (2) задает решение задачи (1) тогда и только тогда, когда оно конечно. Если представление (2) для $m_1(t, x, y)$ обращается в бесконечность, то мы не можем говорить о конечности средней численности частиц в ВСБ. То есть численность частиц в ВСБ настолько неоднородна, что не может быть описана средним.

Напомним, что в некотором эксперименте «выполнение утверждения почти наверное» значит, что вероятность исходов эксперимента, для которых утверждение выполнено, равна единице. Конечность замороженных моментов $m_1(t, x, y)$ для почти наверное каждой замороженной среды не гарантирует конечность усреднения по всем средам

$\langle m_1(t,x,y)\rangle$. Например, распределение замороженных моментов может иметь в каком-то смысле «тяжелые хвосты» и, соответственно, не иметь математического ожидания. «Хвостом» мы по умолчанию будем называть участок плотности потенциала, уходящий в плюс бесконечность. В разд. 6 будет показано, что уже экспоненциально распределенный потенциал порождает распределение замороженных моментов, не имеющее конечного среднего. Отсутствие отожженного среднего при наличии замороженных показывает, что, хотя в каждой конкретной среде описание средними численностями имеет смысл, поведение модели «в целом» не описывается средними характеристиками.

Задача следующих разделов — выяснить условия, при которых отожженые и замороженные средние обращаются в бесконечность, а также описать поведение отожженного среднего, если оно конечно. В этих разделах мы будем опираться на методы, развитые в работах [5, 10].

4. УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ СРЕДНИХ ЧИСЛЕННОСТЕЙ ДЛЯ НЕСЛУЧАЙНОГО ПОТЕНЦИАЛА

Для начала рассмотрим более простой случай неслучайного потенциала, который ограничен снизу. То есть будем предполагать, что интенсивности размножения и гибели частиц не являются случайными величинами. Потенциал вновь есть разность между интенсивностью деления и интенсивностью смерти частиц каждой точке решетки.

Если потенциал $V(x)$ ограничен сверху некоторой константой $C\in\mathbb{R}$, то представление Фейнмана–Каца (2) для любого $t>0$ ограничено:

$$m_1(t,x,y)=\mathbb{E}_x\left[\exp\left\{\int\limits_0^t V(x_s)\,\mathrm{d}s\right\}\delta(x_s,y)\right]\leqslant$$
$$\leqslant\mathbb{E}_x\left[\exp\left\{\int\limits_0^t C\mathrm{d}s\right\}\right]=\exp\{Ct\}.$$

Таким образом, решение конечно для любого $t>0$, каким бы ни был ограниченный потенциал V.

Теперь рассмотрим случай неограниченного сверху потенциала и объясним, как представление (2) может оказаться бесконечным. Главное свойство неограниченного потенциала — возможность принимать все бо́льшие и бо́льшие значения при удалении от стартовой точки x. Зафиксируем бесконечную последовательность $\{x,x_1,x_2,...\}$, такую что на ней потенциал неограниченно возрастает:

$$\lim_{i\to\infty}V(x_i)=\infty.$$

Заметим, что этот предел берется по решетке и никак не зависит от времени t.

Зафиксируем произвольно момент времени $t_0>0$. Случайное блуждание за время t_0 может «убежать» сколь угодно далеко от стартовой точки x. Потому существует некоторое семейство траекторий блуждания $\mathcal{T}(x_i)$, стартовавших в точке x и находящихся в точке x_i все время с $t_0/2$ до t_0. Каждая отдельная траектория из $\mathcal{T}(x_i)$, стоя в точке x_i время $t_0/2$, набирает массу, зависящую от $V(x_i)$. Таким образом, чем больше i, тем больше «масса» каждой траектории, причем предел этой «массы» при $i\to\infty$ бесконечен. Так что рост «массы» семейства $\mathcal{T}(x_i)$ потенциально неограничен и может «взорвать» представление Фейнмана–Каца.

Однако заметим, что траектории из семейства $\mathcal{T}(x_i)$ — это редкие траектории и вероятность выбрать их среди всех возможных траекторий стремится к нулю при удалении от стартовой точки, т.е. при $i\to\infty$. Соревнование между падением «вероятности» семейства $\mathcal{T}(x_i)$ и ростом «массы» $\mathcal{T}(x_i)$ и определяет, сможет ли блуждание в представлении (2) набрать бесконечную «массу» в момент времени t_0, т.е. будет ли само представление конечно.

Это соревнование можно описать количественно с помощью оценок, см. лемму 2.4 в работе [5]. Оказывается, что вероятность того, что случайное блуждание $\varkappa\Delta$ за время t уйдет от стартовой точки на расстояние, большее r, убывает быстрее экспоненты:

$$\mathbb{P}_x(\max_{s\in[0,t]}|x_s|\geqslant r)\leqslant\exp\{-r\ln r+O(r)\}. \qquad (3)$$

Заметим, что главный член асимптотики в правой части не зависит от t, $\varkappa$ и размерности d.

Естественно ожидать, что, если $V(x)$ растет быстрее, чем $x\ln x$, то рост $\exp\{V(x)\}$ «обгонит» спад блуждания и интересующее нас решение обратится в бесконечность. Более точно, ожидается, что конечность или бесконечность представления Фейнмана–Каца определяется конечностью или бесконечностью предела

$$\lim_{|x|\to\infty}\sup\frac{V(x)}{|x|\ln|x|}, \qquad (4)$$

где $|\cdot|$ — L_1-метрика на $\mathbb{Z}^d$, равная сумме модулей координат x.

Формальные оценки (см. лемму 1 в Приложении) отчасти подтверждают это ожидание. А именно, если предел (4) неотрицателен, то представление (2) конечно; если предел (4) не существует, то представление (2) бесконечно. Если же рассматриваемый предел конечный и положительный, то в общем случае ничего сказать нельзя. Отдельно заметим, что конечность и бесконечность утверждаются сразу для всех $t > 0$.

