

СТАТИСТИКА ПАССИВНОГО СКАЛЯРА В ДВУМЕРНОМ СДВИГОВОМ ТЕЧЕНИИ С ФЛУКТУАЦИЯМИ

*Н. А. Ивченко, С. С. Вергелес**

*Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау Российской академии наук
142432, Черногловка, Московская обл., Россия*

*Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики"
111250, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 16 декабря 2022 г.,
после переработки 16 декабря 2022 г.
Принята к публикации 19 декабря 2022 г.

Изучаются статистические свойства переноса пассивного скаляра в двумерном потоке, состоящем из постоянного сдвигового течения и относительно слабой гладкой случайной компоненты, с учетом действия слабой, но конечной диффузии. Такая система тесно связана с динамикой переноса скаляра внутри когерентных вихрей, появляющихся в результате обратного каскада в двумерной турбулентности. Рассматривается как свободный распад пассивного скаляра, так и случай непрерывной накачки системы скаляром. В обоих случаях распределение скаляра обладает сильной перемежаемостью, что характеризуют вычисленные в работе одноточечные моменты.

DOI: 10.31857/S0044451023050115
EDN: BFGGCW

1. ВВЕДЕНИЕ

Течение в турбулентном режиме в гидродинамике характеризуется флуктуациями скорости, являющимися случайными как во времени, так и в пространстве. В отношении скалярных полей, переносимых таким потоком (например, температура или концентрация примесей), флуктуации приводят к их перемешиванию, тем самым сглаживая неоднородности в пространстве. Если можно пренебречь обратной реакцией скаляра на жидкость, то его называют пассивным. Процесс перемешивания отличается нетривиальными статистическими свойствами [1].

В настоящей работе рассматривается перемешивание пассивного скалярного поля ϑ в потоке с гладким хаотическим полем скорости с сильной постоянной сдвиговой компонентой. Данная задача мотивирована прежде всего изучением двумерной турбулентности, в которой в результате обратного каскада энергии образуются когерентные вих-

ри [2, 3]. В системе отсчета, связанной с центром вихря, течение можно охарактеризовать как дифференциальное аксиально-симметричное вращение с некоторой крупномасштабной средней скоростью. Профиль направленной по азимуту средней скорости $U(r)$ исследовался как аналитически, так и численно в работах [3–7]. Таким образом, эволюция некоторого сгустка (кляксы) пассивного скаляра с характерным размером, много меньшим, чем расстояние r , может быть рассмотрена как перемешивание в сдвиговом течении, создаваемом когерентным потоком. Это перемешивание происходит под влиянием крупномасштабных флуктуаций потока, возбуждаемых на фоне когерентного течения. Рассматриваемая нами модель, однако, применима также для любого течения, в котором доминирует сдвиговая компонента с наложенными гладкими флуктуациями скорости. Примерами являются течение эластической турбулентности [8–10] и двумерное течение в каналах [11].

Возможны различные постановки задачи: распад некоторого распределения или постоянное возбуждение внешним источником флуктуаций скаляра. В распадной задаче изучается статистика эволюции скаляра со временем. Начальное распределение случайно в пространстве, что может быть экспери-

* E-mail: ssver@itp.ac.ru

ментально реализовано через действие локализованного в пространстве источника в каналах [12], микроканалах [13] и мыльных пленках [14, 15]. Статистически однородное во времени возбуждение флуктуаций скаляра приводит систему в квазистационарный режим. В пределе большого числа Шмидта формируется турбулентный спектр Бэтчелора в интервале масштабов от диффузионного до колмогоровского [16–18]. Этот спектр соответствует каскаду к меньшим масштабам среднеквадратичного отклонения пассивного скаляра, см. численные эксперименты [19, 20]. Для изотропной турбулентности моменты распределения скаляра были изучены аналитически в [21–23] для распадной задачи и в [24] для задачи с непрерывной накачкой. Случай перемешивания в постоянном сдвиговом потоке, где перенос потоком становится детерминированным, рассмотрен в [25]. Перемешивание в потоке со случайной компонентой, наложенной на постоянное сдвиговое течение, изучалось в численном эксперименте [26] в рамках модели Крайчнана.

На масштабах больше диффузионного можно пренебречь ролью диффузии в эволюции пассивного скаляра, тем самым сведя ее к переносу течением. В случае постоянного сдвига вектор между двумя близкими лагранжевыми частицами ориентируется по направлению потока [25], а его длина растет линейно со временем. Направление вдоль течения оказывается неустойчивым стационарным состоянием вектора. Прохождение через него осуществляется за счет действия случайной компоненты течения [27]. В результате вектор разворачивается на угол π и вновь выравнивается параллельно потоку. Такой процесс, называемый проворотом, происходит с некоторой средней частотой. Визуализировать провороты в эксперименте можно через наблюдение за полимерами, см. [28, 29]. Прохождение неустойчивой точки соответствует задаче о диффузии в кубическом потенциале вблизи его положения равновесия. Эта модель носит универсальный характер, описывая ряд нестационарных физических явлений [30]. Процесс проворота сопровождается экспоненциальным ростом расстояния между лагранжевыми траекториями. Это означает, что существование слабой случайной компоненты значительным образом ускоряет процесс перемешивания.

Сначала мы исследуем общие свойства перемешивания, включая статистику лагранжевых траекторий и влияние диффузии. Затем мы изучаем распадную задачу и находим одноточечное среднее $\langle |\vartheta(t)|^\alpha \rangle$. После этого рассматриваем задачу

о непрерывном возбуждении флуктуаций скаляра. Наш анализ аналогичен представленному в работе, посвященной статистически изотропному течению [24], с необходимыми поправками на анизотропию.

2. ОБЩИЕ СООТНОШЕНИЯ

Уравнением, описывающим динамику пассивного скаляра ϑ , переносимого случайным потоком \mathbf{v} , подверженного диффузии с коэффициентом κ и возбуждаемого внешним источником (накачкой) f , является

$$\partial_t \vartheta + (\mathbf{v} \nabla) \vartheta = \kappa \Delta \vartheta + f. \quad (1)$$

В этом уравнении все величины являются функциями времени t и координаты \mathbf{r} . Мы предполагаем, что как в скорости течения \mathbf{v} , так и в накачке f имеются случайные составляющие, приводящие к сложному поведению статистики ϑ . Коэффициент диффузии κ предполагается относительно малым.

