

# ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ДВУХСЛОЙНЫХ МАКРОЧАСТИЦ

*А. В. Филиппов\**

*ГНЦ РФ Троицкий институт инновационных и термоядерных исследований  
108840, Москва, Троицк, Россия*

*Объединенный институт высоких температур Российской академии наук  
125412, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 6 марта 2023 г.,  
после переработки 22 марта 2023 г.  
Принята к публикации 22 марта 2023 г.

Исследовано влияние диэлектрической пленки на поверхности проводящих пылевых частиц на их электростатическое взаимодействие. Особое внимание уделено случаю, когда радиус одной из них много больше радиуса второй и случаю неравномерного распределения поверхностного заряда с вариантами равномерного распределения свободного заряда на каждой из макрочастиц по всей поверхности, по левым и/или правым полушариям. Разработана методика расчета медленно сходящихся рядов с использованием гипергеометрических функций Гаусса и путем введения новых функций, для которых получены рекуррентные соотношения и методика численного расчета.

DOI: 10.31857/S0044451023070040  
EDN:GDQXYJ

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Пылевая плазма является удобным объектом для изучения закономерностей развития сильно неидеальных открытых систем, поэтому ее исследование представляет значительный фундаментальной интерес [1–13]. Ее изучение имеет важное значение также для развития ряда приложений, например, индустрии производства наночастиц [14] и их нанесения на материалы с целью формирования тонких защитных пленок или пленок с уникальными физическими и химическими свойствами.

В последние годы металлические нано- и микро-размерные частицы привлекают все большее внимание из-за их многочисленных приложений [15–29]. Для многих из этих приложений, особенно для оптических, необходим регулярный массив частиц, который может быть легко сформирован на границе раздела жидкостей. В отличие от границы раздела твердое тело–жидкость, на которой возникают топологические дефекты, флюидная природа интерфейса из массива частиц позволяет им самовосстанавливаться без каких-либо внешних воздействий,

приводя к формированию удивительно однородных пленок, покрывающих большие площади [30,31]. Более того, благодаря своей бездефектности такие конструкции легко воспроизводятся и, будучи текучими, легко деформируются [31]. Развитие этих приложений требует исследования электростатического взаимодействия сферических частиц из металла, покрытых диэлектрической пленкой [32–34]. Данная задача является фундаментальной для разработки электрореологических наножидкостей [35], для чего требуется точное знание электростатической силы притяжения во внешнем электрическом поле между незаряженными частицами с проводящими ядрами, покрытыми диэлектрической пленкой.

Также в процессе нахождения пылевых частиц в плазме могут измениться свойства их поверхности, например, образоваться тонкий слой из материала с другими диэлектрическими свойствами. При этом изменится характер их электростатического взаимодействия. Заряженные пылевые частицы левитируют в областях повышенного электрического поля, которые обычно находятся около электродов или стенок, ограничивающих плазму. При этом в ВЧ-емкостном разряде электроды покрыты диэлектрической пленкой, т. е. имеют двухслойную структуру. В свете всего сказанного выше представляет интерес исследование электростатического взаимодействия

\* E-mail: fav@triniti.ru

двуслойных частиц, при этом электрод с диэлектрическим слоем может рассматриваться как сферическая макрочастица большого радиуса. Целью настоящей работы является именно решение данной задачи.

В работе [36] отмечалось, что вычисление силы между сферой и диэлектрической плоской стенкой является очень сложной задачей, поэтому электростатическая сила вычислялась путем замены плоской стенки большой сферой. В этой работе задача решалась методом переразложения сферических функций с полюсом в центре одной из макрочастиц по сферическим функциям с полюсом в центре другой. Такой же метод использовался в работе [37]. Трудность решения рассматриваемой задачи методом переразложения, как отмечалось в работе [38], связана с тем, что для коэффициентов разложения потенциала получается система уравнений с квадратной матрицей, порядок которой для достижения требуемой точности при уменьшении межчастичного расстояния быстро растет, а коэффициенты разложения все медленнее убывают с ростом номера.

При решении задачи о взаимодействии двух сферических макрочастиц с использованием бисферической системы координат система уравнений для коэффициентов разложения потенциала имеет блочно-диагональный вид и при сравнимых размерах шаров успешно решается, например, методом матричной прогонки [39].

Такой же метод для решения задачи взаимодействия сферической макрочастицы с плоской границей использовался в работах [40–42], причем в последних работах рассматривалось взаимодействие незаряженной сферической макрочастицы с незаряженной плоской границей во внешнем однородном электрическом поле. В работах [38, 43] было показано, что при сильно различающихся размерах возникает проблема задания «граничных» значений коэффициентов разложения со стороны больших мультипольных моментов (см. также [41]). В этих работах проблема была решена и был выполнен переход к бесконечному радиусу одной из макрочастиц.

Бисферическая система координат не позволяет рассмотреть задачу о взаимодействии двух макрочастиц даже в самом простом случае, когда только одна из них является двуслойной. Поэтому объявленная выше задача в настоящей работе будет решаться методом разложения потенциала по сферическим гармоникам. При этом будут рассмотрены варианты либо равномерного распределения свободного заряда по всей поверхности, либо распределе-

ния по левым и/или правым полушариям (относительно другой макрочастицы) обеих макрочастиц.

Развитая в настоящей работе методика расчета силы электростатического взаимодействия может быть использована при описании процесса взаимодействия наночастиц со стенкой в технологиях производства наночастиц [44, 45] и в технологии нанесения нанослоев [46], при калибровке атомных силовых микроскопов и точном выделении ван-дер-ваальсовского взаимодействия на малых расстояниях [47–51], при изучении адгезии заряженных частиц [52], моделировании процесса удаления мелких пылевых частиц из воздуха [53] и т. д. Также она может найти применение при описании электростатического взаимодействия частиц активной материи [54–56], в том числе и янус-частиц [57, 58]. Проблема удаления наночастиц в системах травления микросхем не теряет своей актуальности и сегодня [59], следовательно, актуальными являются и исследования взаимодействия наноразмерных частиц друг с другом, со стенками и подложкой.

## 2. ПОСТАНОВКА И МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ДВУХ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЗАРЯЖЕННЫХ ШАРОВ С СИЛЬНО РАЗЛИЧАЮЩИМИСЯ РАДИУСАМИ

Геометрия решаемой задачи приведена на рис. 1. В настоящей работе рассматривается случай, когда внутренние ядра макрочастиц являются проводниками, при этом для 2-й макрочастицы наличие металлического ядра будет учтено уже в окончательных выражениях. Такое строение макрочастиц выбрано для того, чтобы эффекты образования ди-

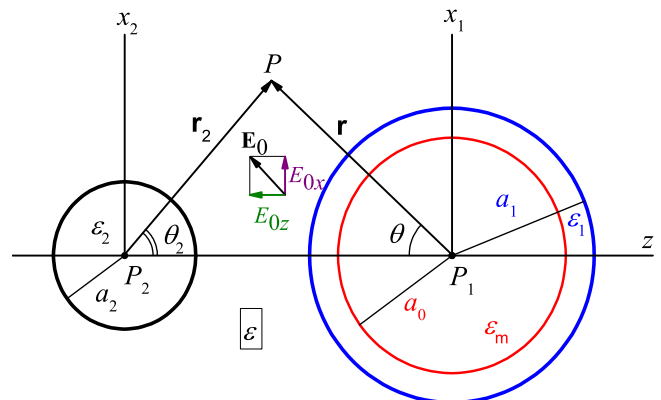


Рис. 1. Геометрия задачи взаимодействия макрочастиц с радиусами  $a_1$  и  $a_2$  в однородном внешнем электрическом поле  $E_0$  ( $a_0$  — радиус проводящего ядра,  $\epsilon$ ,  $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$  и  $\epsilon_m$  — диэлектрические проницаемости однородной среды, 1-й и 2-й макрочастиц и внутреннего ядра соответственно)

электрических пленок были наиболее заметными во взаимодействии макрочастиц. Отметим, что в случае образования металлических пленок на диэлектрических макрочастицах свойства электростатического взаимодействия полностью определяются металлической пленкой, поэтому такая задача является более простой и она уже решена многими авторами [60, 61].

Распределение потенциала внешнего однородного поля описывается выражением [60, 61]

$$\begin{aligned} \phi_E &= -E_{0z}r \cos \theta - E_{0x}r \sin \theta \cos \varphi = \\ &= E_{0z}r_2 \cos \theta_2 - E_{0x}r_2 \sin \theta_2 \cos \varphi - E_{0z}R, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $r, \theta$  и  $r_2, \theta_2$  — радиус и полярный угол в сферической системе координат соответственно с началом в центре 1-й макрочастицы и осью, направленной к центру другой макрочастицы (см. рис. 1) и наоборот,  $E_{0z}, E_{0x}$  —  $z$ - и  $x$ -компоненты вектора напряженности внешнего электрического поля  $\mathbf{E}_0$ ,  $R$  — расстояние между центрами макрочастиц.

Потенциал внутри 1-й макрочастицы с учетом проводящего ядра радиусом  $a_0$  определяется выражениями

$$\phi_0(r, \phi, \varphi) = V \equiv \text{const}, \quad r \leq a_0, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \phi_I(r, \theta, \varphi) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n P_n^m(\cos \theta) \times \\ &\times \left\{ r^{-(n+1)} [F_n^m \cos(m\varphi) + F_n^{-m} \sin(m\varphi)] + \right. \\ &\left. + r^n [C_n^m \cos(m\varphi) + C_n^{-m} \sin(m\varphi)] \right\}, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $r, \theta, \varphi$  — координаты точки наблюдения в сферической системе координат с полюсом в центре 1-й макрочастицы (см. рис. 1),  $a_1$  — радиус 1-й макрочастицы,  $V$  — постоянная, которая либо определяется из условия отсутствия свободных зарядов на проводящем ядре 1-й макрочастицы, либо задается как параметр задачи (если внутреннее ядро заземлено, то  $V = 0$ ),  $P_n^m$  — присоединенные функции Лежандра,  $C_n^{\pm m}$  и  $F_n^{\pm m}$  — коэффициенты разложения потенциала.

Внутри 2-й макрочастицы распределение потенциала имеет вид

$$\begin{aligned} \phi_{II}(r_2, \theta_2, \varphi) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n r_2^n P_n^m(\cos \theta_2) \times \\ &\times [D_n^m \cos(m\varphi) + D_n^{-m} \sin(m\varphi)], \end{aligned} \quad (4)$$

где  $r_2, \theta_2, \varphi$  — координаты точки наблюдения в сферической системе координат с полюсом в центре 2-й

макрочастицы (см. рис. 1),  $D_n^{\pm m}$  — коэффициенты разложения потенциала.

Распределение потенциала каждой макрочастицы в диэлектрике (вакууме) с проницаемостью  $\varepsilon$  будем искать в виде

$$\begin{aligned} \phi_1(r, \theta, \varphi) &= \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{R}{r}\right)^n P_n^m(\cos \theta) \times \\ &\times [A_n^m \cos(m\varphi) + A_n^{-m} \sin(m\varphi)], \\ \phi_2(r_2, \theta_2, \varphi) &= \frac{1}{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{R}{r_2}\right)^n P_n^m(\cos \theta_2) \times \\ &\times [B_n^m \cos(m\varphi) + B_n^{-m} \sin(m\varphi)], \end{aligned} \quad (5)$$

где  $A_n^{\pm m}$  и  $B_n^{\pm m}$  — коэффициенты разложения потенциалов.

Решение в области вне пылевых макрочастиц является суперпозицией (1) и (5):

$$\begin{aligned} \phi(r, \theta, \varphi) &= \phi_E(r, \theta, \varphi) + \\ &+ \phi_1(r, \theta, \varphi) + \phi_2(r_2, \theta_2, \varphi). \end{aligned} \quad (6)$$

Граничные условия для диэлектрических макрочастиц имеют вид [60, 61]

$$\begin{aligned} \phi_I(r, \theta, \varphi)|_{r=a_0} &= \phi_0(r, \theta, \varphi)|_{r=a_0}, \\ \phi(r, \theta, \varphi)|_{r=a_1} &= \phi_I(r, \theta, \varphi)|_{r=a_1}, \\ \phi(r_2, \theta_2, \varphi)|_{r_2=a_2} &= \phi_{II}(r_2, \theta_2, \varphi)|_{r_2=a_2}; \\ \varepsilon_1 \frac{\partial \phi_I}{\partial r} \Big|_{r=a_1} - \varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial r} \Big|_{r=a_1} &= 4\pi\sigma_1, \\ \varepsilon_2 \frac{\partial \phi_{II}}{\partial r_2} \Big|_{r_2=a_2} - \varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial r_2} \Big|_{r_2=a_2} &= 4\pi\sigma_2, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $\sigma_i$  — распределение плотности свободного заряда по поверхности  $i$ -й макрочастицы,  $i = 1, 2$ .