Например, в случае одномерной решетки для неслучайного потенциала $V(x) = |x|$ предел (4) равен нулю, а, значит, неотрицательное решение задачи (1) существует, единственно и задается соответствующим представлением Фейнмана–Каца. Для неслучайного потенциала $V(x) = |x|^2$ предел (4) обращается в бесконечность, соответственно, интеграл Фейнмана–Каца обращается в бесконечность и неотрицательных решений уже нет. С точки зрения ВСБ, этот случай означает, что численность частиц столь неоднородна, что не имеет среднего.

5. УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ ЗАМОРОЖЕННЫХ СРЕДНИХ ЧИСЛЕННОСТЕЙ ДЛЯ СЛУЧАЙНОГО ПОТЕНЦИАЛА

В данном разделе мы покажем, как перейти от результатов для неслучайного потенциала к результатам для случайного потенциала. Для удобства мы будем формулировать результаты для абсолютно непрерывных случайных потенциалов с плотностью f_V. Для случая дискретных потенциалов все утверждения аналогичны.

Рассмотрим случайный потенциал, ограниченный снизу. Заметим, что для замороженный потенциал $V(x,\omega)$ можно рассматривать как неслучайный потенциал. В таком случае, если для некоторого случайного потенциала почти все его реализации имеют неположительный предел (4), то для них будет существовать единственное решение задачи (1).

При подобной постановке вопроса кажется возможным существование случайных потенциалов, таких что для некоторых их реализаций предел выше существует, а для некоторых — нет. Однако в работе [5] показано, что если

$$\int_2^\infty \frac{x^d}{(\ln x)^d} f_V(x) < \infty, \tag{5}$$

то предел (4) почти наверное неположителен, в противном случае — почти наверное предел бесконечен.

Таким образом, ответ прост: если правый хвост потенциала достаточно легок в смысле (5), то задача (1) почти наверное имеет единственное неотрицательное решение. Мало того, если условие (5) нарушено, то задача (1) почти наверное не имеет единственных неотрицательных решений.

Семейство распределений со степенными хвостами часто используется на практике. Например, в математической статистике используется распределение Стьюдента, в экономике — распределение Парето, а в лингвистике — закон Ципфа. Простейший пример возникновения степенного закона в физике — распределение Коши, появляющееся в эксперименте с отражением луча света от зеркала, повернутого на случайный угол. Краткий обзор зависимостей в различных областях физики, которые описываются семейством распределений со степенными хвостами можно найти, например, в работе [13].

Распределения со степенным хвостом имеют «тяжелый» правый хвост и способны порождать высокие «пики», что может привести к «взрыву» представления Фейнмана–Каца [5]. Например, одномерный потенциал с плотностью

$$f_V(x) = \begin{cases} 2/x^2, & x > 2, \\ 0, & x \leqslant 2, \end{cases}$$

не удовлетворяет условию (5):

$$\int_2^\infty \frac{x}{\ln x}\frac{2}{x^2} = \int_2^\infty \frac{2}{x \ln x} = \infty.$$

Таким образом, задача Коши (1) в этом случае не имеет неотрицательных решений, а соответствующее ВСБ не допускает описания при помощи замороженных средних $m_1(t,x,y)$.

До этого момента утверждения данного раздела сформулированы только для ограниченного снизу потенциала. Ограниченность снизу позволяла считать, что у потенциала нет точек с нехарактерно низким потенциалом, так называемых «ям». Если же потенциал неограничен снизу, то по мере удаления от стартовой точки могут появляться все более глубокие «ямы». Потенциально они могут уничтожить бóльшую часть частиц и, тем самым, уберечь представление типа Фейнмана–Каца от набора бесконечной «массы» за конечное время.

Оказывается, что такой эффект возможен только на решетке $\mathbb{Z}^1$, так как в этом случае при движении на бесконечность блуждание обязано пройти по всем образовавшимся ямам, без возможности их обойти. На решетке размерности 2 и выше блуждание может обойти отрицательные ямы, тем самым взорвав представление (2), подробнее см. замечание на стр. 629 в работе [5].

Таким образом, для произвольного потенциала в любых размерностях выполнение условия (5) по-прежнему гарантирует существование единственного решения. В размерностях 2 и выше это условие является необходимым и достаточным.

Как установлено в работе [5], в случае размерности 1 при невыполнении условия (5) необходимо проверить существование достаточно глубоких «ям» потенциала при помощи следующего условия:

$$\int\limits_{-\infty}^{-2} \ln|x| f_V(x) < \infty. \tag{6}$$

Если условие (6) выполнено, то «ям» нет, соответственно, представление (2) бесконечно и неотрицательных решений нет. Однако, если левый хвост потенциала достаточно тяжел и интеграл (6) расходится, то общего ответа нет.

В первом примере этого раздела потенциал имел тяжелый правый хвост, что приводило к «взрыву» представления Фейнмана–Каца. Добавим этому потенциалу тяжелый левый хвост, чтобы породить «ямы», которые уменьшат рост средних численностей частиц. Рассмотрим размерность 1 и следующую плотность потенциала:

$$f_V(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & x > 2, \\ 0, & x \in [-2, 2], \\ \frac{\log 2}{2} \frac{1}{|x| \ln^2 |x|}, & x \leqslant -2. \end{cases}$$

Проверим условие (6):

$$\int\limits_{-\infty}^{-2} \ln(|x|) \frac{\log 2/2}{|x| \ln^2 |x|} = \int\limits_{2}^{\infty} \ln x \frac{\log 2/2}{x \ln^2 x} = \infty.$$

То есть условие нарушено, и, потенциально, для такого $V(x)$ может существовать единственное решение задачи (1). Чтобы в этом убедиться, необходимо сделать прямую оценку представления типа Фейнмана–Каца. Подобная оценка проведена в работе [5], где показано, что представление Фейнмана–Каца будет конечным для любых (x, t).