Мы рассматриваем предел, в котором поле скорости \mathbf{v} достаточно считать гладким, так что оно может быть разложено в ряд Тейлора с радиусом сходимости, превышающим все масштабы задачи, характеризующие распределение пассивного скаляра. Чтобы проследить за процессом перемешивания, перейдем в систему отсчета, движущуюся вместе с некоторой лагранжевой частицей. В ней скорость может быть приближена линейной зависимостью $v_i = (\Sigma_{ik} + \sigma_{ik}) r_k$, где Σ_{ik} и $\sigma_{ik}(t)$ — постоянная и флуктуирующая во времени части градиента скорости. Поскольку в среднем течение предполагается сдвиговым, у матрицы $\hat{\Sigma}$ есть единственный ненулевой элемент $\Sigma_{xy} = \Sigma$, который для определенности мы считаем положительным, $\Sigma > 0$. Тогда уравнение (1) принимает вид

$$\partial_t \vartheta + \Sigma y \partial_x \vartheta + \sigma_{ik} r_k \partial_i \vartheta = \kappa \Delta \vartheta + f. \quad (2)$$

Среднее по времени $\langle \hat{\sigma} \rangle_\sigma = 0$, а условие несжимаемости приводит к $\text{tr} \hat{\sigma} = 0$. Амплитуда флуктуаций относительно мала,

$$\Sigma^{-1} \int \langle \hat{\sigma}(0) \hat{\sigma}(t) \rangle_\sigma dt \ll 1.$$

Для распадной задачи мы предполагаем, что источником создано начальное распределение ϑ_0 в момент времени $t = 0$, которое статистически изотропно в пространстве и имеет гауссову статистику с нулевым средним. Таким образом, статистика полностью определяется корреляционной функцией

$$\langle \vartheta_0(\mathbf{r}' + \mathbf{r}) \vartheta_0(\mathbf{r}') \rangle_f = \Theta(\mathbf{r}), \quad (3)$$

где индекс « f » означает усреднение по начальному распределению. Функция $\Theta(0) = 1$, $\Theta(\mathbf{r})$ является изотропной и убывает на масштабе $r \sim L$. В случае непрерывной накачки f разумно предположить, что ее одноточечная статистика также является гауссовой, поскольку распределение скаляра является результатом действия случайной накачки в течение долгого времени. Тогда статистические свойства источника полностью определяются парной корреляционной функцией

$$\langle f(t, \mathbf{r}) f(0, 0) \rangle_f = \delta(t) \Theta(r),$$

где $\Theta(r)$ обладает теми же свойствами, что и (3).

Любая корреляционная функция пассивного скаляра является результатом усреднения как по статистике источника, так и по статистике случайного течения. Зафиксируем реализацию случайного течения. Тогда статистика пассивного скаляра остается гауссовой с течением времени, т. е. определяется средним квадратом $\langle \vartheta^2 \rangle_f$. Мы исследуем одноточечные моменты скаляра $\langle |\vartheta|^\alpha \rangle$, которые являются результатом усреднения также и по статистике случайного течения,

$$\langle |\vartheta|^\alpha \rangle = C_\alpha \left\langle \langle \vartheta^2 \rangle_f^{\alpha/2} \right\rangle_\sigma, \quad (4)$$

где

$$C_\alpha = 2^{\alpha/2} \Gamma((\alpha + 1)/2) / \sqrt{\pi}.$$

Должно выполняться условие $\alpha > -1$, чтобы момент имел конечное значение.

Средний квадрат $\langle \theta^2 \rangle_f$ не является решением замкнутого уравнения. Его значение нужно найти, рассмотрев на малых масштабах поведение «частично усредненной» парной корреляционной функции

$$\mathcal{F}(t, \mathbf{r}) = \langle \vartheta(t, 0) \vartheta(t, \mathbf{r}) \rangle_f,$$

которая является результатом усреднения только по статистике начальных условий или накачки и, как следует из (2), удовлетворяет уравнению

$$\partial_t \mathcal{F} + \Sigma y \partial_x \mathcal{F} + \sigma_{ik} r_k \partial_i \mathcal{F} = 2\kappa \Delta \mathcal{F} + \Theta(r). \quad (5)$$

Это уравнение совпадает с уравнением для пассивного скаляра (2), но с удвоенным коэффициентом диффузии. Источник $\Theta(r)$ в правой части уравнения (5) происходит из парной корреляционной функции накачки (3). Для распадной задачи накачка отсутствует, а Θ (3) является начальным условием для \mathcal{F} . Нас интересует значение

$$\langle \theta^2 \rangle_f = \mathcal{F}|_{\mathbf{r}=0}.$$

Дальнейшее решение будет построено по следующей схеме. Сначала мы решаем уравнение (5) для произвольного случайного процесса $\hat{\sigma}(t)$ и находим частично усредненное $\langle \vartheta^2 \rangle_f$. Затем проводим усреднение по статистике турбулентных пульсаций для нахождения искомого момента (4). Усреднение происходит путем поиска так называемой оптимальной флуктуации [22, 23] — реализации процесса $\hat{\sigma}$, которая с учетом ее вероятности обеспечивает наибольший вклад в корреляционную функцию. Этот метод применим, поскольку реализации, существенно отличающиеся от оптимальной, вносят значительно меньший вклад в среднее.

3. ЛАГРАНЖЕВЫ ТРАЕКТОРИИ

Диффузия в (1) полагается слабой, что соответствует большому числу Пекле, $Pe = \Sigma L^2 / \kappa \gg 1$. Если отбросить слагаемое с диффузией в (5), эволюция скаляра сводится к переносу вдоль лагранжевых траекторий. Рассмотрим вектор $\ell(t) = \{\ell \cos \psi, \ell \sin \psi\}$, разделяющий две близкие лагранжевы траектории. Его динамика описывается уравнением

$$\frac{d\ell}{dt} = (\hat{\Sigma} + \hat{\sigma})\ell.$$

Динамика угла ψ определяется замкнутым уравнением, которое в пределе относительной слабости флуктуаций течения имеет вид

$$\frac{d\psi}{dt} = -\Sigma \sin^2 \psi + \varsigma, \quad (6)$$

где $\varsigma \equiv \sigma_{yx}$. Случайная компонента ς в (6) становится важной, когда $|\sin \psi| \lesssim \psi_*$, где характерный угол $\psi_* = \varepsilon^{1/3}$ выражается через малый параметр теории $\varepsilon = D/\Sigma \ll 1$. Поэтому мы оставили в (6) только наиболее существенный вклад ς из $\hat{\sigma}$ в этом диапазоне.