Разложение сферических гармоник, связанных с системой координат с полюсом в центре 2-й макрочастицы, по сферическим гармоникам в системе координат с полюсом в центре 1-й макрочастицы при  $r < R$  имеет вид [62, 63]

$$\begin{aligned} \frac{P_n^m(\cos \theta_2)}{r_2^{n+1}} &= \frac{1}{R^{n+1}} \sum_{k=m}^{\infty} C_{k+n}^{k-m} \times \\ &\times \left(\frac{r}{R}\right)^k P_k^m(\cos \theta), \end{aligned} \quad (9)$$

где  $C_{k+n}^{k-m}$  — биномиальный коэффициент (число сочетаний),

$$C_{k+n}^{k-m} = \frac{(k+n)!}{(k-m)!(n+m)!}.$$

Аналогичное выражение имеет место для разложения  $P_n^m(\cos \theta)/r^{n+1}$  при  $r_2 < R$ .

В итоге распределение потенциала 2-й макрочастицы в системе координат 1-й (при  $r < R$ ) примет вид

$$\phi_2(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{R} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^k \sum_{n=m}^{\infty} C_{n+k}^{k-m} \left(\frac{r}{R}\right)^n \times \\ \times \left[ B_k^m \cos(m\varphi) + B_k^{-m} \sin(m\varphi) \right] P_n^m(\cos\theta). \quad (10)$$

Для определения силы взаимодействия нам необходимо найти коэффициенты  $A_n^{\pm m}$  и  $B_n^{\pm m}$ , для нахождения которых из граничных условий (7), (8), используя (1)–(6) и (10), получаем систему уравнений ( $n = 1, 2, \dots, \infty, m = 0, 1, \dots, n$ )

$$\beta_{1,n} A_n^{\pm m} + (\varepsilon_1 \zeta_n - \varepsilon) x^{2n+1} \times \\ \times \sum_{k=m}^{\infty} C_{n+k}^{k-m} B_k^{\pm m} = \frac{x^n}{n} \alpha_{1,n}^{\pm m} + \\ + a_1^2 x (\varepsilon_1 \zeta_1 - \varepsilon) \delta_{n,1} (E_{0z} \delta_{m,0} + E_{0x} \delta_{m,1}), \quad (11)$$

$$\beta_{2,n} B_n^{\pm m} + (\varepsilon_2 - \varepsilon) y^{2n+1} \times \\ \times \sum_{k=m}^{\infty} C_{n+k}^{k-m} A_k^{\pm m} = \frac{y^n}{n} \alpha_{2,n}^{\pm m} - \\ - a_2^2 y (\varepsilon_2 - \varepsilon) \delta_{n,1} (E_{0z} \delta_{m,0} - E_{0x} \delta_{m,1}). \quad (12)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\zeta_n = \frac{1 + (1 + n^{-1}) v^{2n+1}}{1 - v^{2n+1}}, \quad x = \frac{a_1}{R}, \quad y = \frac{a_2}{R}, \quad v = \frac{a_0}{a_1}, \\ \beta_{1,n} = \frac{n \varepsilon_1 \zeta_n + \varepsilon (n + 1)}{n}, \quad \beta_{2,n} = \frac{\varepsilon_2 n + \varepsilon (n + 1)}{n}, \\ \alpha_{1,n}^{\pm m} = 4\pi a_1^2 \sigma_{1,n}^{\pm m}, \quad \alpha_{2,n}^{\pm m} = 4\pi a_2^2 \sigma_{2,n}^{\pm m},$$

$\delta_{n,k}$  – символ Кронекера, который равен 1 при  $n = k$  и 0 при  $n \neq k$ .

Для  $n = 0$  коэффициенты разложения определяются выражениями

$$A_0 = \frac{q_0 + q_1}{\varepsilon}, \quad B_0 = \frac{q_2}{\varepsilon}, \quad (13)$$

где  $q_i = 4\pi a_i^2 \sigma_{i,0}$ ,  $i = 1, 2$ ,  $q_0$  – заряд, наведенный на проводящем ядре 1-й макрочастицы. В случае изолированного ядра  $q_0 = 0$  и коэффициент  $A_0$ , как и  $B_0$ , определяется зарядом макрочастицы. В случае поддержания постоянного потенциала  $V$  на проводящем ядре на нем появляется заряд

$$q_0 = \frac{\varepsilon_1 a_0}{\varepsilon + (\varepsilon_1 - \varepsilon) v} \left( \varepsilon V - \frac{q_1}{a_1} - \frac{\varepsilon}{R} \sum_{k=0}^{\infty} B_k \right). \quad (14)$$

В этом случае коэффициент  $A_0$  уже зависит от окру-

жающих 1-ю макрочастицу зарядов и определяется уравнением

$$A_0 + \frac{\varepsilon_1 a_0 x}{\varepsilon_1 a_0 + \varepsilon (a_1 - a_0)} \sum_{k=0}^{\infty} B_k = \\ = \frac{q_1}{\varepsilon} - \frac{\varepsilon_1 a_0}{\varepsilon_1 a_0 + \varepsilon (a_1 - a_0)} \left( \frac{q_1}{\varepsilon} - V a_1 \right). \quad (15)$$

Следовательно, в этом случае уравнение (15) для  $A_0$  должно решаться вместе с системой уравнений (11) и (12).

### 3. АКСИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СВОБОДНЫХ ЗАРЯДОВ

Далее подробно рассмотрим аксиально-симметричное распределение свободных зарядов во внешнем поле, направленном вдоль оси  $z$ . В этом случае для определения коэффициентов разложения потенциалов из уравнений (11), (12) получаем систему ( $n = 1, 2, \dots$ )

$$\beta_{1,n} A_n + x^{2n+1} (\varepsilon_1 \zeta_n - \varepsilon) \sum_{k=1}^{\infty} C_{n+k}^k B_k = \frac{x^n}{n} \alpha_{1,n} - \\ - (x^{2n+1} B_0 - E_{0z} a_1^2 x \delta_{n,1}) (\varepsilon_1 \zeta_n - \varepsilon), \quad (16)$$

$$\beta_{2,n} B_n + y^{2n+1} (\varepsilon_2 - \varepsilon) \sum_{k=0}^{\infty} C_{n+k}^k A_k = \\ = \frac{y^n}{n} \alpha_{2,n} - E_{0z} a_2^2 y \delta_{n,1} (\varepsilon_2 - \varepsilon). \quad (17)$$

Далее в основном будем изучать случай, когда  $a_1 \gg a_2$ , так как решение задачи в случае сравнимых размеров макрочастиц не вызывает трудностей. Ниже везде принято, что 1-й макрочастицей является макрочастица с не меньшим радиусом. Для достижения нужной точности в случае сильно различающихся радиусов требуется значительно меньшее число коэффициентов  $B_n$  для меньшей макрочастицы, чем коэффициентов  $A_n$  для большей макрочастицы.

Как видно из уравнений (16) и (17), коэффициенты  $A_n$  убывают как  $x^{2n+1}$ , а коэффициенты  $B_n$  – как  $y^{2n+1}$ . При близко расположенных макрочастицах межчастичное расстояние приблизительно равно сумме радиусов макрочастиц:  $R \approx a_1 + a_2$ , поэтому  $y \approx a_2/a_1 \ll 1$  и  $x \approx 1 - a_2/a_1 \approx 1$ . Следовательно, для достижения заданной точности  $\delta$  нужно учесть следующее число членов разложения:

$$n_B \approx \frac{\ln \delta}{2 \ln y}, \quad n_A \approx \frac{\ln \delta}{2 \ln x}. \quad (18)$$

При  $\delta = 10^{-15}$ ,  $L \ll a_2$ ,  $R \approx a_1 + a_2$  из (18) имеем данные, представленные в табл. 1. Видно, что

чем сильнее отличаются радиусы макрочастиц, тем меньше членов разложения нужно учитывать для меньшей макрочастицы. Нужно отметить, что из-за особенностей членов ряда в сумме для определения силы требуется существенно большее число членов для достижения точности в 6–7 знаков. В настоящей работе нужное число членов определялось с  $\delta = 10^{-81}$ , т.е. было почти на порядок больше приведенных в табл. 1.

**Таблица 1.** Количество требуемых для достижения заданной точности  $\delta = 10^{-15}$  членов разложения потенциалов (5) при  $L \ll a_2, R = a_1 + a_2$

$a_1/a_2$	1	10	100	1000
$n_A$	25	181	1736	17280
$n_B$	25	78	4	3

Из уравнений (16) найдем коэффициенты  $A_n$  и исключим их из уравнений (17). В итоге после простых преобразований с учетом (15) получим

$$\beta_{2,n}B_n - y^{2n+1}(\varepsilon_2 - \varepsilon) \sum_{j=1}^{\infty} (S_{nj} + \vartheta_B)B_j = b_n, \quad (19)$$

где введены следующие обозначения:

$$S_{nj} = \sum_{k=1}^{\infty} C_{n+k}^k C_{j+k}^k \frac{x^{2k+1}}{\beta_{1,k}} (\varepsilon_1 \zeta_k - \varepsilon), \quad (20)$$

$$b_n = \frac{y^n}{n} \alpha_{2,n} - y^{2n+1}(\varepsilon_2 - \varepsilon) \times \\ \times (Q_n - y^{2n+1}B_0S_{n0} + \vartheta_A) - E_{0z}(\varepsilon_2 - \varepsilon) \times \\ \times \left[ a_2^2 y \delta_{n,1} + y^{2n-1} \frac{n+1}{\beta_{1,1}} (\varepsilon_1 \zeta_1 - \varepsilon) x^3 \right], \quad (21)$$

$$Q_n = \sum_{k=1}^{\infty} C_{n+k}^k \frac{\alpha_{1,k}}{k\beta_{1,k}} x^k, \quad (22)$$

$$\vartheta_A = \begin{cases} q_1/\varepsilon, & q_0 = 0, \\ \frac{\varepsilon_1 a_0 (a_1 V - x B_0) + (a_1 - a_0) q_1}{(\varepsilon_1 - \varepsilon) a_0 + \varepsilon a_1}, & V = \text{const}, \end{cases}$$

$$\vartheta_B = \begin{cases} 0, & q_0 = 0, \\ \frac{\varepsilon_1 a_0 x}{(\varepsilon_1 - \varepsilon) a_0 + \varepsilon a_1}, & V = \text{const}. \end{cases}$$

Из выражения (20) видна сложность нахождения суммы ряда при близких к единице значениях  $x$ , так как при больших  $k$  имеет место асимптотическое поведение  $\beta_{1,k} \rightarrow 1, \zeta_k \rightarrow 1$ , поэтому отношение  $k$ -го члена ряда к члену с номером  $(k-1)$  ведет себя как  $x^2(1+n/k)(1+j/k)$  и становится меньше 1 только при  $k > (n+j)/2y$ . Суммирование ряда в выражении (22) для нахождения  $Q_n$  вызывает трудности при равномерной зарядке только половины шара и

этот случай мы рассмотрим ниже. В случае равномерной зарядки всей поверхности первой макрочастицы все коэффициенты  $Q_n$  примут нулевое значение.

Для нахождения величин  $S_{nj}$  используем следующее разложение:

$$\frac{\varepsilon_1 \zeta_k - \varepsilon}{\beta_{1,k}} = \tau_0 + \frac{\tau_1}{k+1} + \frac{\tau_2}{(k+1)(k+2)} + \\ + \frac{\tau_3}{(k+1)(k+2)[\varepsilon_1 k + \varepsilon(k+1)]} + \\ + v^{2k+1} \left[ \tau_{z0} + \frac{\tau_{z1}}{k+1} + \frac{\tau_{z2}}{(k+1)(k+2)} + f_k \right], \quad (23)$$

где

$$\tau_0 = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon}{\varepsilon_1 + \varepsilon}, \quad \tau_1 = -\tau_0 \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1 + \varepsilon}, \quad \tau_2 = \tau_1 \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon}, \quad (24)$$

$$\tau_3 = \tau_2(2\varepsilon_1 + \varepsilon);$$

$$\tau_{z0} = \frac{4\varepsilon\varepsilon_1}{(\varepsilon_1 + \varepsilon)^2}, \quad \tau_{z1} = \tau_{z0} \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon}{\varepsilon_1 + \varepsilon}, \quad (25)$$

$$\tau_{z2} = \tau_{z1} \frac{5\varepsilon_1 - \varepsilon}{4(\varepsilon_1 + \varepsilon)},$$

$f_k$  — остаток, пропорциональный  $k^{-3}$ . В результате имеем

$$S_{nj} = \sum_{i=0}^2 [\tau_i S_{nj}^i(x) + \tau_{zi} S_{nj}^i(xv)] + \Delta S_{nj}, \quad (26)$$

$$\Delta S_{nj} = - \sum_{k=1}^{\infty} C_{n+k}^k C_{j+k}^k x^{2k+1} \times \\ \times \left\{ \frac{\tau_3}{(k+1)(k+2)[\varepsilon_1 k + \varepsilon(k+1)]} - \right. \\ \left. - f_k v^{2k+1} \right\}. \quad (27)$$

Здесь  $S_{nj}^i$  — функции, определенные суммами:

$$S_{nj}^i(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(n+k)!}{k!n!} \frac{(j+k)!}{j!(k+i)!} x^{2k+1} \equiv \\ \equiv \frac{x}{i!} [{}_2F_1(n+1, j+1; i+1; x^2) - 1], \quad (28)$$

где  ${}_2F_1$  — гипергеометрическая функция Гаусса [64, 65] (см. Приложение А).