Подведем итог разд. 5. Задача (1) имеет смысл не для всех потенциалов. В частности, если потенциал имеет степенной хвост вида $1/x^k$, $k \geqslant 3$, то в размерности $(k-1)$ задача (1) не имеет неотрицательных решений для $t > 0$, а соответствующее ВСБ не допускает описание при помощи замороженных средних численностей частиц для $t > 0$.

6. УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ ОТОЖЖЕННЫХ СРЕДНИХ ЧИСЛЕННОСТЕЙ ДЛЯ СЛУЧАЙНОГО ПОТЕНЦИАЛА

В предыдущих разделах мы описали условия на потенциал $V(x, \omega)$, при которых существует решение задачи (1) для почти наверное каждой реализации случайного потенциала. Однако даже если замороженные моменты $m_1(t, x, y, \omega)$ конечны для каждой реализации среды ω, $m_1(t, x, y, \omega)$ как случайная величина может не иметь математического ожидания.

Рассмотрим этот случай более подробно. Заметим, что каждое замороженное среднее $m_1(t, x, y, \omega)\rangle$ включает в себя траектории из представления Фейнмана–Каца, которые стоят в стартовой точке x все время $[0, t]$. Вероятность «выбрать» такую траекторию равна $\exp\{-\varkappa t\}$ в силу экспоненциальности времени между скачками. Тогда верна оценка

$$\langle m_1(t, x, y, \omega)\rangle \geqslant \left\langle e^{-\varkappa t} \mathbb{E}_x \exp\left\{ \int\limits_0^t V(x_s, \omega) ds \right\} \right\rangle,$$

причем последний интеграл берется по траекториям, остающимся в нуле время $[0, t]$. Поэтому $V(x_s) = V(0)$ и случайности внутри $\mathbb{E}_x(\cdot)$ нет. Для удобства обозначим $V = V(0)$ и продолжим:

$$\langle m_1(t, x, y, \omega)\rangle \geqslant \left\langle e^{-\varkappa t} e^{Vt} \right\rangle = e^{-\varkappa t} \left\langle e^{Vt} \right\rangle.$$

Из этой оценки вытекает, что $\langle m_1(t, x, y, \omega)\rangle$ конечен, только если конечно $\left\langle e^{Vt} \right\rangle$. Оказывается, что для потенциала V, имеющего экспоненциальное распределение, математическое ожидание по среде $\left\langle e^{Vt} \right\rangle$ конечно только конечное время t_0. Иными словами, экспоненциально распределенный потенциал порождает настолько неоднородные реализации сред, что описывать поведение системы усреднением по средам можно только лишь конечное время $[0, t_0)$.

Экспоненциальное распределение является в некотором смысле пограничным для величины $\left\langle e^{Vt} \right\rangle$. А именно, для распределений V с хвостами, которые легче, чем хвосты у экспоненциального распределения, верно

$$\left\langle e^{Vt} \right\rangle < \infty. \tag{7}$$

В то же время для распределений V с хвостами тяжелее, чем у экспоненциального, $\left\langle e^{Vt} \right\rangle$ обращается в бесконечность для всех $t > 0$. Наконец, для экспоненциального распределения величина $\left\langle e^{Vt} \right\rangle$ конечна некоторое конечное время, а затем обращается в бесконечность.

Разумеется, интересно узнать оценку сверху для $\langle m_1(t,x,y,\omega)\rangle$, поскольку одной оценки снизу недостаточно, чтобы утверждать конечность $\langle m_1(t,x,y,\omega)\rangle$. Для этого необходимо отдельно рассмотреть два вида моментов: локальный $\langle m_1(t,x,y)\rangle$ и глобальный $\langle m_1(t,x,\mathbb{Z}^d\rangle$.

Для глобального момента и произвольного распределения потенциала V точные оценки получены еще в работе [5] и выглядят следующим образом:

$$e^{-\varkappa t}\left\langle e^{Vt}\right\rangle \leqslant \left\langle m_1(t,x,\mathbb{Z}^d)\right\rangle \leqslant \left\langle e^{Vt}\right\rangle. \qquad (8)$$

То есть $\left\langle e^{Vt}\right\rangle$ является ограничением и сверху, и снизу с точностью до неслучайного множителя.

С помощью оценки (8) мы получаем поведение первого отожженного момента при больших временах:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\ln\left\langle m_1(t,x,\mathbb{Z}^d)\right\rangle}{\ln\langle\exp\{Vt\}\rangle}=1. \qquad (9)$$

Эта форма записи удобна: она окончательно связывает конечность отожженного момента с конечностью $\left\langle e^{Vt}\right\rangle$.

Выражение (9) позволяет грубо оценить скорость роста отожженных моментов. Например, если V имеет стандартное нормальное распределение, то $\ln\langle\exp\{Vt\}\rangle = t^2/2$. Следовательно $\left\langle m_1(t,x,\mathbb{Z}^d)\right\rangle$ растет с суперэкспоненциальной скоростью $\exp\{t^2/2\}$.

В случае локальных моментов условие конечности отожженных моментов не меняется — конечность $\langle m_1(t,x,y)\rangle$ вновь равносильна условию (7). Однако вывод выражения типа (9) более сложен. В частности, нет результатов для случая потенциала с произвольным распределением. Однако можно выделить два достаточно общих семейства потенциалов, которые покрывают практически все случаи, используемые в прикладных задачах.