Если вне области $|\sin \psi| \lesssim \psi_*$ пренебречь случайной компонентой, динамика угла становится детерминированной и он устремляется обратно в эту область [31],

$$\text{ctg } \psi - \text{ctg } \psi_0 = \Sigma(t - t_0), \quad |\sin \psi| \gg \psi_*, \quad (7)$$

где индекс «0» соответствует некоторому начальному условию. Но из (6) следует, что направленность ℓ вдоль потока не является устойчивой. После того как случайный шум ς диффузионным образом сдвинет угол в область отрицательных значений $\sin \psi$, сдвиговое слагаемое с Σ уведет угол в область $\sin \psi \sim -1$. Событие, когда вектор сделает

половину полного оборота в таком процессе, так что угол ψ уменьшится на π , мы называем проворотом. Повороты происходят со средней частотой

$$\omega = \Sigma \langle \sin^2 \psi \rangle / \pi \sim \psi_* \Sigma.$$

Динамика угла может анализироваться в терминах функции плотности распределения вероятности (PDF) $\mathcal{P}_\psi(t, \psi)$. Поскольку задача является π -периодической, рассмотрим ее на отрезке $[-\pi/2, \pi/2]$ с условием нормировки

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\psi \mathcal{P}_\psi = 1.$$

На больших временах $\omega t \gg 1$ плотность вероятности выходит на стационарное распределение: $\mathcal{P}_\psi(t, \psi) \rightarrow \mathcal{P}_{st}(\psi)$. Оно имеет максимум при $\psi \sim \psi_*$, ширина пика распределения та же, $\sim \psi_*$. Хвосты функции $\mathcal{P}_{st} = \omega_c \psi_* / \sin^2 \psi$ при $|\sin \psi| \gg \psi_*$, что соответствует (7), а средняя частота проворотов равна $\omega = \omega_c \psi_* \Sigma$, где ω_c — некоторый численный коэффициент.

Динамика длины вектора $\ell(t)$ описывается уравнением, в котором можно пренебречь вкладом от флуктуаций течения:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\Sigma}{2} \sin(2\psi), \tag{8}$$

где $\rho(t) = \ln(\ell(t)/\ell(0))$ — логарифмическое приращение расстояния между траекториями. Величина ляпуновской экспоненты $\lambda = \langle d\rho/dt \rangle_\sigma$ есть $\lambda = \lambda_c \psi_* \Sigma$, где λ_c — численная константа.

Пусть в начальный момент времени $\rho_0 = 0$ и $|\psi| \lesssim \psi_*$. В правой части уравнения (8) находится случайный процесс со временем корреляции порядка $(\psi_* \Sigma)^{-1}$. Значит, PDF для ρ принимает асимптотическую форму

$$\mathcal{P}_\ell(t, \rho) \sim \exp(-\tau S(\rho/\tau)) \tag{9}$$

на относительно больших временах $\tau \equiv \lambda t \gg 1$ [22, 32]. В (9) функция энтропии (она же функция Крамера) $S(\xi)$ является всюду выпуклой, см. [33]. Она принимает минимальное значение $S = 0$ в точке $\xi = 1$, что соответствует $\langle \rho(t) \rangle_\sigma = \tau$.

Поскольку частота переворотов ω мала по сравнению с Σ , разумно в качестве модельной задачи исследовать предел коротко коррелированных флуктуаций $\hat{\sigma}$, $\langle \zeta(0) \zeta(t) \rangle = 2D\delta(t)$. В этом пределе возможно подробно исследовать задачу [27] и найти численные константы $\omega_c \approx 0.201$, $\lambda_c \approx 0.365$. Наше дополнительное аналитическое и численное исследование задачи (см. Приложение) показало, что

$S(\xi) + \xi$ является четной функцией ξ , из чего следует $S'(0) = -1$. Аппроксимация

$$S(\xi) \approx S''(\xi - 1)^2/2 + S'''(\xi - 1)^3/6$$

хорошо приближает функцию в круге $|\xi - 1| \leq 1.5$ с $S''' \approx -0.207$ и $S'' = 1 + S'''/2$, а также согласуется со скоростью роста среднего квадрата расстояния $\langle \ell^2(t) \rangle$, которая может быть вычислена аналитически, см. [34].

Несмотря на то, что $\rho(t)$ в среднем растет, его динамика не монотонна. Действительно, в области $|\sin \psi| \gg \psi_*$, где поведение ψ проходит согласно (7), можно так же проинтегрировать (8):

$$\exp(\rho_1 - \rho_2) = \frac{\sin \psi_1}{\sin \psi_2}. \tag{10}$$

В ходе проворота ρ достигает локального минимума при $\psi = \pi/2$, а следующий локальный максимум соответствует $|\psi| \sim \psi_*$. Разность между максимумом и минимумом по порядку величины равна $\ln \psi_*^{-1} = -(1/3) \ln \varepsilon$. Важно отметить, что на распределение (9) PDF выходит на больших временах $\tau \gg (\ln \psi_*)^2$, когда уменьшение ρ в течение проворота много меньше ширины распределения. У совместной же функции распределения зависимость от ρ имеет вид, как в (9) для $\tau \gg 1$, если рассматривать ее на углах $|\sin \psi| \lesssim \psi_*$.

4. ПЕРЕМЕШИВАНИЕ СКАЛЯРА

Теперь исследуем роль молекулярной диффузии. Для этого рассмотрим распад начального условия согласно однородному уравнению (5). Изучим его физические свойства, выбрав пространственное распределение парной корреляционной функции (3) специфического вида: $\Theta = \exp(-r^2/2L^2)$. Такой вид позволяет существенно упростить математическое рассмотрение задачи, поскольку уравнение (5) сохраняет решение \mathcal{F} с пространственным профилем гауссианы. Представим радиус-вектор в полярных координатах $\mathbf{r} = \{r \cos \phi, r \sin \phi\}$. Корреляционная функция имеет вид

$$\mathcal{F}(t, \mathbf{r}) = \frac{L^2}{L_+ L_-} \exp\left(-\frac{\tilde{\mathbf{r}}^T \hat{\Lambda} \tilde{\mathbf{r}}}{2}\right) \tag{11}$$

в любой момент времени, где матрица Λ — диагональная, $\Lambda_{xx} = L_+^{-2}$, $\Lambda_{yy} = L_-^{-2}$, при этом $L_+ \geq L_-$. Пространственное распределение (11) соответствует вытянутой по эллипсу кляксе $\vartheta_b(t, \mathbf{r}) \propto \exp(-\tilde{\mathbf{r}}^T \hat{\Lambda} \tilde{\mathbf{r}})$, где бóльшая ось повернута на угол ψ относительно оси x . Введенный повернутый радиус-вектор $\tilde{\mathbf{r}} = \{r \cos(\delta\phi), r \sin(\delta\phi)\}$, $\delta\phi = \phi - \psi$. Характерная площадь кляксы $A = L_+ L_-$.