### 3.1. Вычисление коэффициентов $Q_n$ в случае неравномерного распределения свободного заряда

Рассмотрим задачу с однородным распределением свободного заряда только по правой половине поверхности первого шара:

$$\sigma_1(\theta) = \sigma \begin{cases} 1, & 0 \leq \theta \leq \pi/2, \\ 0, & \pi/2 < \theta \leq \pi. \end{cases} \quad (29)$$

Разложим распределение свободного заряда по полиномам Лежандра:

$$\sigma_1(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_{1,n} P_n(\cos \theta), \quad (30)$$

где для распределения (29)

$$\begin{aligned} \sigma_{1,n=2k+1} &= \sigma(-1)^k \frac{(2k-1)!(4k+3)}{2^{k+2}(k+1)!}, \\ k &= 0, 1, 2, \dots, (n = 1, 3, 5, \dots); \quad (31) \\ \sigma_{1,n=0} &= \frac{1}{2}\sigma; \quad \sigma_{1,n=2k} = 0, \quad k = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

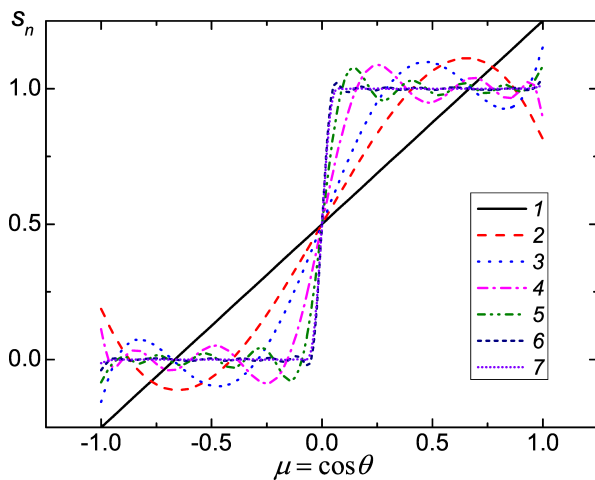
В этом случае вызывает определенные трудности вычисление величины  $Q_n$  из выражения (22), так как члены ряда очень медленно убывают с ростом номера для рассматриваемого распределения заряда (см. рис. 2). Используя (31), из (22) находим

$$\begin{aligned} Q_n &= \frac{\pi a_1^2 \sigma x}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+2k+1)!}{k!(k+1)!} \frac{4k+3}{2k+1} \times \\ &\times \frac{1}{(2k+1)\varepsilon_1 \zeta_{2k+1} + \varepsilon(2k+2)} \left(-\frac{x^2}{4}\right)^k. \quad (32) \end{aligned}$$

Для ускорения сходимости ряда (32) используем разложение:

$$\begin{aligned} \frac{4k+3}{(2k+1)[(2k+1)\zeta_{2k+1}\varepsilon_1 + \varepsilon(2k+2)]} &= \\ &= \frac{\varepsilon_{Q1}}{k+2} + \frac{\varepsilon_{Q2}}{(k+2)(k+3)} + \Theta_k, \quad (33) \end{aligned}$$

где  $\Theta_k$  — член, убывающий как  $k^{-3}$ , коэффициенты



**Рис. 2.** Зависимость конечной суммы  $s_n = \sum_{n=0}^N \sigma_{1,n} P_n(\mu)$  от полярного угла  $\mu = \cos \theta$  при разных значениях числа учитываемых членов при суммировании (30):  $N = 1$  (кривая 1), 3 (2), 5 (3), 11 (4), 21 (5), 101 (6) и 1001 (7)

$\varepsilon_{Q1}$  и  $\varepsilon_{Q2}$  определены соотношениями

$$\varepsilon_{Q1} = \frac{1}{\varepsilon_1 + \varepsilon}, \quad \varepsilon_{Q2} = \frac{7(\varepsilon_1 + \varepsilon) - 2\varepsilon}{4(\varepsilon_1 + \varepsilon)^2}.$$

Введем функцию, определенную рядом:

$$T_n^a = \frac{1}{(n-1)!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k+n)!}{k!(k+a)!} z^k. \quad (34)$$

Процедура вычисления этой функции описана в Приложении В. Тогда функции  $Q_n$  вычисляются по формуле

$$\begin{aligned} Q_n &= \pi a_1^2 \sigma x \left[ \varepsilon_{Q1} T_{n+1}^2 \left(-\frac{1}{4}x^2\right) + \right. \\ &\left. + \varepsilon_{Q2} T_{n+1}^3 \left(-\frac{1}{4}x^2\right) + \Lambda_n \right], \quad (35) \end{aligned}$$

где  $\Lambda_n$  — быстро сходящаяся величина (см. формулы (32) и (33)),

$$\Lambda_n = \sum_{k=0}^{\infty} \Theta_k \Phi_k, \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \Theta_k &= \left(2 + \frac{1}{2k+1}\right) \frac{1}{(2k+1)\beta_{1,2k+1}} - \\ &- \frac{\varepsilon_{Q1}}{k+2} - \frac{\varepsilon_{Q2}}{(k+2)(k+3)}, \quad (37) \end{aligned}$$

а величины  $\Phi_k$  легко вычисляются с помощью рекуррентного соотношения:

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= n+1, \\ \Phi_k &= -x^2 \Phi_{k-1} \left(1 + \frac{n}{2k}\right) \left[1 + \frac{n-1}{2(k+1)}\right], \quad (38) \\ k &= 1, 2, \dots \end{aligned}$$

#### 4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СИЛЫ, ДЕЙСТВУЮЩЕЙ НА ПЕРВУЮ МАКРОЧАСТИЦУ

Сила, действующая на 1-ю макрочастицу, через максвеллов тензор натяжения  $\mathbf{T}$  определяется выражением [60]

$$\mathbf{F} = \oint \mathbf{T}_n \cos \theta dS, \quad (39)$$

где  $\mathbf{T}_n$  — нормальная (к поверхности 1-й макрочастицы) составляющая тензора натяжений,

$$\mathbf{T}_n = \frac{\varepsilon}{4\pi} \left( E_n \mathbf{E} - \frac{1}{2} n \mathbf{E}^2 \right). \quad (40)$$

Отсюда для определения  $z$ -составляющей силы находим

$$F_z = \frac{\varepsilon a_1^2}{4} \int_0^\pi [(E_r^2 - E_\theta^2) \cos \theta -$$

$$- 2E_r E_\theta \sin \theta] \sin \theta d\theta, \quad (41)$$

где  $E_r, E_\theta$  — составляющие напряженности электрического поля в сферической системе координат:

$$E_r = -\frac{\partial\phi}{\partial r}, \quad E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial\theta}.$$

После интегрирования (41), используя свойства полиномов Лежандра [62, 63], для определения силы получим выражение

$$F_z = \varepsilon A_0 E_{0z} - \frac{\varepsilon}{R^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+n+1)!}{k!n!} A_n B_k. \quad (42)$$

Из уравнения (16) можно получить следующее соотношение ( $n = 0, 1, \dots$ ):

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_{k+n+1}^k B_k = \left(\frac{R}{a_1}\right)^{n+2} \left[ \frac{4\pi a_1^2 \sigma_{1,n+1}}{(\varepsilon_1 \zeta_{n+1} - \varepsilon)(n+1)} - \frac{\beta_{1,n+1}}{\varepsilon_1 \zeta_{n+1} - \varepsilon} \left(\frac{R}{a_1}\right)^{n+1} A_{n+1} \right]. \quad (43)$$

Теперь, используя (43), из (42) получаем еще одно выражение для определения силы:

$$F_z = \varepsilon A_0 E_{0z} - \frac{q_1 q_2}{\varepsilon R^2} - \frac{q_1}{R^2} \sum_{k=1}^{\infty} (k+1) B_k - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{R}{a_1}\right)^n \frac{4\pi \varepsilon \sigma_{1,n+1}}{\varepsilon_1 \zeta_{n+1} - \varepsilon} A_n + \frac{\varepsilon}{a_1^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)\beta_{1,n+1}}{\varepsilon_1 \zeta_{n+1} - \varepsilon} \left(\frac{R}{a_1}\right)^{2n+1} A_n A_{n+1}. \quad (44)$$

В случае однородного распределения свободного заряда по поверхности из (44) вытекает, что

$$F_z = \varepsilon A_0 E_{0z} - \frac{q_1 q_2}{\varepsilon R^2} - \frac{q_1}{R^2} \sum_{k=1}^{\infty} (k+1) B_k + \frac{\varepsilon}{a_1^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)\beta_{1,n+1}}{\varepsilon_1 \zeta_{n+1} - \varepsilon} \frac{R^{2n+1}}{a_1^{2n+1}} A_n A_{n+1}. \quad (45)$$

Из (45) при  $a_0 = 0$  (при этом  $\zeta_n = 1$ ) следует

$$F_z = \varepsilon A_0 E_{0z} - \frac{q_1 q_2}{\varepsilon R^2} - \frac{q_1}{R^2} \sum_{k=1}^{\infty} (k+1) B_k + \frac{\varepsilon}{a_1^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)\varepsilon_1 + \varepsilon(n+2)}{\varepsilon_1 - \varepsilon} \frac{R^{2n+1}}{a_1^{2n+1}} A_n A_{n+1}. \quad (46)$$

В общем случае для силы, действующей на 2-ю макрочастицу, выполнив аналогичные шаги как и при выводе выражения (42), можно получить

$$F_{2z} = \varepsilon B_0 E_{0z} + \frac{\varepsilon}{R^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+n+1)!}{k!n!} A_k B_n. \quad (47)$$

Двойные суммы в выражениях (42), (47) симметричны относительно перестановки индексов  $k$  и  $n$ , следовательно, они равны друг другу. Поэтому сравнение выражений (42) и (47) показывает, что при наличии внешнего электрического поля силы, действующие на макрочастицы, не равны друг другу. Сложив выражения (42) и (47), для суммарной силы, действующей на систему из двух макрочастиц, находим

$$F_\Sigma = F_z + F_{2z} = \varepsilon(A_0 + B_0)E_{0z} = (q_1 + q_2)E_{0z}. \quad (48)$$

Последний переход в этом выражении сделан для случая  $q_0 = 0$ .

Теперь перейдем к численной процедуре вычисления силы. Далее для простоты положим, что внешнее поле отсутствует:  $E = 0$ . Из выражения (16) видно, что коэффициенты  $A_n$  в этом случае можно представить в виде двух слагаемых ( $n = 1, 2, \dots$ ):

$$A_n = A_{\sigma n} + A_{bn}, \quad (49)$$

где слагаемые определены выражениями

$$A_{\sigma n} = \frac{4\pi a_1^2 \sigma_{1,n}}{n\beta_{1,n}} x^n, \quad (50)$$

$$A_{bn} = -\frac{\varepsilon_1 \zeta_n - \varepsilon}{\beta_{1,n}} x^{2n+1} \sum_{m=0}^{\infty} C_{n+m}^m B_m.$$

Используя (49), представим выражение (42) в виде

$$F_z = F_C + F_{1p} + F_\sigma + F_b, \quad (51)$$

где

$$F_C = -\frac{\varepsilon A_0 B_0}{R^2}, \quad (52)$$

$$F_{1p} = -\frac{\varepsilon A_0}{R^2} \sum_{k=1}^{\infty} (k+1) B_k, \quad (53)$$

$$F_\sigma = -\frac{\varepsilon}{R^2} \sum_{k=0}^{n_B} \frac{B_k}{k!} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(k+n+1)!}{n!} A_{\sigma n}, \quad (54)$$

$$F_b = -\frac{\varepsilon}{R^2} \sum_{k=0}^{n_B} \frac{B_k}{k!} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(k+n+1)!}{n!} A_{bn}. \quad (55)$$

Слагаемыми в выражении (51) являются сила Кулона (52), сила взаимодействия монополярного члена в свободном заряде 1-й макрочастицы с поляризованным зарядом 2-й макрочастицы (53), сила, вызванная неравномерным распределением свободного заряда на поверхности 1-й макрочастицы (54) и сила взаимодействия поляризованного заряда 1-й макрочастицы с поляризованным зарядом 2-й макрочастицы (55).