Первое семейство потенциалов, «граница» которого представляет собой экспоненциальное распределение, рассмотрено в работе [10]. Это потенциалы с асимптотически экспоненциальным, так называемым «вейбулловским» хвостом: для их функции распределения $F(z)$ верно

$$\lim_{z\to\infty}\frac{-\ln\left(1-F(z)\right)}{cz^{\alpha}}=1, \quad c>0, \quad \alpha>1.$$

В случае потенциала из этого семейства соотношение (9) принимает следующий вид:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\ln\langle m_1(t,x,y)\rangle}{t^{\alpha/(\alpha-1)}}=1. \qquad (10)$$

Нормальное распределение входит в семейство потенциалов с вейбулловским хвостом. В частности, для потенциала, подчиняющегося стандартному нормальному распределению? константы равны $\alpha=2$, $c=-1/2$. Потому порядок роста $\langle m_1(t,x,y)\rangle$ будет равен $\exp\{t^2/2\}$, что совпадает с ранее вычисленной скоростью роста $\left\langle m_1(t,x,\mathbb{Z}^d)\right\rangle$. Получается, что скорость роста средней численности частиц на всей решетке совпадает с ранее вычисленной скоростью роста средней численности частиц в отдельной точке.

Второе семейство потенциалов получается взятием логарифма от первого семейства и содержит потенциалы с очень легкими, так называемыми «гумбелевскими» хвостами [14], которые встречаются в теории экстремумов. Для их функции распределения $F(z)$ верно

$$\lim_{z\to\infty}\frac{-\ln\left(1-F(z)\right)}{c\exp\{z\alpha\}}=1, \;\; c>0, \;\; \alpha>1.$$

Доказательство результатов для этого семейства приведено в леммах 2–4 раздела Приложение. Для потенциалов из этого семейства соотношение (9) принимает следующий вид:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\ln\langle m_1(t,x,y)\rangle}{\alpha^{-1}t\ln t}=1. \qquad (11)$$

Из выражений (10) и (11) можно заметить, что чем легче хвосты потенциала, тем скорость роста ближе к экспоненциальной. Возникает вопрос: существует ли потенциал, такой что скорость роста отожженого среднего была порядка e^{Ct}? Оказывается, любой потенциал, ограниченный сверху константой C, обладает следующим свойством:

$$\lim_{t\to\infty}\ln\langle\exp\{Vt\}\rangle/t=C.$$

Поэтому для ограниченного потенциала из результата (9) следует, что скорость роста отожженного момента равна e^{Ct}.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сформулируем еще раз полученные результаты. Для того чтобы не перегружать статью математическими выкладками, мы не стремились воспроизвести начальные этапы развития популяции частиц (бактерий). Асимптотический рост средней численности частиц в описанной нами системе зависит только от асимптотического поведения правого хвоста потенциала. В частности, если потенциал достаточно медленно убывает на бесконечности, то происходит взрывной рост числа бактерий и их средняя численность формально обращается в бесконечность. Кроме того, мы показали, что конечность средней численности бактерий для каждой конкретной реализации среды не гарантирует конечность средней численности бактерий при усреднении по самой среде. В частности, для потенциала с экспоненциальным правым хвостом усреднение средней численности существует только конечное время, а затем обращается в бесконечность. Новым результатом в этой области стала предельная теорема 1 для потенциала с гумбелевским правым хвостом.

Мы полагаем, что «взрыв» средних численностей можно устранить за счет нестационарности среды. Однако строгие исследования подобной системы с нестационарной случайной средой на конец 2022 года нам неизвестны. Первые результаты в этой области получены в диссертационной работе [15], которая, однако, пока не опубликована в рецензируемом журнале.

Построенные нами примеры формально связаны с задачей о поведении популяции бактерий, но представляется, что подобные же явления могут развиваться при подходящих условиях и при развитии других неустойчивостей в случайной среде. Как и в других случаях, формальное обращение решения в бесконечность свидетельствует об ограниченной применимости модели. Проще всего считать, что в реальных приложениях взрывной рост популяции ограничивается конечностью ресурсов среды. А именно, рост числа бактерий ограничивается тогда, когда они съедают практически всю пищу. Как и в других задачах о развитии неустойчивости в случайных средах, полученные результаты вызывают определенные жизненные аллюзии, к которым хочется относиться с осторожностью при непосредственном проектировании результатов на окружающую реальность.

Финансирование. Работа В.К. и Е.Я. поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант № 20-01-00487).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Рассмотрим задачу Коши для неслучайного ограниченного снизу потенциала $f(x)$:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial m_1(t,x,y)}{\partial t} = \varkappa\Delta m_1(t,x,y) + f(x)m_1(t,x,y), \\ &m_1(0,x,y) = \delta(x,y). \end{aligned} \tag{12}$$

Представление типа Фейнмана–Каца для решения задачи (12) выглядит так:

$$m_1(t,x,y) = \mathbb{E}_x\left[\exp\left\{\int_0^t f(x_s)\,\mathrm{d}s\right\}\delta(x_s,y)\right], \tag{13}$$

где x_s — случайное блуждание с генератором $\varkappa\Delta$, а математическое ожидание $\mathbb{E}_x$ вычисляется для траекторий случайного блуждания при условии старта из точки $x \in \mathbb{Z}^d$.

Напомним, что единственное неотрицательное решение задачи (12) существует тогда и только тогда, когда представление (13) конечно, см. разд. 3. Сформулируем лемму, которая связывает конечность представления (13) со скоростью возрастания функции $f(x)$ на $\mathbb{Z}^d$. Эта лемма была доказана в работе [5] сразу для случая случайного потенциала. Мы пользуемся схемой доказательства из [5], но рассматриваем неслучайный потенциал.

Лемма 1. Для представления типа Фейнмана–Каца (13) решения задачи Коши (12) верно следующее:

a) если
$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x\ln x} \leqslant 0,$$
то (13) конечно для всех (x,t);

b) если
$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x\ln x} = \infty,$$
то (13) бесконечно для всех (x,t).