Система уравнений для размеров L_{\pm} и угла ψ может быть получена из уравнения (5). Те же приближения, использованные при рассмотрении динамики лагранжевых траекторий, приводят к системе

$$\frac{d \ln L_{\pm}}{dt} = \pm \frac{\Sigma}{2} \sin(2\psi) + \frac{2\kappa}{L_{\pm}^2}, \quad (12)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = -\Sigma \frac{L_+^2 \sin^2 \psi - L_-^2 \cos^2 \psi}{L_+^2 - L_-^2} + \frac{L_-^2}{L_+^2} + \varsigma. \quad (13)$$

В пределе существенного растяжения, $L_+ \gg L_-$, уравнение (13) динамики угла ψ сводится к (6). С начальными условиями $L_{\pm} = L$ и $\psi_0 = \pi/4$ в момент $t_0 = 0$ плотность распределения ρ получается сдвинутой по сравнению с (9),

$$\mathcal{P}(t, \rho) = \mathcal{P}_l(t, \rho + \ln \psi_*). \quad (14)$$

Мы предполагаем режим, в котором случайная компонента течения существенно важна, $\text{Re} \cdot \varepsilon^{1/3} \gg 1$, так что диффузия в (12) для динамики L_+ всегда пренебрежима. Тогда в пределе сильного растяжения, $L_+ \gg L_-$, система уравнений для угла ψ и логарифмического растяжения кляксы $\rho = \ln(L_+/L)$ совпадает с системой (6), (8), описывающей динамику лагранжевых траекторий.

Далее рассмотрим динамику наименьшего масштаба L_- . Сравнивая средний темп сжатия с диффузионным слагаемым в (12), находим диффузионный масштаб $r_{\kappa} = \sqrt{2\kappa/\lambda}$. Уравнение (12) можно переписать как

$$\partial_{\tau} \rho_- = \partial_{\tau} \rho - \exp(2(\rho_- - \ln(L/r_{\kappa}))), \quad (15)$$

где логарифмическая степень сжатия $\rho_- = \ln(L/L_-)$. До тех пор пока растяжение умеренное, динамика наименьшего масштаба L_- еще не подвержена влиянию диффузии, так что $\rho_- = \rho$. Площадь кляксы в этом режиме сохраняется, $A = L_+ L_-$. Молекулярная диффузия предотвращает неограниченное сжатие кляксы. Если случайная компонента течения относительно сильная, так что $L\psi_* \gg r_{\kappa}$ (т.е. $\text{Re} \cdot \varepsilon > 1$), меньший масштаб L_- прекращает снижаться спустя некоторое количество проворотов.

Если случайная компонента слаба, $L\psi_* < r_{\kappa}$ (так что $\text{Re} \cdot \varepsilon < 1$), диффузионный масштаб достигается в течение первого проворота. Согласно уравнению (10), сначала масштаб L_- опускается до $\sim L\psi_{\kappa} = (\text{Re} \cdot \varepsilon)^{1/6} r_{\kappa}$ спустя $\tau \sim \psi_*/\psi_{\kappa}$, где $\psi_{\kappa} = \text{Re}^{-1/3}$. Масштаб сжатия и площадь кляксы размываются и растут алгебраически с τ на промежуточных временах $\psi_*/\psi_{\kappa} < \tau < 1$, $L_- \sim \sqrt{\kappa t}$

и $A \sim \sqrt{\kappa L \Sigma t^{3/2}}$, так что L_- достигает r_{κ} при $\tau \sim 1$. Дальнейшая динамика L_- такая же в пределе $L\psi_* \gg r_{\kappa}$.

Чтобы провести усреднение по флуктуациям течения в (4), требуется учитывать совместную динамику логарифмов ρ, ρ_- и угла ψ . В области углов $|\sin \psi| \gg \psi_*$ шумом в уравнении Ланжевена (6) можно пренебречь, что делает уравнения движения детерминированными и позволяет их проинтегрировать, см. (7), (10):

$$\text{ctg} \psi - \frac{1}{\psi_*} = \Sigma(t^* - t), \quad \frac{\psi_*}{\sin \psi} = \frac{L_+}{L_+^*} = \frac{L_-^*}{L_-}, \quad (16)$$

где звездочка обозначает величину в момент времени $t = t^*$, когда $\psi \sim \psi_*$. Следуя за масштабом растяжения, наименьший масштаб достигает своего минимума при L_-^* при углах $|\psi| \sim \psi_*$ согласно (12). Несмотря на важность диффузии в минимуме L_- , где $L_-^* \sim r_{\kappa}$, ею можно пренебречь в последующем промежутке детерминированной динамики (16). Из этого рассуждения следует, что совместную плотность распределения можно представить как

$$\mathcal{P}(t, \rho, \rho_-, \psi) = \frac{\psi_*^2}{\sin^2 \psi} \mathcal{P}(t^*, \rho^*, \rho_-^*, \psi_*), \quad (17)$$

где t^*, ρ^*, ρ_-^* соотносятся с t, ρ, ρ_- , как в (16). Отметим, что на больших временах $\lambda t \gg 1$ плотность вероятности значений угла переходит в стационарное распределение $\mathcal{P}_{st}(\psi)$, тело которого локализовано на малых значениях $|\psi| \lesssim \psi_*$. Связь между масштабами сжатия и растяжения может быть выражена через их логарифмы:

$$\rho_-^* = \ln\left(\frac{L}{r_{\kappa}}\right) - \theta\left(\ln\left(\frac{L}{r_{\kappa}}\right) - \rho^*\right)\left(\ln\left(\frac{L}{r_{\kappa}}\right) - \rho^*\right), \quad (18)$$

где $\theta(\xi) = 1$ при $\xi > 0$ и $\theta(\xi) = 0$ в противном случае. Мы приходим к следующей оценке для (17):

$$\mathcal{P}(t, \rho^*, \rho_-^*, \psi_*) \sim \frac{1}{\psi_*} \mathcal{P}(t, \rho^*), \quad (19)$$

где форма $\mathcal{P}(t, \rho)$ приведена в уравнении (9) и ρ_-^* задается (18).