В случае равномерного распределения свободного заряда по всей поверхности 1-й макрочастицы  $A_{\sigma 0} = q_1/\varepsilon$ ,  $A_{\sigma n} = 0$  для  $n \geq 1$ . Следовательно, в этом случае  $F_{\sigma} = 0$ . Для распределения свободного заряда, задаваемого формулой (29), из (54) находим

$$F_{\sigma} = -\pi\varepsilon x^3 \sigma \sum_{m=0}^{n_B} \frac{B_m}{m!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(m+2k+2)!}{k!(k+1)!} \times \frac{4k+3}{(2k+1)^2} \frac{1}{\beta_{1,2k+1}} \left(-\frac{x^2}{4}\right)^k. \quad (56)$$

Используя (33), это выражение можно привести к виду

$$F_{\sigma} = -\pi\varepsilon x^3 \left\{ \sigma \sum_{m=0}^{n_B} B_m(m+1) \times \left[ \varepsilon_{Q1} T_{m+2}^2 \left(-\frac{x^2}{4}\right) + \varepsilon_{Q2} T_{m+2}^3 \left(-\frac{x^2}{4}\right) \right] + \sum_{m=0}^{n_B} \frac{B_m}{m!} \sum_{k=0}^{\infty} \Theta_k \frac{(m+2k+2)!}{k!(k+1)!} \left(-\frac{x^2}{4}\right)^k \right\}, \quad (57)$$

где  $\Theta_k$  определены выражением (37).

Используя определение (50), из (55) находим

$$F_b = \frac{\varepsilon}{R^2} \sum_{k=0}^{n_B} \sum_{m=0}^{n_B} B_k B_m \Lambda_{k,m}, \quad (58)$$

где

$$\Lambda_{k,m} = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) C_{k+n+1}^k C_{n+m}^m \times \frac{\varepsilon_1 \zeta_n - \varepsilon}{\beta_{1,n}} x^{2n+1}. \quad (59)$$

Используя разложение (23) и выражение (26), с учетом равенства

$$(n+1)C_{k+n+1}^k = (k+1)C_{k+n+1}^{k+1}$$

из (59) можно найти

$$\Lambda_{k,m} = (k+1)S_{k+1,m}. \quad (60)$$

В заключение данного раздела отметим, что выражение для силы (44) можно представить в виде, удобном для расчетов в случае сравнимых радиусов макрочастиц:

$$F_z = -\frac{q_1 q_2}{\varepsilon R^2} - \frac{q_1}{R^2} \sum_{k=1}^{n_B} (k+1)B_k - \frac{\varepsilon}{R^2} \sum_{n=1}^{n_A} \frac{(n+1)\alpha_{1,n}}{n\varepsilon_1 \zeta_n + \varepsilon(n+1)} x^n \tilde{A}_{n+1} +$$

$$+ \frac{\varepsilon}{R^2} \sum_{n=1}^{n_A} \frac{n(n+1)(\varepsilon_1 \zeta_n - \varepsilon)}{n\varepsilon_1 \zeta_n + \varepsilon(n+1)} x^{2n+1} \tilde{A}_n \tilde{A}_{n+1}, \quad (61)$$

где введены редуцированные коэффициенты:

$$\tilde{A}_n = \sum_{k=0}^{n_B} C_{n+k}^k B_k.$$

В случае наличия металлического ядра у второй макрочастицы в уравнениях, например, (12), (17), (19) и (21), содержащих  $\varepsilon_2$ , эта величина заменится на величину

$$\varepsilon_{2,n} = \varepsilon_2 \frac{1 + (1+n^{-1})(a_{20}/a_2)^{2n+1}}{1 - (a_{20}/a_2)^{2n+1}},$$

где  $a_{20}$  — радиус металлического ядра второй макрочастицы.

#### 4.1. Взаимодействие точечного заряда со сферической макрочастицей с неоднородным распределением свободного заряда по ее поверхности

Для проверки полученных выше выражений для силы рассмотрим случай, когда 2-я макрочастица является точечной. Переход к этому случаю легко осуществляется равенством  $\varepsilon_2 = \varepsilon$ . Из (17) в этом случае имеем  $B_n = 0$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , и из (16) легко находим

$$A_n = \frac{x^n}{n\beta_{1,n}} \alpha_{1,n} - (x^{2n+1} B_0 - E_{0z} a_1^2 x \delta_{n,1}) \times \frac{\varepsilon_1 \zeta_n - \varepsilon}{\beta_{1,n}}, \quad n = 1, 2, \dots$$

В случае однородного распределения свободного заряда по всей поверхности 1-й макрочастицы  $A_{\sigma n} = 0$  для  $n \geq 1$  и, следовательно,  $F_{\sigma} = 0$ . Из (55) в этом случае следует, что

$$F_b = \frac{q_2^2}{\varepsilon R^2} \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon}{n\varepsilon_1 + (n+1)\varepsilon} x^{2n+1}. \quad (62)$$

Это выражение совпадает с хорошо известной формулой для силы взаимодействия точечного заряда со сферической макрочастицей [60]. Используя разложение (23), из этого выражения находим<sup>1)</sup>

$$F_{b0} = \frac{q_2^2}{\varepsilon R^2} \left\{ \tau_0 x [{}_2F_1(1, 2; 1; x^2) - 1] + \tau_1 x [{}_2F_1(1, 2; 2; x^2) - 1] + \right.$$

<sup>1)</sup> При получении данного выражения принято во внимание, что  $n+1 = (2)_n/(1)_n$ ,  $1 = (1)_n/(1)_n = (2)_n/(2)_n$ ,  $(n+2)^{-1} = \frac{1}{2}(2)_n/(3)_n$ .



**Таблица 2.** Сила взаимодействия, рассчитанная по изложенной в настоящей работе методике при следующих параметрах:  $\sigma_1/e = 10^{-2} \text{ нм}^{-2}$ ,  $q_2/e = 385$ ,  $a_2 = 100 \text{ нм}$ ,  $a_0 = 0$ ,  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 4$  (окись кремния),  $\varepsilon = 1$  при  $L = 0.1 \text{ нм}$  для различных значений отношения  $a_1/a_2$  (символ  $W$  в нижнем индексе в обозначении силы означает распределение свободного заряда по всей поверхности сферы,  $R$  — по правой половине поверхности сферы)

$a_1/a_2$	$F_{z(W)}, 10^{-9} \text{ Н}$	$F_{z(W)}/F_C$	$n_A$	$F_{z(R)}, 10^{-9} \text{ Н}$	$F_{z(R)}/F_C$
10	5.8064	0.6296	941	4.7523	1.0306
$10^2$	9.2337	0.8439	6671	6.8628	1.2544
$10^3$	9.7169	0.8723	57006	7.1542	1.2845
$10^4$	9.7673	0.8752	523803	7.1845	1.2876

$$+ \frac{1}{2} \tau_2 x [ {}_2F_1(1, 2; 3; x^2) - 1 ] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau_3}{(n+2)[\varepsilon_1 n + \varepsilon(n+1)]} x^{2n+1} \}. \quad (63)$$

Полная сила будет определяться суммой кулоновского члена (52) и выражения (63). Отметим, что

$${}_2F_1(1, 2; 1; z) = \frac{1}{(1-z)^2},$$

$${}_2F_1(1, 2; 2; z) = \frac{1}{1-z},$$

$${}_2F_1(1, 2; 3; z) = -\frac{2}{z^2} [z + \ln(1-z)].$$

В случае однородного распределения свободного заряда только по половине поверхности 1-й частицы из (54), используя (31) и (50), для случая точечной 2-й частицы (отлично от нуля только  $B_0$ ), можно получить

$$F_{\sigma 0} = -\frac{q_1 q_2 x}{R_2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{(k!)^2} \times \frac{4k+3}{(2k+1)\varepsilon_1 \zeta_{2k+1} + \varepsilon(2k+2)} \left(-\frac{x^2}{4}\right)^k. \quad (64)$$

С целью дополнительной проверки полученных выше результатов применим вместо (38) другое разложение:

$$\left[ 1 + \frac{\varepsilon - \varepsilon_1}{(4k+3)(\varepsilon_1 + \varepsilon)} \right]^{-1} = 1 + \frac{\eta_{1,1}}{k+1} + \frac{\eta_{1,2}}{(k+1)(k+2)} + \frac{\eta_{1,3}}{(k+1)(k+2)[(2k+1)\varepsilon_1 + (2k+2)\varepsilon]}, \quad (65)$$

где

$$\eta_{1,1} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon}{4(\varepsilon_1 + \varepsilon)},$$

$$\eta_{1,2} = \frac{\varepsilon_1 \eta_{1,1}}{2(\varepsilon_1 + \varepsilon)}, \quad (66)$$

$$\eta_{1,3} = \eta_{1,2}(3\varepsilon_1 + 2\varepsilon).$$

Используем следующие суммы [66] ( $|z| < 1/4$ ):

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{(k!)^2} z^k = \frac{1}{(1-4z)^{1/2}},$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)! z^{k+1}}{k!(k+1)!} = \frac{1}{2} [1 - (1-4z)^{1/2}], \quad (67)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)! z^{k+2}}{k!(k+2)!} = \frac{1}{12} [(1-4z)^{3/2} + 6z - 1].$$

Окончательно из (64) и (65) находим

$$F_{\sigma 0} = -\frac{2q_1 q_2 x}{R^2(\varepsilon_1 + \varepsilon)} \left\{ \frac{1}{(1+x^2)^{1/2}} - \frac{2\eta_{1,1}}{x^2} [1 - (1+x^2)^{1/2}] + \frac{4\eta_{1,2}}{3x^4} \left[ (1+x^2)^{3/2} - \frac{3}{2}x^2 - 1 \right] \right\} - \frac{q_1 q_2 x}{R^2} \sum_{k=0}^{\infty} \Gamma_k \frac{(2k)!}{(k!)^2} \left(-\frac{x^2}{4}\right)^k, \quad (68)$$

где

$$\Gamma_k = \frac{4k+3}{(2k+1)\varepsilon_1 \zeta_{2k+1} + \varepsilon(2k+2)} - \frac{2}{\varepsilon_1 + \varepsilon} \left[ 1 + \frac{\eta_{1,1}}{k+1} + \frac{\eta_{1,2}}{(k+1)(k+2)} \right]. \quad (69)$$

### 5. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ И ОБСУЖДЕНИЕ

Численные расчеты были проведены при трех вариантах распределения свободного заряда по поверхности каждой из макрочастиц: по всей ее поверхности (далее этот вариант обозначается буквой  $W$ ), по правой ( $R$ ) и по левой ( $L$ ) половине. Распределение свободного заряда и его разложение по

**Таблица 3.** Сила взаимодействия (в  $10^{-9}$  Н), рассчитанная с использованием бисферической и сферической систем координат при следующих параметрах:  $\sigma_1/e = 10^{-2}$  нм $^{-2}$ ,  $q_2/e = 385$ ,  $a_2 = 100$  нм,  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 4$ ,  $\varepsilon = 1$  при  $L = 0.1$  нм для различных значений отношения  $a_1/a_2$

$a_1/a_2$	$F_{z, bisph}$ [38]	$F_z$ (52) + (58)	$F_{inf}$ [38]	$L_{max}$ [38]	$F_{ps}$ (52) + (63)
10	5.80665	5.80641	9.773	1674	8.742
$10^2$	9.23364	9.23369	9.773	1604	10.43
$10^3$	9.71688	9.71691	9.773	1597	10.63
$10^4$	9.76706	9.76731	9.773	1596	10.65

мультипольным моментам для первой частицы в варианте  $R$  и для второй в варианте  $L$  задается выражениями (29) и (31), а в варианте  $L$  для первой и  $R$  для второй определяется выражениями

$$\sigma_i(\theta) = \sigma \begin{cases} 0, & 0 \leq \theta_i \leq \pi/2, \\ 1, & \pi/2 < \theta_i \leq \pi; \end{cases} \quad (70)$$

$$\sigma_{i, n=2k+1} = \frac{q_i}{4\pi a_i^2} (-1)^{k+1} \frac{(2k-1)!!(4k+3)}{2^{k+2}(k+1)!},$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, (n = 1, 3, 5, \dots); \quad (71)$$

$$\sigma_{i, n=0} = \frac{q_i}{8\pi a_i^2}; \quad \sigma_{i, n=2k} = 0, \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

т. е. распределения (31) и (71) различаются только знаком для нечетных членов разложения.

Результаты численных расчетов силы взаимодействия представлены в табл. 2–4. В табл. 2 приведены значения силы взаимодействия, рассчитанные с использованием сферической системы координат по изложенной в настоящей работе методике. Видно, что с ростом отношения радиусов макрочастиц сила взаимодействия растет, а относительное отклонение от силы Кулона уменьшается. Там же приведены значения силы в случае распределения свободного заряда только по половине поверхности большой макрочастицы. Видно, что сила уменьшилась, что связано с двукратным уменьшением заряда 1-й макрочастицы. Но отношение этой силы к силе Кулона заметно выросло. В табл. 2 также приведено число учитываемых мультипольных членов разложения потенциала большой макрочастицы, которое при  $a_1/a_2 = 10^4$  оказывается огромным и при котором определение коэффициентов разложения обычными методами было бы невозможным.