Доказательство пункта а). В силу оценки сверху

$$\begin{aligned} m_1(t,x,y) = \mathbb{E}_x\left[\exp\left\{\int_0^t f(x_s)\,\mathrm{d}s\right\}\delta(x_s,y)\right] \leqslant \\ \leqslant \mathbb{E}_x\left[\exp\left\{\int_0^t f(x_s)\,\mathrm{d}s\right\}\right] \end{aligned}$$

достаточно доказать конечность последнего интеграла.

Зафиксируем произвольно момент времени t. Рассмотрим семейство траекторий x_s, которые не успели убежать за время t дальше, чем на расстояние n от старта, т.е. $\max_{s\in[0,t]}|x_s| = n$, где $|\cdot|$ — L_1 норма. Вклад каждой такой траектории в представление Фейнмана–Каца не больше вклада траектории, которая сразу прыгнула в точку из куба $|x| \leqslant n$ с самым большим потенциалом и оставалась там все время $(0,t]$. Этот вклад равен $\exp\{t\max_{|x|\leqslant n} f(x)\}$. Таким образом, получаем

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_x\left[\exp\left\{\int_0^t f(x_s)\,\mathrm{d}s\right\}\right] \leqslant \\ \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} P_x(\max_{s\in[0,t]}|x_s| = n)\exp\{t\max_{|x|\leqslant n} f(x)\}. \end{aligned}$$

В лемме 2.4 работы [5] выражение $P_x(\max_{s\in[0,t]}|x_s| \geqslant n)$ было оценено сверху как $\exp\{-n\ln n + O(n)\}$ при $n \to \infty$. Пользуясь этой оценкой, рассмотрим некоторое n_0, начиная с которого

$$P_x(\max_{s\in[0,t]}|x_s| = n) \leqslant \exp\{-n\ln n + Cn\}$$

для некоторой константы C.

Пользуясь условием

$$\frac{\lim_{x\to\infty} f(x)}{x\ln x} \leqslant 0,$$

выберем n_1, так что для $n > n_1$ выражение $\max_{|x|\leqslant n} f(x)/n\ln n$ лежит в отрезке $(-\infty;\varepsilon]$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Заметим, что можно взять сколь угодно близкое к нулю ε.

Пользуясь двумя предыдущими рассуждениям, рассмотрим $n_2 := \max(n_0, n_1)$. Для n_2 верно

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_x(\max_{s\in[0,t]}|x_s| = n)\exp\{t\max_{|x|\leqslant n} f(x)\} \leqslant$$
$$\leqslant \mathrm{C}_1 + \sum_{n=n_2}^{\infty}\exp\{-n\ln n + Cn\}\exp\{t\max_{|x|\leqslant n} f(x)\} =$$
$$= \mathrm{C}_1 + \sum_{n=n_2}^{\infty}\exp\left\{-n\ln n\left(1-\frac{C}{\ln n} - t\frac{\max\limits_{|x|\leqslant n} f(x)}{n\ln n}\right)\right\} \leqslant$$
$$\leqslant \mathrm{C}_1 + \sum_{n=n_2}^{\infty}\exp\left\{-n\ln n\left(1-\frac{C}{\ln n} - t\varepsilon\right)\right\},$$

где C_1 — константа, отвечающая конечной сумме от 0 до n_2.

Для каждого фиксированного t мы можем выбрать такое n_1, чтобы $C_3 := 1 - C/\ln n_1 - t\varepsilon$ было бы строго больше нуля. Тогда исследуемый ряд ограничивается сверху сходящимся рядом:

$$\mathrm{C}_1 + \sum_{n=n_2}^{\infty}\exp\left\{-n\ln n\left(1-\frac{C}{\ln n} - t\varepsilon\right)\right\} <$$
$$< \mathrm{C}_1 + \sum_{n=n_2}^{\infty}\exp\{-C_3 n\ln n\} < \infty.$$

Из представленной цепочки неравенств слудет, что исходное представление типа Фейнмана–Каца $m_1(t,x,y)$ ограничено сходящимся рядом для любого фиксированного $t > 0$ и $x \in \mathbb{Z}^d$ и пункт a) доказан.

Доказательство пункта b). Если супремум средних по траекториям, стартующих из нуля бесконечен,

$$\sup_{y\in\mathbb{Z}^d} \mathbb{E}_0\left[\exp\left\{\int_0^t f(x_s)\,\mathrm{d}s\right\}\delta(x_t, y)\right] = \infty, \qquad (14)$$

то общее представление типа Фейнмана–Каца также расходится:

$$\mathbb{E}_x\left[\exp\left\{\int_0^t f(x_s)\,\mathrm{d}s\right\}\delta(x_t, y)\right] = \infty. \qquad (15)$$

Доказательство этого факта технически громоздкое, в точности повторяет рассуждение на стр. 628 работы [5] и, в связи с этим, здесь не приводится.

Напомним, что f ограничена снизу, и пусть $f(x) > \alpha$, $\alpha < 0$. В силу условия пункта b), мы можем выбрать путь, состоящий из $n+1$ шагов, из нуля в y_n, такой что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(y_n)}{|y_n|\ln|y_n|} = \infty. \qquad (16)$$

Рассмотрим семейство траекторий блуждания, которые проходят в точности путь $\{0, y_1, \ldots, y_n\}$, достигают точки y_n за время $t/2$ и оставшееся время стоят в y_n. Оценим минимальный вклад этого семейства в математическое ожидание из формулы (14):

$$\mathbb{E}_0\left[\exp\left\{\int_0^t f(x_s)\,\mathrm{d}s\right\}\delta_{y_n}(x_t)\right] \qquad (17)$$