5. ОДНОТОЧЕЧНОЕ СРЕДНЕЕ В ЗАДАЧЕ РАСПАДА

В данном разделе будет проведено усреднение по статистике течения в (4),

$$\langle |\vartheta|^{\alpha} \rangle = \int \mathcal{P}(t, \rho, \rho_-, \psi) d\rho d\rho_- d\psi (\mathcal{F}(t, 0))^{\alpha/2}. \quad (20)$$

Выбранный пространственный профиль корреляционной функции (11) позволяет переписать выражение (20) в виде

$$\langle |\vartheta|^\alpha \rangle = C_\alpha L^\alpha \left\langle (L_+ L_-)^{-\alpha/2} \right\rangle_\sigma. \quad (21)$$

Сначала рассмотрим случай $\text{Re} \cdot \varepsilon \gg 1$, когда $\rho_\kappa = \ln(L/r_\kappa) + \ln \psi_* = \ln \sqrt{\text{Re} \cdot \varepsilon} > 1$, и $\alpha > 0$. Флуктуациями течения можно пренебречь на временах $\tau \lesssim 1$, когда эволюцию кляксы можно считать детерминированной и усреднение в (20) сводится к замене ρ, ρ_- и ψ на их значения. После этого, на больших временах $\tau \gg 1$, согласно уравнениям (18), (19) усреднение в (4) может быть сведено к интегрированию ($\rho' = \rho^* + \ln \psi_*$):

$$\langle |\vartheta|^\alpha \rangle = \int_0^\infty d\rho' \mathcal{P}_\ell(t, \rho') e^{-(\alpha/2)(\rho_\kappa - \rho') \theta(\rho_\kappa - \rho')}. \quad (22)$$

На начальных временах $\tau < \rho_\kappa$ интеграл в (22) определяется вкладом около $\rho' \approx \tau$, т.е. экспоненту в (22) можно заменить единицей, получив $\langle |\vartheta|^\alpha \rangle = C_\alpha$. В противоположном пределе больших времен $\tau \rightarrow \infty$ интеграл в (22) набирается на $\rho' \geq \rho_\kappa$, поэтому корреляционная функция является преобразованием Лапласа плотности распределения (9):

$$\begin{aligned} \langle |\vartheta|^\alpha \rangle &\sim e^{\alpha \rho_\kappa / 2} \int_{\rho_\kappa / \tau}^{+\infty} d\xi \exp(-\tau(S(\xi) + \alpha\xi/2)) \sim \\ &\sim \left(\frac{L\psi_*}{r_\kappa}\right)^{\alpha/2} \exp(-q_\alpha \tau). \end{aligned} \quad (23)$$

Здесь преобразование Лежандра функции энтропии $q_\alpha = \alpha\xi_\alpha/2 + S(\xi_\alpha)$ по ξ_α определяется через уравнение $\partial_\xi S(\xi) = -\alpha/2$, которое возникает в ходе интегрирования (23) по методу перевала. Заметим, что $0 < \xi_\alpha < 1$, поэтому (23) применимо только на больших временах $\tau > \rho_\kappa/\xi_\alpha$, для которых диффузия важна в динамике скаляра. Следовательно, на промежуточных временах $\rho_\kappa < \tau < \rho_\kappa/\xi_\alpha$ одноточечное среднее определяется оптимальной флуктуацией, при которой $\rho_-(t)$ достигает диффузионного предела $\ln(L/r_\kappa)$ как раз к моменту τ , но диффузия еще не влияет на динамику, так что $L_+ L_- = L^2$. Соберем ответы для всех промежутков времени:

$$\langle |\vartheta|^\alpha \rangle \sim \begin{cases} 1, & \tau < \rho_\kappa, \\ e^{-\tau S(\rho_\kappa/\tau)}, & \rho_\kappa < \tau < \rho_\kappa/\xi_\alpha, \\ (L\psi_*/r_\kappa)^{\alpha/2} e^{-q_\alpha \tau}, & \rho_\kappa/\xi_\alpha < \tau. \end{cases} \quad (24)$$

Оптимальные флуктуации отображены схематически на рис. 1.

Согласно уравнению (23), оптимальная флуктуация удовлетворяет неравенству $\xi_\alpha \geq \rho_\kappa/\tau$. Это влечет за собой ограничение

$$\alpha < \alpha_{cr} - (2 - S''') \rho_\kappa/\tau < \alpha_{cr}. \quad (25)$$

Второе слагаемое здесь является отрицательной поправкой, записанной в линейном порядке разложения по $\rho_\kappa/\tau \ll 1$. Равенство $\alpha = \alpha_{cr}$ соответствует $\xi_\alpha = 0$, что дает критическое значение индекса $\alpha_{cr} = 2$ согласно установленным свойствам функции Крамера S , см. текст после (9). Если α превышает порог (25), то оптимальная флуктуация на временах $\tau > \rho_\kappa$ соответствует динамике, в которой диффузия не играет роли, поскольку $\rho^* = \ln(L/r_\kappa)$, что соответствует второй асимптотике в (24). В случае изотропного случайного течения аналогичные результаты были получены в работе [21] для предела коротко коррелированных во времени градиентов скорости $\hat{\sigma}$ и в [22] методом поиска оптимальной флуктуации. В частности, критический индекс $\alpha_{cr} = 2$ такой же, как и установленный в анизотропном случае.

Если $-1 < \alpha < 0$, то $q_\alpha < 0$, $\xi_\alpha > 1$, и оптимальная флуктуация соответствует $\rho = \tau$ при $\tau < \alpha\rho_\kappa/2q_\alpha$. Диффузия на этих временах еще не действует, так что выполняется первый режим в (24). После этого оптимальная флуктуация переходит на финальный линейный рост $\rho = \xi_\alpha \tau$, и одноточечное среднее начинает расти, так что выполняется третий режим (24).

Вернемся к случаю $\text{Re} \cdot \varepsilon < 1$ и $\alpha > 0$. Молекулярная диффузия становится существенной за первый акт проворота начиная со времени $\tau \gtrsim \psi_\kappa$, так что одноточечное среднее

$$\langle |\vartheta|^\alpha \rangle = C_\alpha/A^\alpha = C_\alpha(L/\sqrt{\kappa} \Sigma t^{3/2})^{\alpha/2}$$

снижается по порядку до $(L\psi_*/r_\kappa)^{\alpha/2}$ на временах

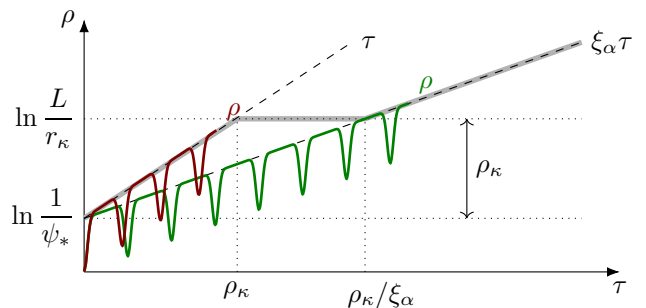


Рис. 1. Оптимальная флуктуация для (24) в случае $\alpha < \alpha_{cr}$. Коричневая кривая демонстрирует начальную асимптотику в (24), а зеленая кривая — заключительную. Жирная серая линия — конечные точки процесса $\rho(\tau)$ при оптимальных флуктуациях течения

$\tau \sim 1$. Для последующей эволюции применимо (22) и реализуется последняя асимптотика из (24).