Таблица 3 показывает хорошее согласие результатов, полученных в расчетах с использованием сферической и бисферической систем координат (про расчеты последним методом см. более подробно в работах [38, 43]). В этой таблице также приведены значения силы взаимодействия в случае  $a_1 = \infty$  ( $F_{inf}$ ), к которым близки значения силы при

$a_1/a_2 = 10^4$ . Там же приведено максимальное число членов разложения потенциала в бисферической системе координат ( $L_{max}$ ), которое практически не меняется при изменении отношения радиусов и при  $a_1/a_2 = 10^4$  оказывается на два порядка меньше, чем требуется при использовании сферической системы координат.

**Таблица 4.** Сила взаимодействия, рассчитанная по изложенной в настоящей работе методике при следующих параметрах:  $\sigma_1/e = 10^{-3}$  нм $^{-2}$ ,  $q_2/e = 400$ ,  $a_2 = 100$  нм,  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 4$ ,  $\varepsilon = 1$  при  $L = 0.1$  нм для различных значений  $d_1 = a_1 - a_0$ , и различном характере распределения свободного заряда:  $W$  — по всей поверхности,  $R$  — по правой половине поверхности 1-й макрочастицы

$a_1/a_2$	$F_z, 10^{-10}$ Н			
	$W$		$R$	
	$d_1 = a_1$	$d_1 = 10$ нм	$d_1 = a_1$	$d_1 = 10$ нм
10	4.4992	-0.6515	0.8452	-7.4898
$10^2$	6.2044	1.3140	1.9454	-6.6508
$10^3$	6.4276	1.5839	2.0972	-6.5128
$10^4$	6.4508	1.6125	2.1131	-6.4973

Из табл. 4 видно, во-первых, что в случае распределения свободного заряда только по половине поверхности сферы сила взаимодействия оказывается меньше, чем в случае распределения по всей поверхности сферы, что уже отмечалось выше и что естественно, так как при сохранении постоянной плотности поверхностного заряда полный заряд в первом случае оказывается в два раза меньше. Но уменьшение силы произошло более чем в два раза, в отличие от данных, приведенных в табл. 2, где уменьшение было заметно меньше чем в два раза, что связано с уменьшением плотности свободного заряда 1-й макрочастицы в 10 раз. Во-вторых, введение металлического ядра также приводит к уменьшению силы взаимодействия, что связано с большей эффективной поляризуемостью такой макрочастицы по сравнению с полностью диэлектрической макрочастицей. Это приводит даже к переходу от отталкивания к притяжению макрочастиц при  $a_1/a_2 = 10$  в слу-

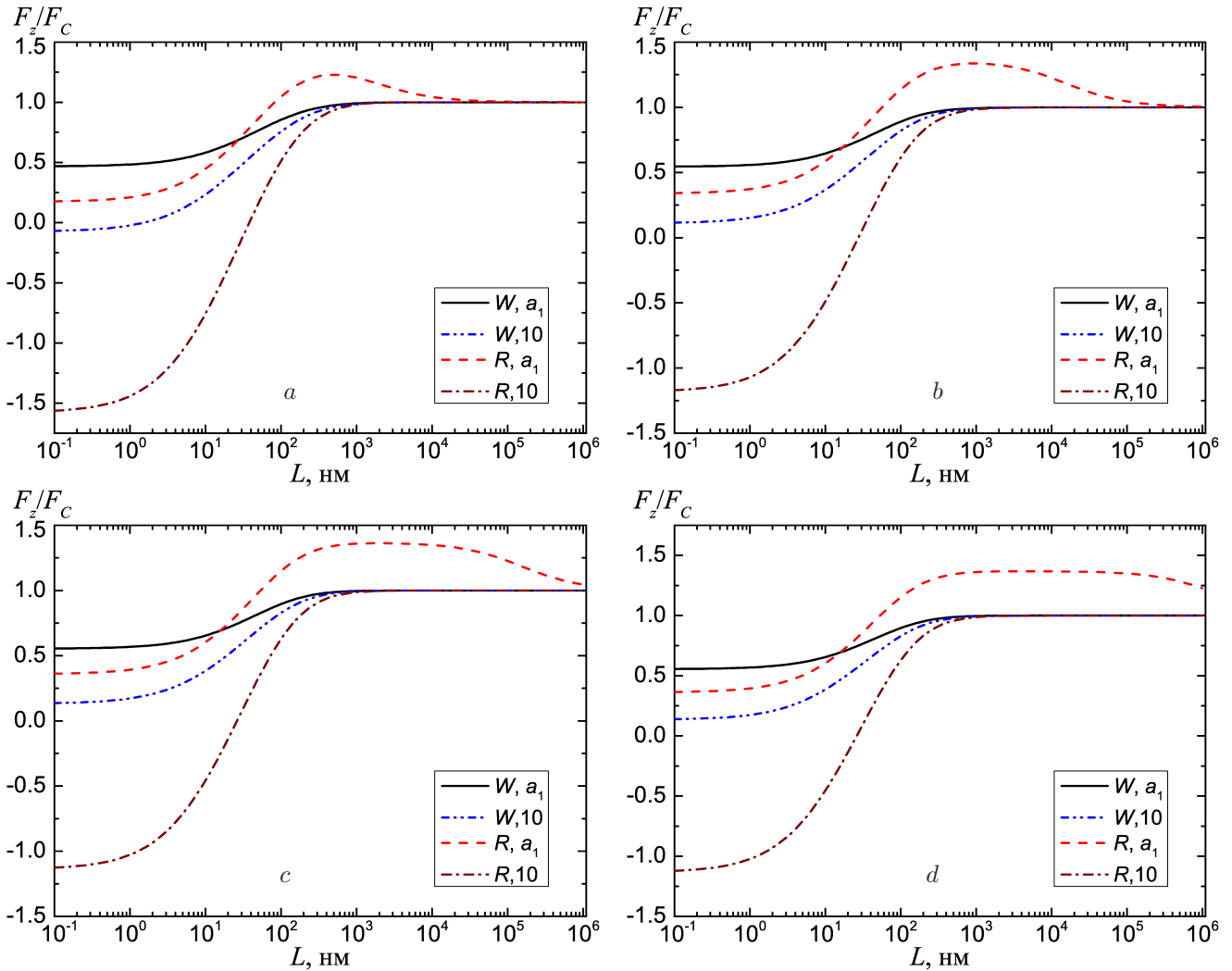


Рис. 3. Зависимости силы взаимодействия, приведенной к кулоновской, от расстояния между поверхностями макрочастиц при следующих параметрах:  $\sigma_1/e = 10^{-3} \text{ нм}^{-2}$ ,  $q_2/e = 400$ ,  $a_2 = 100 \text{ нм}$ ,  $a_1/a_2 = 10$  (a),  $10^2$  (b),  $10^3$  (c) и  $10^4$  (d),  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 4$ ,  $\epsilon = 1$ . Первый символ в обозначении кривых указывает на характер распределения свободного заряда по поверхности 1-й макрочастицы:  $W$  — по всей поверхности,  $R$  — по правой половине; затем указана толщина диэлектрической пленки ( $d_1 = a_1 - a_0$ ) в нанометрах

чае равномерного распределения заряда по всей поверхности 1-й макрочастицы и для всех отношений радиусов при зарядке только ее правой половины. Главное отличие параметров при расчете данных в табл. 2 и 4 заключается в 10-кратном уменьшении плотности свободного заряда в последней таблице. Поэтому отталкивательный кулоновский вклад в силу взаимодействия уменьшился в 10 раз, что привело к увеличению веса притягательной составляющей силы  $F_B$  (55), пропорциональной  $q_2^2$  (см. (62)).

Представленные на рис. 3 зависимости силы взаимодействия от наименьшего расстояния между поверхностями макрочастиц подтверждают выводы, сделанные выше относительно поведения силы взаимодействия на малых расстояниях. По мере роста

межчастичного расстояния все зависимости монотонно сходятся к кулоновской, кроме кривой  $R, a_1$ , которая проходит через максимум (отметим, что незначительное превышение силы над силой Кулона наблюдается и на зависимости  $R, 10$ , но это превышение составляет величину порядка 0.01%). При этом область расстояний, на которых сила взаимодействия превышает силу Кулона, с ростом отношения радиусов заметно расширяется. В варианте  $R$  свободный заряд распределен по стороне 1-й макрочастицы, обращенной ко 2-й макрочастице. Именно по этой причине сила отталкивания оказывается больше кулоновской. При введении металлического ядра этот эффект значительно снижается.

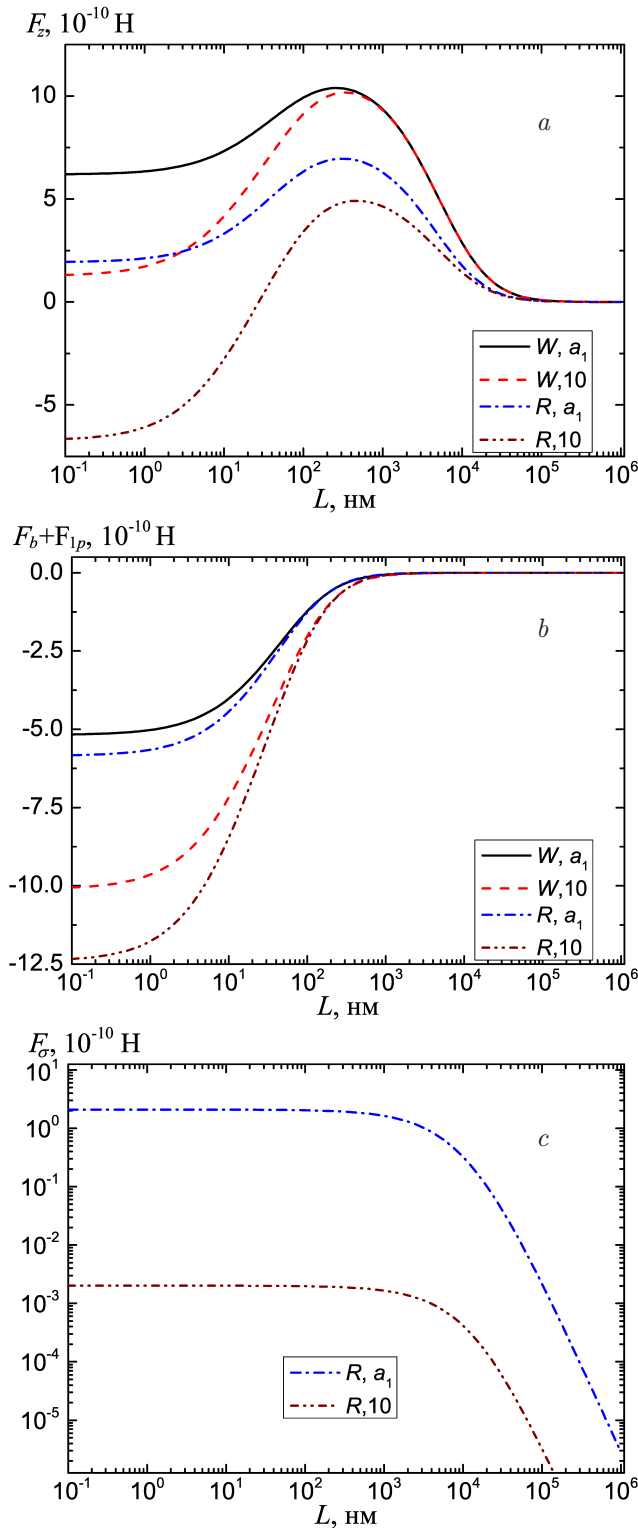


Рис. 4. Зависимости полной силы взаимодействия (а),  $F_b + F_{1p}$  (b) и  $F_\sigma$  (с) от расстояния между поверхностями полностью диэлектрических макрочастиц, рассчитанные с использованием сферической системы координат при следующих параметрах:  $\sigma_1/e = 10^{-3} \text{ нм}^{-2}$ ,  $q_2/e = 400$ ,  $a_2 = 100 \text{ нм}$ ,  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 4$ ,  $\varepsilon = 1$ ,  $a_1/a_2 = 10^2$ . Обозначения кривых такие же, как на рис. 3