Вначале оценим приросты «массы» траекторий из рассматриваемого семейства. В силу ограниченности потенциала снизу, прирост «массы» за $[0, t/2]$, в каждой точке больше $\exp\{\alpha t/2\}$. Прирост «массы» в последней точке равен $\exp\{f(y_n)t/2\}$. Итоговая оценка снизу прироста «массы» составит

$$\exp\{\alpha t/2 + f(y_n)t/2\}. \qquad (18)$$

Теперь оценим вероятность «выбрать» траекторию семейства. Вероятность выбора пути $\{0, y_1, \ldots, y_n\}$ в пространстве равна $(1/2d)^n$. Количество прыжков за время t имеет пуассоновское распределение с параметром $\varkappa t$, потому вероятность получить ровно n скачков за время $t/2$ равна

$$P(n_{t/2}) = \frac{(\varkappa t)^n}{n!}\exp\{-\varkappa t\}.$$

Пользуясь формулой Стирлинга для $n!$, получим

$$P(n_{t/2}) \geqslant \exp\{-n\ln n + O(n)\}.$$

Наконец, вероятность, того, что траектория осталась стоять в точке y_n все время $t/2$ в силу экспоненциальности времени между скачками равна $\exp\{-\varkappa t/2\}$. Итоговая оценка снизу вероятности семейства траекторий равна

$$\left(\frac{1}{2d}\right)^n \exp\{-n\ln n - \varkappa t/2\}. \tag{19}$$

Объединим оценки (18) и (19):

$$\mathbb{E}_0\left[\exp\left\{\int_0^t f(x_s)\,\mathrm{d}s\right\}\delta_{y_n}(x_t)\right] \geqslant$$
$$\geqslant \exp\{\alpha t/2 + f(y_n)t/2 - n\ln(2d) - n\ln n - \varkappa t/2\} =$$
$$= \exp\{f(y_n)t/2 - n\ln n + O(n)\} =$$
$$= \exp\left\{-n\ln n\left(1 - \frac{t}{2}\frac{f(y_n)}{n\ln n} + O\left(\frac{1}{\ln n}\right)\right)\right\}.$$

Согласно предположению (16), полученное выражение не ограничено при $n \to \infty$ для любых (x,t). Поэтому супремум (14) равен бесконечности. Следовательно, исходное представление типа Фейнмана–Каца (17) бесконечно и лемма доказана.

Обобщение результатов работы [10] на случай произвольного семейства случайных потенциалов делается при помощи доказательства аналогов лемм 6.2, 6.3 и 6.4 из работы [10] . Мы докажем только результаты, требуемые для первого отожженного момента: аналог леммы 6.2 в виде лемм 2 и 3 и аналог леммы 6.3 в виде леммы 4.

Здесь и далее выражение $f(x) \sim g(x)$ означает, что $\lim_{x\to\infty} f(x)/g(x) = 1$. Для случайной величины $V(x)$ с функцией распределения $F(x)$ будем называть хвостовой функцией $S(x)$ дополнение к функции распределения: $S(x) := 1 - F(x)$. Введем обозначения: $M(t) := \langle e^{Vt}\rangle$ и $G(t) := \ln M(t)$.

Лемма 2. Пусть ξ — абсолютно непрерывная случайная величина с хвостовой функцией

$$S(x) = e^{-ce^{\alpha x}}, \quad c > 0, \quad \alpha \geqslant 1.$$

Тогда $G(t)$ имеет следующее асимптотическое представление:

$$G(t) \sim \alpha^{-1} t\ln t, \quad t \to \infty.$$

Доказательство. Найдем представление функции $M(t)$ через хвостовую функцию $S(x)$:

$$M(t) = \langle e^{\xi t}\rangle = \int_{\mathbb{R}} e^{tx}dF = -\int_{\mathbb{R}} e^{tx}d(1-F) =$$
$$= -\int_{\mathbb{R}} e^{tx}dS = -Se^{tx}\Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{\mathbb{R}} S(x)d\left(e^{tx}\right).$$

Используя монотонное убывание $S(x)$, получим

$$M(t) = t\int_{\mathbb{R}} S(x)e^{tx}dx = t\int_{\mathbb{R}} e^{tx - ce^{\alpha x}}dx. \tag{20}$$

Рассуждение, которое мы применим далее, приводит к методу Лапласа, если изначально функция $S(x)$ более простая, например $\ln S(x) = x^a$, $a > 1$ [10, 16]. В нашем случае использовать метод Лапласа напрямую не получится и придется полностью повторить рассуждение.

Для простоты выкладок положим $c = 0$ и $\alpha = 1$. Разложим функцию $tx - e^x$ в ряд Тейлора в окрестности ее точки максимума $x^* = \ln t$:

$$tx - e^x = tx^* - e^{x^*} - \frac{1}{2}e^{x^*}(x - x^*)^2 - \sum_{k=3}^{\infty} e^{x^*}\frac{(x-x^*)^k}{k!}.$$

Подставим в предыдущее выражение $x^* = \ln t$:

$$tx - e^x = t\ln t - t - \frac{1}{2}t(x - \ln t)^2 - t\sum_{k=3}^{\infty}\frac{(x-\ln t)^k}{k!}.$$

Таким образом, получим

$$M(t) = t\int_{\mathbb{R}} e^{tx - e^x}dx =$$
$$= te^{t\ln t - t}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}t(x-\ln t)^2 - t\sum\limits_{k=3}^{\infty}\frac{(x-\ln t)^k}{k!}}dx. \tag{21}$$

Исследуем правый интеграл, сделав замену $z = \sqrt{t}(x - \ln t)$:

$$\int_{\mathbb{R}} \exp\left\{\frac{1}{2}t(x-\ln t)^2 - t\sum_{k=3}^{\infty}\frac{(x-\ln t)^k}{k!}\right\}dx =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{t}}\int_{\mathbb{R}} \exp\left\{-\frac{1}{2}z^2\right\}\exp\left\{-\sum_{k=3}^{\infty}\frac{z^k t^{\frac{k-2}{2}}}{k!}\right\}dx.$$

Последний интеграл исследован в разд. 2.5 работы [16], где показано, что он есть $1 + O\left(\frac{1}{t}\right)$. Учитывая это, из выражения (21) получим

$$M(t) = t\int_{\mathbb{R}} e^{tx-e^x}dx \sim e^{t\ln t - t}\sqrt{t}\left(1 + O\left(\frac{1}{t}\right)\right), \quad t \to \infty.$$

Таким образом, для $G(t) = \ln M(t)$ имеем

$$G(t) \sim t\ln t, \quad t \to \infty, \tag{22}$$

что есть условие леммы для $c = 0$ и $\alpha = 1$.