6. ПОСТОЯННАЯ НАКАЧКА СКАЛЯРА

В случае постоянной возбуждения скаляра внешним источником f , см. (1), его распределение может быть представлено как совокупность клякс, которые были вброшены в систему накачкой в различные моменты времени и после чего эволюционировали. Одноточечная статистика скаляра по-прежнему остается гауссовой для фиксированной реализации случайного течения. Сохраним обозначение $\mathcal{F}(t, \mathbf{r})$ для частично усредненной корреляционной функции в распадной задаче, определим частично усредненную парную корреляционную функцию $\mathcal{G} = \langle \vartheta(t, 0) \vartheta(t, \mathbf{r}) \rangle_f$ в задаче с непрерывной накачкой. Для коротко коррелированного во времени источника f имеем связь в статистически стационарном пределе:

$$\mathcal{G}(\mathbf{r}) = \int_0^\infty dt \mathcal{F}(t, \mathbf{r}). \quad (26)$$

Теперь $\langle \vartheta^2 \rangle_f = \mathcal{G}(0)$ в (4).

Обозначим как τ_F момент, когда L_- снижается до диффузионного масштаба r_κ в первый раз, т. е. когда $\rho = \rho_\kappa$. На временном промежутке $0 < \tau < \tau_F$ частично усредненное значение $\langle \vartheta^2 \rangle_f = 1$ в распадной задаче, а на больших временах $\tau > \tau_F$ это среднее быстро убывает. Возвращаясь к задаче с непрерывной накачкой, имеем $\langle \vartheta^2 \rangle_f = \tau_F$ для отдельной реализации потока. Из этого рассмотрения следует, что в случае слабых флуктуаций течения их роль несущественна для среднего $\langle |\vartheta|^\alpha \rangle$, поэтому рассмотрим предел $\text{Re} \cdot \varepsilon \gg 1$. При произвольном α усреднение по статистике течения означает оптимизацию времени τ_F . Если ρ_κ велико, то средний квадрат $\langle \vartheta \rangle$ насыщается наиболее вероятными реализациями случайного течения,

$$\langle \vartheta^2 \rangle = \langle \tau_F \rangle_\sigma \approx \rho_\kappa = \frac{1}{2} \ln \frac{DL^2}{\kappa}. \quad (27)$$

Для произвольной степени α

$$\frac{\langle |\vartheta|^\alpha \rangle}{\rho_\kappa^{\alpha/2}} = C_\alpha \int_0^\infty d\tau_F \exp \left(-\tau_F S \left(\frac{\rho_\kappa}{\tau_F} \right) + \frac{\alpha}{2} \ln \frac{\tau_F}{\rho_\kappa} \right). \quad (28)$$

Если степень достаточно мала, $\tilde{\alpha} \equiv \alpha/S''\rho_\kappa \ll 1$, то при интегрировании достаточно разложить функцию энтропии в квадратичном порядке у минимума выражения. Статистика скаляра незначительно отличается от гауссовой в этом пределе. В другом случае, при $\tilde{\alpha} \gg 1$, интегрирование задается разложением функции энтропии в окрестности нуля,

так что оптимальное время $\tau_F = \alpha/2S(0)$. Получаем асимптотики

$$\frac{\langle |\vartheta|^\alpha \rangle}{(\rho_\kappa)^{\alpha/2}} = \begin{cases} C_\alpha \exp(\alpha^2/8S''\rho_\kappa), & \tilde{\alpha} \ll 1, \\ \sqrt{\text{Pe} \cdot \varepsilon} C_{2\alpha} E^\alpha, & \tilde{\alpha} \gg 1, \end{cases} \quad (29)$$

где $E = \sqrt{8\rho_\kappa S(0)}$. Это означает, что вероятность сильных отклонений определяется экспоненциальным хвостом функции распределения:

$$\mathcal{P}(\vartheta) \sim \frac{\sqrt{\text{Pe} \cdot \varepsilon}}{E\sqrt{\langle \vartheta^2 \rangle}} \exp \left(-\frac{|\vartheta|}{E\sqrt{\langle \vartheta^2 \rangle}} \right). \quad (30)$$

Промежуточная гауссова асимптотика при $\tilde{\alpha} \ll 1$ была найдена в [35]. Однако моменты высокого порядка $\tilde{\alpha} \gg 1$ определяются реализациями случайного течения, которые препятствуют сильному растяжению кляксы. Шум ζ в динамике кляксы выполняет роль силы, побуждающей проходить точки $\sin \psi = 0$, тем самым не давая кляксе растягиваться. Представленное рассмотрение для одноточечных средних обобщает рассмотрение [24] для случая статистически изотропного течения на задачу с наличием сильного постоянного сдвига.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы показали, что процесс перемешивания пассивного скаляра в сильном сдвиговом течении с гладкой случайной компонентой скорости наследует многие свойства задачи в статистически изотропном случайном гладком течении. Различие проявляется вследствие анизотропии, возникающей с постоянным сдвигом. Система описывается параметрами интенсивности случайной компоненты в течении ε и числом Пекле Re . Случайная компонента физически существенна при $\text{Re} \cdot \varepsilon^{1/3} > 1$. Наибольший интерес представляет собой случай, когда она является достаточно сильной, $\text{Re} \cdot \varepsilon \gg 1$, так что клякса, попав в течение, проходит через несколько актов проворота, перед тем как диффузия начинает перемешивать скаляр в ней. В этом пределе статистические свойства скаляра определяются через функцию энтропии, которая описывает статистику расходящихся в потоке лагранжевых траекторий. Добавление слабой случайной компоненты позволяет существенно ускорить наступление процесса перемешивания: если в стационарном сдвиговом потоке молекулярная диффузия вступает в размешивание кляксы размера l на временах порядка $(\Sigma^2 \kappa / l^2)^{-1/3}$, то в системе со слабым шумом это время уменьшается до $\ln(\text{Pe} \cdot \varepsilon) / \lambda$, т. е. в $\sim (\text{Pe} \cdot \varepsilon)^{1/3} / \ln(\text{Pe} \cdot \varepsilon)$ раз.

Отметим, что геометрия случайной компоненты скорости имеет принципиально важную роль. Главный вклад в ускорение процесса перемешивания вносит производная вдоль линий тока среднего течения от компоненты скорости v_y , направленной нормально к ним, $\sigma_{yx} = \partial_x v_y$, см. (6). В результате совместного действия постоянного сдвига и этой случайной компоненты ляпуновская экспонента потока становится отличной от нуля. Напротив, в [36] был рассмотрен случай, когда случайная компонента есть только в $\partial_z v_x$, где z — третья координата, а $v_y = 0$. В этом случае процесс перемешивания по-прежнему имеет алгебраическую зависимость на больших временах. То же замечание касается и других подобных моделей, в одной из которых единственная ненулевая компонента скорости имеет зависимость $v_x(t, y)$ со случайной компонентой во времени и пространстве [37]. Квадрат расстояния между двумя лагранжевыми траекториями растет по алгебраическому закону, т. е. ляпуновская экспонента в этой модели равна нулю. Это сравнение показывает обоснованность выбранной нами модели, ухватывающей главный эффект, производимый турбулентными флуктуациями.