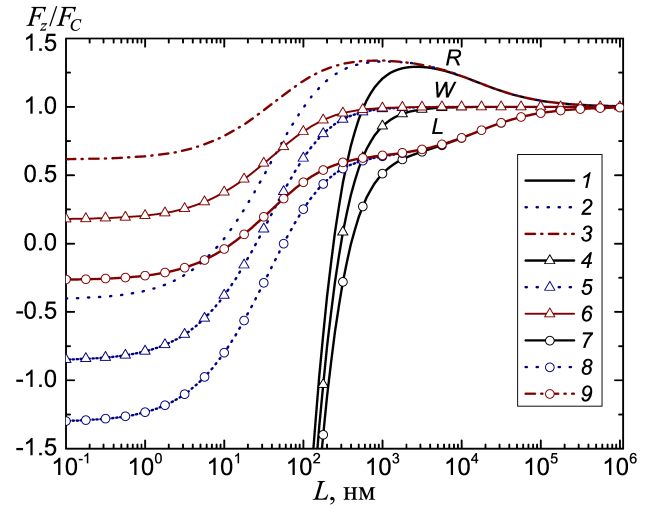


Рис. 5. Зависимости приведенной силы взаимодействия от расстояния между поверхностями при следующих параметрах:  $q_1/e = 10^4$ ,  $a_1 = 10^2 a_2$ ,  $a_2 = 100 \text{ нм}$ ,  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 4$ ,  $\varepsilon = 1$ , при  $q_2/e = 100$  (кривые 1, 4, 7), 25 (2, 5, 8), 5 (3, 6, 9) и вариантах распределения свободного заряда  $R$  по правой половине (кривые 1–3),  $W$  по всей поверхности (4–6) и  $L$  по левой половине поверхности (7–9) 1-й макро-частицы

На рис. 4 приведены зависимости силы взаимодействия и ее составляющих от наименьшего расстояния между поверхностями макрочастиц для рассмотренных на рис. 3 вариантов распределения свободного заряда и наличия или отсутствия металлического ядра для  $a_1 = 100a_2$ . Видно, что на всех межчастичных расстояниях наибольшей оказывается сила взаимодействия для полностью диэлектрических макрочастиц при равномерном распределении свободного заряда по всей поверхности. Введение металлического ядра приводит к заметному уменьшению силы на малых расстояниях. Отметим, что сила во всех вариантах на рис. 4а проходит через максимум и только в варианте  $R, a_1$  ее уменьшение после максимума происходит медленнее, чем на обратно квадратичной зависимости от межчастичного расстояния силы Кулона (при малых  $L \ll a_1$  межчастичное расстояние практически не меняется). Из рис. 4b видно, что притягательная составляющая в силе взаимодействия значительно вырастает при введении металлического ядра и оказывается наибольшей по абсолютной величине в случае зарядки только правой половины 1-й макро-частицы. Это является следствием двухкратного уменьшения заряда при сохранении постоянной плотности свободного заряда. Расчеты при постоянном заряде 1-й макро-частицы подтверждают этот вывод. В этом случае зависимости силы от межчастичного расстояния для заданного заряда  $q_2$  нигде не пере-

секались, располагаясь сверху вниз в порядке вариантов распределения свободного заряда  $R$ ,  $W$  и  $L$  (см. рис. 5).

Значительное уменьшение составляющей силы, связанной с неоднородностью распределения поверхностного заряда, при введении металлического ядра очень хорошо видно из рис. 4с. Следовательно, металлическое ядро практически сводит к нулю эффект от односторонней зарядки 1-й макрочастицы. При увеличении диэлектрической проницаемости макрочастиц влияние металлического ядра уменьшается и, как видно из рис. 6, при  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 80$  практически исчезает.

На рис. 7 представлены зависимости приведенной силы взаимодействия от расстояния между поверхностями диэлектрических макрочастиц без металлических ядер для девяти вариантов распределения свободного заряда по их поверхностям. Видно, что наибольшее влияние на силу взаимодействия оказывает характер распределения на 1-й макрочастице (большого размера) и значения силы убывают в порядке вариантов распределения свободного заряда  $R$ ,  $W$  и  $L$  по ее поверхности. Влияние характера распределения свободного заряда 2-й (меньшего размера) макрочастицы оказывается наибольшим в варианте распределения по поверхности 1-й  $L$ , меньше в варианте  $R$  и слабо заметным в варианте  $W$ .

При наличии металлического ядра под тонкой диэлектрической пленкой толщиной 10 нм внутри 1-й макрочастицы картина существенным образом меняется (см. рис. 8). В этом случае характер распределения свободного заряда по поверхности 2-й макрочастицы оказывает заметное влияние, а различие в зависимостях силы в вариантах распределения по поверхности 1-й макрочастицы  $L$  и  $R$  практически исчезает.

Замена 2-й макрочастицы на двухслойную с диэлектрическим слоем над металлическим ядром толщиной 10 нм, как видно из рис. 9, по сравнению с рис. 7 приводит практически к полному исчезновению зависимости силы от характера распределения свободного заряда по поверхности 2-й макрочастицы.

На рис. 10 представлены зависимости приведенной силы взаимодействия от расстояния между поверхностями двухслойных макрочастиц с диэлектрическими слоями над металлическими ядрами толщиной 10 нм. Видно, что в этом случае влияние неоднородности распределения свободного заряда заметно снижается. Так же, как на рис. 9, различие зависимостей силы в вариантах распределения

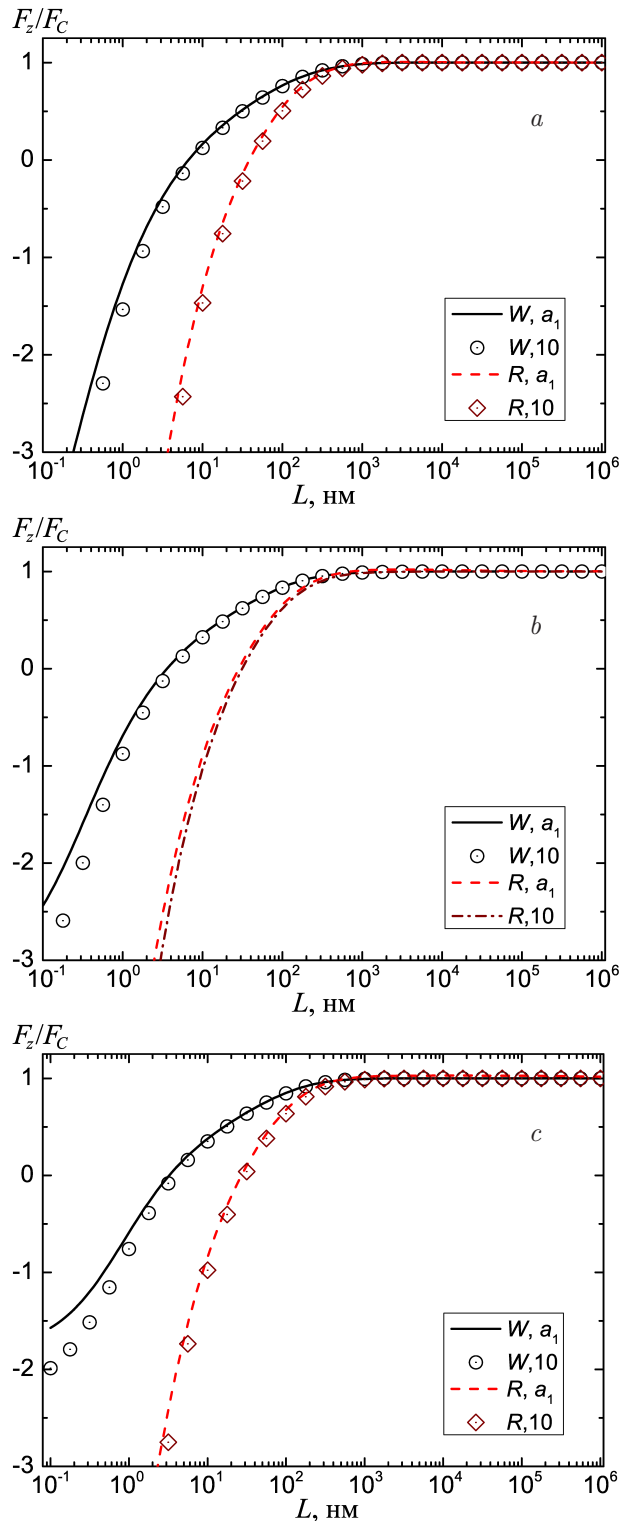


Рис. 6. Зависимости приведенной силы взаимодействия от расстояния между поверхностями полностью диэлектрических макрочастиц, рассчитанные с использованием сферической системы координат при следующих параметрах:  $\sigma_1/e = 10^{-3} \text{ нм}^{-2}$ ,  $q_2/e = 400$ ,  $a_2 = 100 \text{ нм}$ ,  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 80$  (вода),  $\epsilon = 1$ ,  $a_1/a_2 = 10$  (a), 100 (b),  $10^4$  (c). Обозначения кривых такие же, как на рис. 3

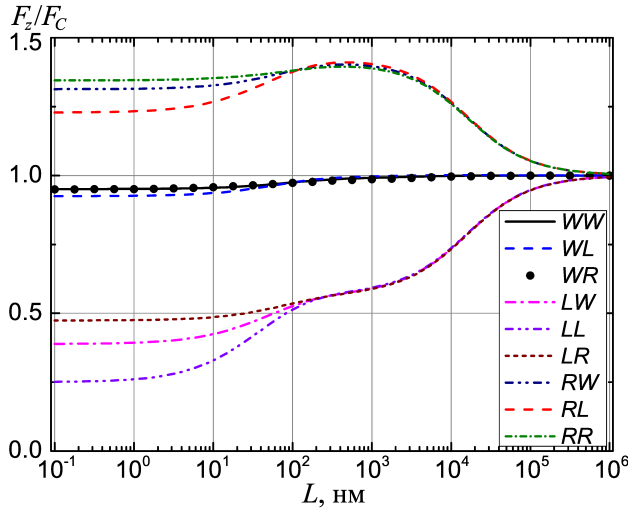


Рис. 7. Зависимости приведенной силы взаимодействия от расстояния между поверхностями полностью диэлектрических макрочастиц при следующих параметрах:  $\sigma_1/e = 10^{-3} \text{ нм}^{-2}$ ,  $q_2/e = 100$ ,  $a_2 = 100 \text{ нм}$ ,  $a_1/a_2 = 10^2$ ,  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 3.1$  (лед),  $\epsilon = 1$  для различных вариантов распределения свободного заряда по поверхности макрочастиц. Первый символ в обозначении кривых указывает характер распределения свободного заряда по поверхности 1-й макрочастицы, второй — по поверхности 2-й ( $W$  — равномерно по всей поверхности,  $L$  — равномерно по левой половине поверхности и  $R$  — по правой половине поверхности)

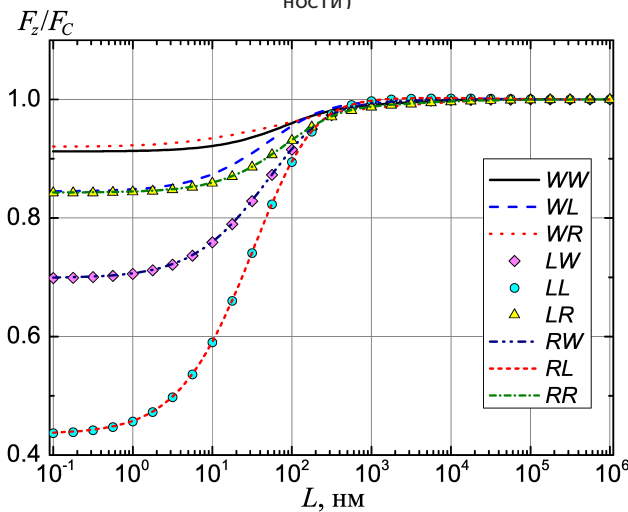


Рис. 8. Зависимости приведенной силы взаимодействия от расстояния между поверхностями 1-й двухслойной макрочастицы с диэлектрическим слоем над металлическим ядром толщиной 10 нм и полностью диэлектрической 2-й макрочастицы. Остальные параметры и обозначения кривых, как на рис. 6

по поверхности 1-й макрочастицы  $L$  и  $R$  практически отсутствует.

Численные расчеты показали, что толщина диэлектрической пленки также оказывает влияние на

взаимодействие макрочастиц. На рис. 11 приведены зависимости силы взаимодействия для различных толщин диэлектрической пленки из окиси кремния  $\epsilon_1 = 4$  на поверхности металлической 1-й макрочастицы, при этом 2-я макрочастица полагалась полностью состоящей из окиси кремния. Видно, что уже при толщине пленки 0.1 нм проявляется ее влияние на силу взаимодействия на малых расстояниях. При толщине пленки более  $10^3$  нм сила перестает меняться при ее увеличении.

В случае одинаковых макрочастиц зависимость от толщины пленок оказывается существенно более слабой, что демонстрирует рис. 12. Даже при толщине пленок на макрочастицах в 10 нм, что составляет 1% от радиуса макрочастиц, сила взаимодействия практически не отличается от силы взаимодействия полностью металлических макрочастиц. По мере роста толщины пленок сила взаимодействия все больше отклоняется от силы взаимодействия металлических макрочастиц и приближается к зависимости полностью диэлектрических макрочастиц (кривая 5).