В общем случае, при $c > 0$ и $\alpha \geqslant 1$, вычисления более громоздки, однако общий ход рассуждения не меняется. Главный член асимптотики $t \ln t$ заменится на $\alpha^{-1} t \ln (t/\alpha c)$, что эквивалентно $\alpha^{-1} t \ln t$ при $t \to \infty$. С учетом этого замечания можно считать лемму доказанной.

Лемма 3. Пусть ξ — абсолютно непрерывная случайная величина, для хвостовой функции которой верно

$$\ln S(x) \sim -ce^{\alpha x},$$
$$c > 0, \quad \alpha \geqslant 1, \quad x \to \infty.$$

Тогда $G(t)$ имеет следующее асимптотическое представление:

$$G(t) \sim \alpha^{-1} t \ln t, \quad t \to \infty.$$

Доказательство. Фиксируем произвольно $\varepsilon > 0$. По условию леммы, начиная с некоторого x_0, для $x > x_0$ верно

$$-(1+\varepsilon) ce^{\alpha x} \leqslant \ln S(x) \leqslant -(1-\varepsilon) ce^{\alpha x}.$$

Для удобства введем следующие обозначения:

$$g(x) := -ce^{\alpha x}, \;\; c_+ := 1+\varepsilon, \;\; c_- := 1-\varepsilon.$$

В этих обозначениях, начиная с некоторого x_0, для $x > x_0$ верно

$$c_+ ce^{\alpha x} \leqslant \ln S(x) \leqslant \mathrm{c}_- ce^{\alpha x}. \tag{23}$$

Воспользоваться оценками (23) можно только начиная с x_0. Поэтому разобьем функцию $M(t)$ в представлении (20) на два интеграла:

$$M(t) = t \int\limits_{\mathbb{R}} S(x) e^{tx} dx = t \int\limits_{-\infty}^{x_0} (\dots) + t \int\limits_{x_0}^{\infty} (\dots). \tag{24}$$

Оценим второй интеграл с двух сторон:

$$t \int\limits_{x_0}^{\infty} e^{tx + c_+ g(x)} dx \leqslant$$
$$\leqslant t \int\limits_{x_0}^{\infty} e^{tx + \ln S(x)} dx \leqslant t \int\limits_{x_0}^{\infty} e^{tx + c_- g(x)} dx.$$

Добавим первый интеграл из (24) от $-\infty$ до x_0:

$$t \int\limits_{x_0}^{\infty} e^{tx + c_+ g(x)} dx + t \int\limits_{-\infty}^{x_0} e^{tx + \ln S(x)} dx \leqslant$$
$$\leqslant M(t) \leqslant$$
$$\leqslant t \int\limits_{x_0}^{\infty} e^{tx + c_- g(x)} dx + t \int\limits_{-\infty}^{x_0} e^{tx + \ln S(x)} dx. \tag{25}$$

Рассмотрим оценку снизу в предыдущем выражении. Представим ее в следующем виде:

$$t \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{tx + c_+ g(x)} dx +$$
$$+ t \int\limits_{-\infty}^{x_0} e^{tx + \ln S(x)} dx - t \int\limits_{-\infty}^{x_0} e^{tx + c_+ g(x)} dx.$$

Первый интеграл обозначим за J_+, сумму второго и третьего — за B_+. Таким же образом представим правую часть выражения (25) в виде интегралов J_- и B_-:

$$J_+ + B_+ \leqslant M(t) \leqslant J_- + B_-. \tag{26}$$

Оценим B_+ и B_-, воспользовавшись тем, что $S(x) \leqslant 1$, а $g(x) \leqslant 0$:

$$B_+ = t \int\limits_{-\infty}^{x} e^{tx + \ln S(x)} dx - t \int\limits_{-\infty}^{x} e^{tx + c_+ g(x)} dx \leqslant$$
$$\leqslant t \int\limits_{-\infty}^{x} e^{tx} dx + t \int\limits_{-\infty}^{x} e^{tx} dx \leqslant 2e^{tx}.$$

Таким же образом, оценив B_+ снизу и повторив рассуждения для B_-, получим

$$|B_+| \leqslant 2e^{tx}; \quad |B_-| \leqslant 2e^{tx}.$$

Интегралы J_+ и J_- представляют собой функции $M(t)$ для случайной величины с хвостовыми функциями $e^{c_+ ce^{\alpha x}}$ и $e^{c_- ce^{\alpha x}}$, соответственно. В таком случае воспользуемся леммой 2:

$$\ln J_+ \sim \alpha^{-1} t \ln t; \quad \ln J_- \alpha^{-1} t \ln t.$$

Таким образом,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\ln(J_+ + B_+)}{\ln J_+} = 1 + \lim_{t\to\infty} \ln\left(1 + \frac{B_+}{J_+}\right) = 1, \tag{27}$$

т.е.

$$\ln(J_+ + B_+) \sim \ln(J_- + B_-) \sim \alpha^{-1} t \ln t.$$

Возьмем логарифм от выражения (26):

$$\ln(J_+ + B_+) \leqslant G(t) \leqslant \ln(J_- + B_-).$$

Левая и правая части асимптотически эквивалентны $\alpha^{-1} t \ln t$, а, значит, $G(t)$ асимптотически эквивалентна тому же, и лемма доказана.