Благодарности. Авторы благодарны В. В. Лебедеву и И. В. Колоколову за важные обсуждения.

Финансирование. Работа выполнена в лаборатории «Современная гидродинамика», созданной в рамках гранта Министерства науки и высшего образования РФ 075-15-2022-1099, и поддержана средствами госзадания 0029-2019-0003.

**ПРИЛОЖЕНИЕ.
АНАЛИЗ УРАВНЕНИЯ ФОККЕРА–ПЛАНКА**

Рассмотрим уравнение Фоккера–Планка для совместной функции распределения $\mathcal{P}_\ell(\rho, \psi)$, описывающей статистику лагранжевых траекторий ℓ в терминах ρ, ψ , в пределе коротко коррелированной по времени случайной компоненты поля скорости ς :

$$\partial_t \mathcal{P}_\ell = -\frac{\Sigma \sin(2\psi)}{2} (\partial_\rho - 1) \mathcal{P}_\ell + \hat{\mathcal{L}} \mathcal{P}_\ell, \quad (31)$$

которое выполняется в пределе $\varepsilon \ll 1$, где

$$\hat{\mathcal{L}} = \Sigma \sin \psi \partial_\psi \sin \psi + D \partial_\psi^2.$$

Преобразование Фурье относительно переменной ρ уравнения (31) на значении «частоты» $-i\eta$ имеет вид

$$\partial_t \tilde{\mathcal{P}}_\ell = \left(-\frac{\Sigma(\eta - 1)}{2} \sin(2\psi) + \hat{\mathcal{L}} \right) \tilde{\mathcal{P}}_\ell. \quad (32)$$

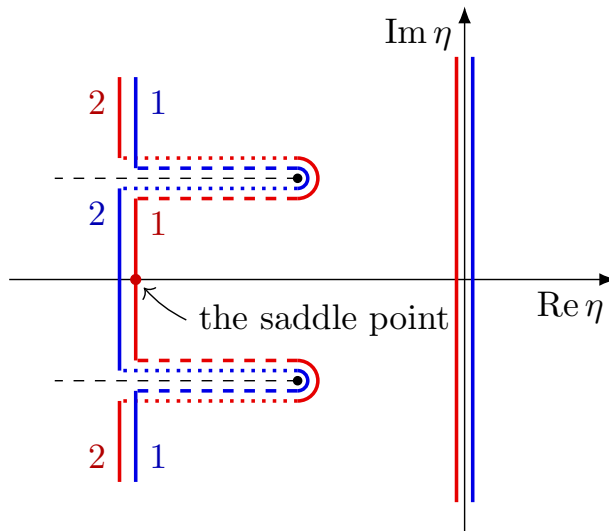


Рис. 2. Контур интегрирования при обратном преобразовании Фурье для нулевого и первого собственных значений, исходные обозначены непрерывными синей и красной линиями. Черными штриховыми линиями обозначены разрывы

Поскольку мы интересуемся асимптотическим поведением \mathcal{P}_ℓ на больших временах, полезно рассмотреть задачу о спектре линейного оператора в правой части (32). Для сопряженной задачи оператор $\hat{\mathcal{L}}^T(\psi) = \hat{\mathcal{L}}(-\psi)$, что приводит к симметрии собственных значений γ :

$$\gamma(\eta) = \gamma(2 - \eta).$$

При взятии обратного преобразования Фурье из этого следует симметрия функции энтропии S , о которой речь идет ниже (9) в разд. 3. Поскольку оператор $\hat{\mathcal{L}}$ веществен в ψ -представлении, также имеем симметрию $\gamma(\eta^*) = (\gamma(\eta))^*$. Мы будем сортировать собственные значения в порядке уменьшения значения действительной части. Нулевое собственное значение $\gamma_0(\eta) = -\lambda q_{2\eta}$ является невырожденным, вещественным при $\text{Im } \eta = 0$ и обладает наибольшей действительной частью в окрестности этой прямой. Согласно нашему численному анализу, оно может быть хорошо приближено разложением

$$q_{2\eta} \approx \frac{\tilde{\eta}(1 - Q_1 \tilde{\eta})}{2}, \quad Q_1 = 0.026, \quad \tilde{\eta} = 1 - (\eta - 1)^2, \quad (33)$$

в области $|\eta - 1| \leq 2.5$. Обратное преобразование Фурье $\exp(-q_{2\eta} \tau)$ приводит к функции Крамера (9), у которой $S'''(1) = -0.207$, см. абзац после (9). В пределе больших $|\eta| \gg 1$ имеем асимптотическое поведение $q_{2\eta} = -Q_2 |\eta|^{4/3}$, где $Q_2 \approx 0.32$.

В комплексной плоскости переменной η имеются точки ветвления, при которых два собственных значения становятся равными. В частности, нулевое

собственное значение сравнивается с первым в точках $\eta - 1 \approx \pm 2.1 \pm 1.6i$, а следующие два значения с наибольшими действительными частями, $\gamma_1(\eta_*)$ и $\gamma_2(\eta_*)$, сравниваются в точках $\eta_* - 1 \approx \pm 5.0$. В окрестности каждой сингулярности соответствующие собственные числа относятся к двум листам у корневой особенности. Важно, что при взятии обратного преобразования Фурье (32) эти точки ветвления не вносят вклада в пределе больших $|\rho|/\tau$. Действительно, предположим, что ρ положительно, и деформируем оба контура интегрирования для слагаемых с этими собственными значениями, как на рис. 2. Подынтегральные функции с предэкспонентами равны друг другу на штриховых частях контуров, но интегрирование проводится в противоположных направлениях, так что результаты интегрирования вдоль каждой штриховой части контура сокращают друг друга. Точно так же происходит сокращение пунктирных частей контуров разного цвета. Дальше можно объединить части контуров «1» и «2» в два соединенных контура, где подынтегральные функции аналитически продолжены с вещественной оси. Таким образом заключаем, что если сдвигать контуры интегрирования совместно в комплексной плоскости, то можно пренебречь этими точками ветвления.