### 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе проведено исследование влияния диэлектрической пленки на поверхности проводящих пылевых частиц на их электростатическое взаимодействие. Особое внимание уделено слу-

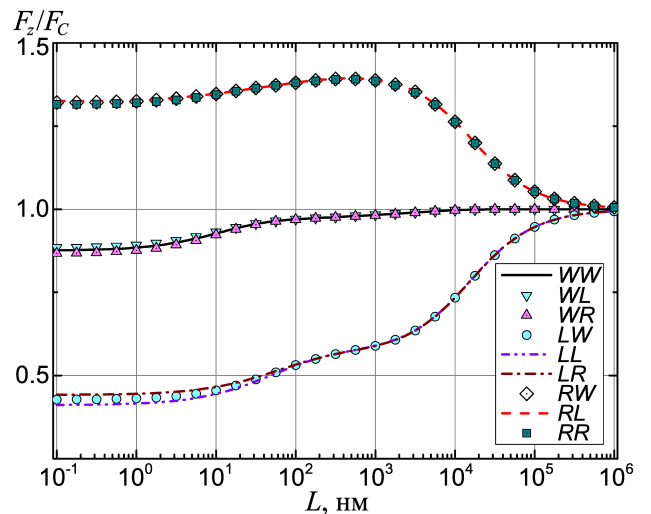


Рис. 9. Зависимости приведенной силы взаимодействия от расстояния между поверхностями полностью диэлектрической 1-й макрочастицы и 2-й двухслойной макрочастицы с диэлектрическим слоем над металлическим ядром толщиной 10 нм. Остальные параметры и обозначения кривых, как на рис. 6

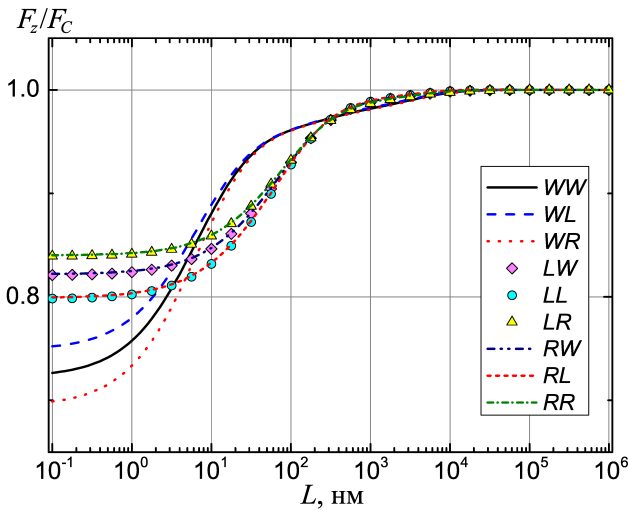


Рис. 10. Зависимости приведенной силы взаимодействия от расстояния между поверхностями двухслойных макро-частиц с диэлектрическими слоями над металлическими ядрами толщиной 10 нм. Остальные параметры и обозначения кривых, как на рис. 6

чаю сильно различающихся радиусов макро-частиц и случаю неравномерного распределения поверхностного заряда с вариантами равномерного распределения свободного заряда на каждой из макро-частиц по всей поверхности, по левым и/или правым полусферам. Продемонстрирована эффективность разработанной методики расчета медленно сходящихся рядов, связанных с медленным убыванием коэффициентов разложения потенциала большей макро-частицы при малых межчастичных расстояниях и с медленным убыванием коэффициентов разложения свободного заряда по мультипольным моментам в случае распределения свободного заряда только по половине поверхности большей макро-частицы. Показано, что как характер распределения свободного заряда, так и наличие металлического ядра под тонкой диэлектрической пленкой приводят к заметному изменению силы взаимодействия, что должно быть принято во внимание при моделировании процессов взаимодействия микро- и нано-размерных частиц в различных экспериментальных и технологических установках.

**Благодарности.** Автор выражает благодарность Д. И. Астахову, П. В. Крайнову и В. В. Медведеву из Института спектроскопии РАН за многократные полезные обсуждения результатов данной работы.

**Финансирование.** Настоящая работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 22-22-01000).

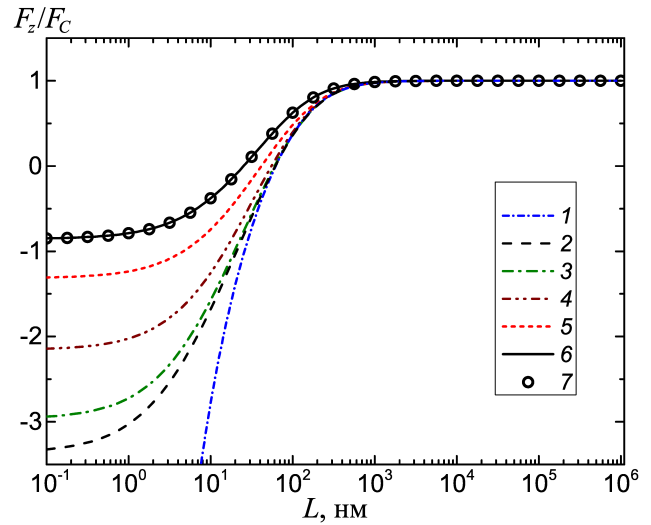


Рис. 11. Зависимости приведенной силы взаимодействия для различных толщин диэлектрической пленки с  $\epsilon_1 = 4$  на поверхности металлической 1-й макро-частицы от расстояния между поверхностями макро-частиц при их равномерной зарядке по всей поверхности и следующих параметрах:  $q_1/e = 10^4$ ,  $q_2/e = 10$ ,  $a_2 = 100$  нм,  $a_1/a_2 = 10^2$ ,  $\epsilon_2 = 4$ ,  $\epsilon = 1$ ,  $d_1 \equiv a_1 - a_0 = 0$  (1), 0.1 нм (2), 5 нм (3), 25 нм (4), 10<sup>2</sup> нм (5), 10<sup>3</sup> нм (6), 10<sup>4</sup> нм (7)

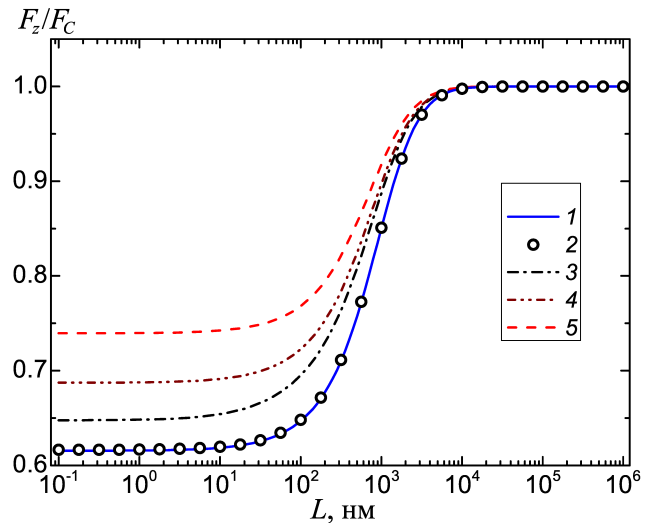


Рис. 12. Зависимости приведенной силы взаимодействия от расстояния между поверхностями одинаковых металлических макро-частиц для различных толщин диэлектрических пленок с  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 4$  на их поверхностях, при их равномерной зарядке по всей поверхности и следующих параметрах:  $q_1/e = q_2/e = 10^3$ ,  $a_1 = a_2 = 10^3$  нм,  $\epsilon = 1$ ,  $d_1 \equiv a_1 - a_0 = d_2 \equiv a_2 - a_{20} = 0$  (1), 10 нм (2), 100 нм (3), 250 нм (4), 10<sup>3</sup> нм (5)

**ПРИЛОЖЕНИЕ А.  
ПРОЦЕДУРА ВЫЧИСЛЕНИЯ  
ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ  
ГАУССА**

Гипергеометрическая функция Гаусса  ${}_2F_1$  определяется соотношением [64, 65]

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!}, \quad (72)$$

где  $(a)_n$  — символ Похгаммера,

$$(a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} = a(a+1)\dots(a+n-1), \quad (73)$$

$\Gamma$  — гамма-функция. Отметим, что  $n! = (1)_n$ ,

$$C_{n+k}^k = \frac{(n+k)!}{n!k!} = \frac{(k+1)_n}{(1)_n}.$$

Для вычисления гипергеометрической функции Гаусса в настоящей работе использовались рекуррентное соотношение [64, 65]

$$\begin{aligned} &{}_2F_1(a-1, b; c; z) + \\ &+ (2a-c-az+bz) {}_2F_1(a, b; c; z) + \\ &+ a(z-1) {}_2F_1(a+1, b; c; z) = 0 \end{aligned} \quad (74)$$

и следующие формулы [64, 65]:

$$\begin{aligned} &{}_2F_1(a, b; c; z) = {}_2F_1(b, a; c; z), \\ &{}_2F_1(0, b; c; z) = {}_2F_1(a, b; c; 0) = 1, \\ &{}_2F_1(a, b; b; z) = (1-z)^{-a}, \end{aligned} \quad (75)$$

$$\begin{aligned} &{}_2F_1(1, 1; c; z) = \frac{(c-1)z}{(1-z)^2} \times \\ &\times \left[ \sum_{k=2}^{c-1} \frac{1}{c-k} \left(\frac{z-1}{z}\right)^k - \left(\frac{z-1}{z}\right)^c \ln(1-z) \right], \\ & \qquad \qquad \qquad c = 2, 3, 4, \dots, \end{aligned} \quad (76)$$

$$\begin{aligned} &{}_2F_1(1, b; c; z) = \frac{(c-1)!}{(c-b-1)!} \frac{1}{z} \times \\ &\times \left\{ \sum_{k=1}^{c-b-1} \frac{(c-b-k-1)!}{(c-k-1)!} \left(\frac{z-1}{z}\right)^{k-1} - \right. \\ &- \frac{z}{(b-1)!} \left(\frac{z-1}{z}\right)^{c-b-1} \left[ \sum_{k=1}^{b-1} \frac{z^{-k}}{z-k} + \right. \\ &\left. \left. + z^{-b} \ln(1-z) \right] \right\}, \quad c > b, \end{aligned} \quad (77)$$

$$\begin{aligned} &{}_2F_1(1, b; c; z) = (c-1)(1-z)^{c-b-1} \times \\ &\times \sum_{k=0}^{c-b-1} \frac{(c-b)_k}{k!(c+k-1)!} z^k, \quad b \geq c. \end{aligned} \quad (78)$$

**ПРИЛОЖЕНИЕ В.  
ПРОЦЕДУРА ВЫЧИСЛЕНИЯ ФУНКЦИИ  $T_n^a$**

Для функции  $T_n^a$  (34) можно легко найти рекуррентные соотношения:

$$\begin{aligned} T_n^a(y^2) &= \frac{y^{-n+1}}{n-1} \frac{\partial y^n T_{n-1}^a(y^2)}{\partial y} = \\ &= \frac{n}{n-1} T_{n-1}^a(y^2) + \frac{y}{n-1} y \frac{\partial}{\partial y} T_{n-1}^a(y^2), \end{aligned} \quad (79)$$

$$T_n^a = \frac{2}{n-1} T_{n-1}^{a-1} + \frac{n-2a}{n-1} T_{n-1}^a. \quad (80)$$

Далее введем функцию

$$R_m = \left( \frac{1}{1-4y^2} \right)^{m+1/2} \quad (81)$$

и оператор  $\Omega_n$ , который переводит  $T_n^a$  в  $T_{n+1}^a$  (см. выражение (79)):

$$\begin{aligned} T_{n+1}^a(y^2) &= \Omega_n \left[ \frac{1}{n} T_n^a(y^2) \right] = \\ &= \frac{n+1}{n} T_n^a(y^2) + \frac{y}{n} \frac{\partial}{\partial y} T_n^a(y^2). \end{aligned} \quad (82)$$

Действие этого оператора на  $R_m$  определяется формулой

$$\Omega_n(R_m) = \left( 1 - \frac{2m}{n} \right) R_m + \frac{2m+1}{n} R_{m+1}. \quad (83)$$

Процедура вычисления необходимых для расчета  $Q_n$  (35) функций  $T_{n+1}^2, T_{n+1}^3$  ( $n = 1, 2, \dots, n_B + 1$ ) следующая.

1. Вычисляем функции  $R_m = (1-4y^2)^{-m-1/2}$  для  $m = 1, 2, \dots, n_B$  при  $y^2 = -x^2/4$ .
2. Вычисляем

$$T_2^1(y^2) = \frac{2}{(1-4y^2)^{3/2}} = 2R_1.$$

3. Вычисляем  $T_n^1$  для  $n = 3, 4, \dots, n_B + 2$ , используя оператор (83).
4. Вычисляем

$$\begin{aligned} T_2^2(y^2) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k+2)!}{k!(k+2)!} y^{2k} = \\ &= \frac{4}{(1-4y^2)^{1/2} \left[ 1 + (1-4y^2)^{1/2} \right]^2}. \end{aligned}$$



5. Используя рекуррентное соотношение (79), вычисляем  $T_n^2$  для  $n = 3, 4, \dots, n_B + 2$ .