Лемма 4. Пусть $f_1(t)$ и $f_2(t)$ — непрерывные функции, такие что

$$\ln f_i(t) \sim at \ln t, \;\; t \to \infty, \;\; i = 1, 2.$$

Тогда для их свертки

$$W(t) = f_1 * f_2(t) = \int\limits_0^t f_1(x) f_2(t-x)dx$$

верно

$$\ln W(t) \sim at \ln t, \quad t \to \infty.$$

Доказательство. Запишем функции $\ln f_i(t)$ в виде

$$\ln f_i(t) = at \ln t + \varphi_i(t), \quad i = 1,\, 2.$$

Согласно предположениям леммы, для любого $\varepsilon > 0$ существует $K = K(\varepsilon) > 0$, такое что

$$|\varphi_i(t)| \leqslant K + \varepsilon t \ln t, \quad i = 1,\, 2. \qquad (28)$$

Эти оценки означают, что свертка $W(t)$ главным образом зависит от главной части асимптотики $at \ln t$. Обозначим за $W_0(t)$ интеграл, соответствующий свертке главных частей асимптотик:

$$W_0(t) = \int\limits_0^t e^{ax \ln x + a(t-x) \ln (t-x)} dx.$$

Тогда $W(t)$ можно оценить следующим образом:

$$W_0(t) e^{-2K - 2\varepsilon t \ln t} \leqslant W(t) \leqslant W_0(t) e^{2K + 2\varepsilon t \ln t}.$$

Взяв логарифм, с обеих сторон получим

$$\ln W_0(t) - 2K - 2\varepsilon t \ln t \leqslant \ln W(t) \leqslant \leqslant \ln W_0(t) + 2K + 2\varepsilon t \ln t. \qquad (29)$$

Исследуем асимптотическое поведение $W_0(t)$ при $t \to \infty$. Чтобы применить метод Лапласа, необходимо избавиться от переменного передела интегрирования, сделав замену $x = tz$:

$$W_0(t) = t \int\limits_0^1 e^{atz \ln(tz) + a(t-tz) \ln (t-tz)} dz.$$

Упростим полученное выражение:

$$W_0(t) = t \int\limits_0^1 e^{at \ln t + a(t-tz) \ln (t-tz)} dz = = te^{at \ln t} \int\limits_0^1 e^{at(z \ln z + (1-z) \ln (1-z))} dz. \qquad (30)$$

Мы находимся в условиях применения метода Лапласа. Он утверждает, что последний интеграл (30) при больших t близок к значению своей подинтегральной функции в точке максимума функции $z \ln z + (1-z) \ln (1-z)$, см. [16]. Функция $z \ln z + (1-z) \ln (1-z)$ в точках 1 и -1 достигает максимума, который равен нулю. Поэтому при больших t интеграл из выражения (30) асимптотически равен единице:

$$W_0(t) \sim te^{at \ln t}, \quad \ln W_0(t) \sim at \ln t, \quad t \to \infty.$$

Подставив данное выражение в неравенство (29), получаем утверждение леммы.

Комбинируя леммы 2–4 и подходы из работы [10], получим основной результат:

Теорема 1.

Рассмотрим ветвящееся случайное блуждание в случайной среде с потенциалом $V(x)$. Пусть для хвостовой функции $S(x)$ потенциала верно

$$\ln S(x) \sim -ce^{\alpha x}, \;\; c > 0, \;\; \alpha \geqslant 1, \;\; x \to \infty.$$

Тогда

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\ln \langle m_1(t,x,y) \rangle}{\alpha^{-1} t \ln t} = 1.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Я.Б. Зельдович, С.А. Молчанов, А.А. Рузмайкин и др., УФН **152**, 3 (1987).

2. Я.Б. Зельдович, С.А. Молчанов, Д.Д. Соколов, ЖЭТФ **89**, 434 (1985).

3. Н.В. Змитриенко, С.П. Курдюмов, А.П. Михайлов и др., Письма в ЖЭТФ **26**, 620 (1977).

4. A.M. Shukurov, D.D. Sokolov, and A. Ruzmaikin, MHD **19**, 274 (1984).

5. J. Gärtner and S. Molchanov, Comm. Math. Phys., **132**, 613 (1990).

6. J. Gärtner and S. Molchanov, Probability Theory and Related Fields **111**, 1 (1998).

7. E.A. Illarionov and D.D. Sokoloff, Phys. Rev. E. **104**, 015214 (2021).

8. D.D. Sokoloff, Wulfenia **9**, 1 (2002).

9. Я.Б. Зельдович, Астроном. Ж. **41**, 1924 (1964).

10. S.A. Albeverio, L.V. Bogachev, S.A. Molchanov et al., *Annealed moment Lyapunov exponents for a branching random walk in a homogeneous random branching environment*, Markov Processes Relat. Fields **6**, 473 (2000).

11. Е.Б. Яровая, *Ветвящиеся случайные блуждания в неоднородной среде*, ЦПИ при мехмате Моск. ун-та (2007).

12. W. König. *The Parabolic Anderson Model: Random Walk in Random Potential*, Birkhäuser (2016).

13. J.P. Sethna. *Power laws in physics*, Nature Reviews Physics, **4**, c. 501 (2022).

14. E. Yarovaya, Comm. in Statistics — Simulation and Computation **41**, 41 (2012).

15. X. Chen, *The General Non-Stationary Anderson Parabolic Model with Correlated White Noise*, The University of North Carolina at Charlotte (2022).

16. R.W. Butler, *Saddlepoint approximations with applications*, Cambridge University Press (2007).