Следовательно, на больших временах результат обратного преобразования Фурье задается поведением нулевого собственного значения и собственной функции в окрестности перевальной точки, которая находится на вещественной оси, что обеспечивает положительность плотности \mathcal{P}_ℓ . Перевальная точка является решением уравнения $\eta = -\partial_\xi S(\xi)$, где $\xi = \rho/\tau$. Зная $q_{2\eta}$, можно восстановить функцию энтропии. Результат согласуется со статистикой, полученной в результате численной симуляции ланжевеновских уравнений (6), (8). Отметим, что $S(\xi) \approx 3.2\xi^4$ на больших $|\xi| \gg 1$. Такое очень быстрое затухание функции распределения выполняется вплоть до $|\xi| \sim \varepsilon^{-2/3}$, после чего $S \sim (\rho/Dt)^2$, что обеспечивается членом $\sim D\partial_\rho^2 \mathcal{P}_\ell$, которым пренебрегли в правой части (31).

Значение экспоненты $q_{2\eta}$ (33) можно найти аналитически при $\eta = 2$ [34]. Для этого рассмотрим динамику $\langle \ell^2(t) \rangle$, которую можно связать с остальными квадратичными средними. Для случая коротко коррелированного во времени процесса $\zeta(t)$ из уравнения $d\ell/dt = (\dot{\Sigma} + \hat{\sigma})\ell$ получаем

$$\frac{d}{dt} \langle \ell_x^2 \rangle = 2\Sigma \langle \ell_x \ell_y \rangle, \quad \frac{d}{dt} \langle \ell_y^2 \rangle = 2D \langle \ell_x^2 \rangle,$$

$$\frac{d}{dt} \langle \ell^2 \rangle = 2[\Sigma \langle \ell_x \ell_y \rangle + D \langle \ell_x^2 \rangle], \quad \frac{d}{dt} \langle \ell_x \ell_y \rangle = \Sigma \langle \ell_y^2 \rangle.$$

Динамическая система в пределе сильного сдвига эквивалентна рассмотренной в [34], полученной в случае изотропных коротко коррелированных флуктуаций $\hat{\sigma}(t)$. Из этой системы можно прийти к выражению ляпуновской экспоненты для динамики $\langle \ell^2 \rangle$ как корню характеристического уравнения:

$$\langle \ell^2(t) \rangle \propto \exp(-q_4 t), \quad -(\lambda_c q_4)^3 = 4. \quad (34)$$

Вычисление $\langle \ell^2(t) \rangle$ с использованием приближенно выражения для функции Крамера S , приведенного в статье, дает такой же результат с относительной точностью 3%.

ЛИТЕРАТУРА

1. G. Falkovich, K. Gawedzki, and M. Vergassola, *Rev. Mod. Phys.* **73**, 913 (2001).
2. H. Xia, M. Shats, and G. Falkovich, *Phys. Fluids* **21**, 125101 (2009).
3. J. Laurie, G. Boffetta, G. Falkovich, I. Kolokolov, and V. Lebedev, *Phys. Rev. Lett.* **113**, 254503 (2014).
4. I. Kolokolov and V. Lebedev, *Phys. Rev. E* **93**, 033104 (2016).
5. I. Kolokolov and V. Lebedev, *J. Fluid Mech.* **809**, R2 (2016).
6. A. Frishman and C. Herbert, *Phys. Rev. Lett.* **120**, 204505 (2018).
7. A. N. Doludenko, S. V. Fortova, I. V. Kolokolov, and V. V. Lebedev, *Phys. Fluids* **33**, 011704 (2021).
8. A. Groisman and V. Steinberg, *Nature* **405**, 53 (2000).
9. A. Groisman and V. Steinberg, *Nature* **410**, 905 (2001).
10. V. Steinberg, *Ann. Rev. Fluid Mech.* **53**, 27 (2021).
11. G. Falkovich and N. Vladimirova, *Phys. Rev. Lett.* **121**, 164501 (2018).
12. H. Feng, M. G. Olsen, Y. Liu, R. O. Fox, and J. C. Hill, *AIChE J.* **51**, 2649 (2005).
13. T. Burghelca, E. Segre, I. Bar-Joseph, A. Groisman, and V. Steinberg, *Phys. Rev. E* **69**, 066305 (2004).
14. Y. Amarouchene and H. Kellay, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 214504 (2004).

15. Y. Jun and V. Steinberg, *Phys. Fluids* **22**, 123101 (2010).
16. А. М. Обухов, *Изв. АН СССР, сер. геогр. и геофиз.* **13**(1), 58 (1949).
17. S. Corrsin, *J. App. Phys.* **22**, 469 (1951).
18. G. K. Batchelor, *J. Fluid Mech.* **5**, 113 (1959).
19. K. R. Sreenivasan, *Proc. Nat. Acad. Sci.* **116**, 18175 (2019).
20. D. A. Donzis, K. Sreenivasan, and P. Yeung, *Flow. Turb. Comb.* **85**, 549 (2010).
21. D. Son, *Phys. Rev. E* **59**, R3811 (1999).
22. E. Balkovsky and A. Fouxon, *Phys. Rev. E* **60**, 4164 (1999)
23. S. Vergeles, *J. Exp. Theor. Phys.* **102**, 685 (2006).
24. B. I. Shraiman and E. D. Siggia, *Phys. Rev. E* **49**, 2912 (1994).
25. M. Souzy, I. Zaier, H. Lhuissier, T. Le Borgne, and B. Metzger, *J. Fluid Mech.* **838**, R3 (2018).
26. A. Celani, M. Cencini, M. Vergassola, E. Villermaux, and D. Vincenzi, *J. Fluid Mech.* **523**, 99 (2005).
27. K. Turitsyn, *J. Exp. Theor. Phys.* **105**, 655 (2007).
28. D. E. Smith, H. P. Babcock, and S. Chu, *Science* **283**, 1724 (1999).
29. Y. Liu and V. Steinberg, *Europhys. Lett.* **90**, 44005 (2010).
30. M. Šiler, L. Ornigotti, O. Brzobohatý, P. Jákł, A. Ryabov, V. Holubec, P. Zemánek, and R. Filip, *Phys. Rev. Lett.* **121**, 230601 (2018).
31. M. Chertkov, I. Kolokolov, V. Lebedev, and K. Turitsyn, *J. Fluid Mech.* **531**, 251 (2005).
32. A. Puliafito and K. Turitsyn, *Phys. D: Nonlin. Phenomena* **211**, 9 (2005).
33. R. S. Ellis, *Entropy, Large Deviations, and Statistical Mechanics*, Springer-Verlag (1985).
34. V. Klyatskin, W. Woyczynski, and D. Gurarie, in *Stochastic Modelling in Physical Oceanography*, Springer (1996), pp. 221–269.
35. I. Kolokolov and N. T. Trung, *Phys. Lett. A* **376**, 1836 (2012).
36. A. J. Majda, *Phys. Fluids A: Fluid Dyn.* **5**, 1963 (1993).
37. M. Avellaneda and A. J. Majda, *J. Stat. Phys.* **69**, 689 (1992).