6. Вычисляем

$$T_2^3(y^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k+2)!}{k!(k+3)!} y^{2k} = \frac{8}{3} \frac{1}{[1 + (1 - 4y^2)^{1/2}]^3}.$$

7. Используя рекуррентное соотношение (79), вычисляем  $T_n^3$  для  $n = 3, 4, \dots, n_B + 2$ .

В итоге все необходимые для определения коэффициентов  $b_n$  (22) и силы  $F_\sigma$  (56) функции  $T_n^a$  оказываются вычисленными.

## ЛИТЕРАТУРА

1. В. Н. Цытович, УФН **167**, 57 (1997).
2. В. Е. Фортов, А. Г. Храпак, С. А. Храпак, В. И. Молотков, О. Ф. Петров, УФН **174**, 495 (2004).
3. В. И. Молотков, О. Ф. Петров, М. Ю. Пустыльник, В. М. Торчинский, В. Е. Фортов, А. Г. Храпак, ТВТ **42**, 821 (2004).
4. S. V. Vladimirov, K. Ostrikov, and A. A. Samarian, *Physics and Applications of Complex Plasmas*, London, Imperial College Press (2005).
5. V. E. Fortov, A. V. Ivlev, S. A. Khrapak, A. G. Khrapak, and G. E. Morfill, Phys. Rep. **421**, 1 (2005).
6. G. E. Morfill and A. V. Ivlev, Rev. Mod. Phys. **81**, 1353 (2009).
7. M. Bonitz, C. Henning, and D. Block, Rep. Prog. Phys. **73**, 066501 (2010).
8. *Комплексная и пылевая плазма: из лаборатории в космос*, под ред. В. Фортова, Г. Морфилла, Физматлит, Москва (2012).
9. A. Ivlev, H. Lowen, G. Morfill, and C. P. Royall, *Complex Plasmas and Colloidal Dispersions: Particle-Resolved Studies of Classical Liquids and Solids, Series in Soft Condensed Matter*, Vol. 5, World Scientific, Singapore (2012).
10. I. Mann, N. Meyer-Vernet, and A. Czechowski, Phys. Rep. **536**, 1 (2014).
11. P. K. Shukla and A. A. Mamun, *Introduction to Dusty Plasma Physics*, CRC Press, Bristol and Philadelphia (2015).
12. А. В. Ивлев, С. А. Храпак, В. И. Молотков, А. Г. Храпак, *Введение в физику пылевой и комплексной плазмы. Учебное пособие*, Издательский дом «Интеллект», Долгопрудный (2017).
13. А. М. Липаев, В. И. Молотков, Д. И. Жуховицкий, В. Н. Наумкин, А. Д. Усачев, А. В. Зобнин, О. Ф. Петров, В. Е. Фортов, ТВТ **58**, 485 (2020) [A. M. Lipaev, V. I. Molotkov, D. I. Zhukhovitskii, V. N. Naumkin, A. D. Usachev, A. V. Zobnin, O. F. Petrov, and V. E. Fortov, High Temperature **58**, 449 (2020)].
14. F. Greiner, A. Melzer, B. Tadsen, S. Groth, C. Kille, F. Kirchschrager, F. Wieben, I. Pilch, H. Kruger, D. Block, A. Piel, and S. Wolf, Diagnostics and characterization of nanodust and nanodusty plasmas, Eur. Phys. J. D **72**, 81 (2018); DOI: 10.1140/epjd/e2017-80400-7.
15. H. Yockell-Lelièvre, E. F. Borra, A. M. Ritcey, and L. V. da Silva, Appl. Opt. **42**, 1882 (2003).
16. S. Crossley, J. Faria, M. Shen, and D. E. Resasco, Science **327**, 68 (2010).
17. V. A. Turek, M. P. Cecchini, J. Paget, A. R. Kucernak, A. A. Kornyshev, and J. B. Edell, ACS Nano **6**, 7789 (2012).
18. J. Song, J. Zhou, and H. Duan, J. Amer. Chem. Soc. **134**, 13458 (2012).
19. K. Saha, S. S. Agasti, C. Kim, X. Li, and V. M. Rotello, Chem. Rev. **112**, 2739 (2012).
20. P.-P. Fang, S. Chen, H. Deng, M. D. Scanlon, F. Gumy, H. J. Lee, D. Momotenko, V. Amstutz, F. Cortés-Salazar, C. M. Pereira, Z. Yang, and H. H. Girault, ACS Nano **7**, 9241 (2013).
21. J. B. Edell, A. A. Kornyshev, and M. Urbakh, ACS Nano **7**, 9526 (2013).
22. M. P. Cecchini, V. A. Turek, J. Paget, A. A. Kornyshev, and J. B. Edell, Nat. Mater. **12**, 165 (2013).
23. J. Lin, S. Wang, P. Huang, Z. Wang, S. Chen, G. Niu, W. Li, J. He, D. Cui, G. Lu, X. Chen, and Z. Nie, ACS Nano **7**, 5320 (2013).

24. J. Song, Z. Fang, C. Wang, J. Zhou, B. Duan, L. Pu, and H. Duan, *Nanoscale* **5**, 5816 (2013).
25. J. He, P. Zhang, T. Babu, Y. Liu, J. Gong, and Z. Nie, *Chem. Commun.* **49**, 576 (2013).
26. J. Paget, V. Walpole, M. B. Jorquera, J. B. Edel, M. Urbakh, A. A. Kornyshev, and A. Demetriadou, *J. Phys. Chem. C* **118**, 23264 (2014).
27. E. Smirnov, M. D. Scanlon, D. Momotenko, H. Vrubel, M. A. Méndez, P.-F. Brevet, and H. H. Girault, *ACS Nano* **8**, 9471 (2014).
28. A. Samanta, S. Takkar, R. Kulshreshtha, B. Nandan, and R. K. Srivastava, *Biomed. Phys. Eng. Express* **3**, 035011 (2017).
29. M. D. Scanlon, E. Smirnov, T. J. Stockmann, and P. Peljo, *Chem. Rev.* **118**, 3722 (2018).
30. F. Ciesa and A. Plech, *J. Colloid Interface Sci.* **346**, 1 (2010).
31. E. Smirnov, P. Peljo, M. D. Scanlon, F. Gumy, and H. H. Girault, *Nanoscale* **8**, 7723 (2016).
32. P. A. Kralchevsky, K. D. Danov, and P. V. Petkov, *Phil. Trans. Roy. Soc. A* **374**, 20150130 (2016); <http://doi.org/10.1098/rsta.2015.0130>.
33. L. Isa, I. Buttinoni, M. A. Fernandez-Rodriguez, and S. A. Vasudevan, *Europhys. Lett.* **119**, 26001 (2017).
34. R. Bebon and A. Majee, *J. Chem. Phys.* **153**, 044903 (2020); DOI: 10.1063/5.0013298.
35. B. J. Cox, N. Thamwattana, and J. M. Hill, *J. Electrostat.* **65**, 680 (2007); <https://doi.org/10.1016/j.elstat.2007.05.004>.
36. Y. Nakajima and T. Sato, *J. Electrostat.* **45**, 213 (1999).
37. E. Bichoutskaia, A. L. Boatwright, A. Khachatourian, and A. J. Stace, *J. Chem. Phys.* **133**, 024105 (2010); DOI: 10.1063/1.3457157.
38. А. В. Филиппов, *ЖЭТФ* **161**, 691 (2022); DOI: 10.31857/S0044451022050078 [A. V. Filippov, *JETP* **134**, 590 (2022); DOI: 10.1134/S1063776122030141].
39. В. Р. Муниров, А. В. Филиппов, *ЖЭТФ* **144**, 931 (2013).
40. A. Khachatourian, H.-K. Chan, A. J. Stace, and E. Bichoutskaia, *J. Chem. Phys.* **140**, 074107 (2014); <https://doi.org/10.1063/1.4862897>.
41. J. D. Love, *Q. J. Mech. Appl. Math.* **28**, 449(1975).
42. A. T. Pérez and R. Fernández-Mateo, *J. Electrostat.* **112**, 103601 (2021); <https://doi.org/10.1016/j.elstat.2021.103601>.
43. А. В. Филиппов, *Письма в ЖЭТФ* **115**, 197 (2022); DOI: 10.31857/S1234567822030107 [A. V. Filippov, *JETP Lett.* **115**, 174 (2022); DOI: 10.1134/S0021364022030067].
44. T. B. Jones and T. B. Jones, *Electromechanics of Particles*, Cambridge University Press, Cambridge (2005).
45. A. Castellanos, *Adv. Phys.* **54**, 263 (2005).
46. X. Meng, J. Zhu, and J. Zhang, *J. Phys. D* **42**, 065201 (2009).
47. B. Gady, D. Schleef, R. Reifengerger, D. Rimai, and L. P. DeMejo, *Phys. Rev. B* **53**, 8065 (1996).
48. B. Gady, R. Reifengerger, D. S. Rimai, and L. P. DeMejo, *Langmuir* **13**, 2533 (1997).
49. Y. Liu, C. Song, G. Lv, N. Chen, H. Zhou, and X. Jing, *Appl. Surf. Sci.* **433**, 450 (2018).
50. M. C. Stevenson, S. P. Beaudoin, and D. S. Corti, *J. Phys. Chem. C* **124**, 3014 (2020); <https://doi.org/10.1021/acs.jpcc.9b09669>.
51. M. C. Stevenson, S. P. Beaudoin, and D. S. Corti, *J. Phys. Chem. C* **125**, 20003 (2021).
52. H. Zhou, M. Götzinger, and W. Peukert, *Powder Technol.* **135–136**, 82 (2003).
53. Y. Gao, E. Tian, and J. Mo, *ACS ES and T Eng.* **1**, 1449 (2021).
54. C. Bechinger, R. Di Leonardo, H. Löwen, C. Reichhardt, G. Volpe, and G. Volpe, *Rev. Mod. Phys.* **88**, 045006 (2016); DOI: 10.1103/RevModPhys.88.045006.
55. J. Elgeti, R. G. Winkler, and G. Gompper, *Rep. Prog. Phys.* **78**, 056601 (2015); DOI: 10.1088/0034-4885/78/5/056601.
56. S. Ramaswamy, *J. Stat. Mech.: Theory Exp.* **2017**, 054002 (2017); DOI: 10.1088/1742-5468/aa6bc5.
57. A. Walther and A. H. E. Müller, *Chem. Rev.* **113**, 5194 (2013).

58. E. A. Lisin, O. S. Vaulina, I. I. Lisina, and O. F. Petrov, *Phys. Chem. Chem. Phys.* **23**, 16248 (2021).
59. I. Adamovich, S. Agarwal, E. Ahedo, L. L. Alves, S. Baalrud, N. Babaeva, A. Bogaerts, A. Bourdon, P. J. Bruggeman, C. Canal, E. H. Choi, S. Coulombe, Z. Donkó, D. B. Graves, S. Hamaguchi, D. Hegemann, M. Hori, H.-H. Kim, G. M. W. Kroesen, M. J. Kushner, A. Laricchiuta, X. Li, T. E. Magin, S. Mededovic Thagard, V. Miller, A. B. Murphy, G. S. Oehrlein, N. Puac, R. M. Sankaran, S. Samukawa, M. Shiratani, M. Šimek, N. Tarasenko, K. Terashima, E. Thomas Jr., J. Trieschmann, S. Tsikata, M. M. Turner, I. J. van der Walt, M. C. M. van de Sanden, and T. von Woedtke, *J. Phys. D: Appl. Phys.* **55**, 373001 (2022); DOI: 10.1088/1361-6463/ac5e1c.
60. В. В. Батыгин, И. Н. Топтыгин, *Сборник задач по электродинамике*, Наука, Москва (1970).
61. В. Смайт, *Электростатика и электродинамика*, Изд-во иностр. лит., Москва (1954).
62. Е. В. Гобсон, *Теория сферических и эллипсоидальных функций*, Изд-во иностр. лит., Москва (1952) [E. W. Hobson, *The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics*, Univ. Press, Cambridge (1931)].
63. Т. М. MacRobert, *Spherical Harmonics*, Metiuen and Co. Ltd., London (1947).
64. Ю. Люк, *Специальные математические функции и их аппроксимации*, Мир, Москва (1980) [Y. L. Luke, *Mathematical Functions and their Approximations*, Academic Press Inc., New York, San Francisco, London (1975)].
65. А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев, *Интегралы и ряды, т. 3, Специальные функции. Дополнительные главы*, Физматлит, Москва (2003).
66. А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев, *Интегралы и ряды, т. 1., Элементарные функции*, Физматлит, Москва (2002), 632 с.