

# ПИК КОГЕРЕНТНОГО ОБРАТНОГО РАССЕЯНИЯ ДЛЯ ИЗЛУЧЕНИЯ С ПОНИЖЕННОЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ КОГЕРЕНТНОСТЬЮ

*В. Л. Кузьмин*<sup>a\*</sup>, *А. Ю. Вальков*<sup>a,b\*\*</sup>, *Ю. А. Жаворонков*<sup>b\*\*\*</sup>

<sup>a</sup> Санкт-Петербургский политехнический университет им. Петра Великого  
195251, Санкт-Петербург, Россия

<sup>b</sup> Санкт-Петербургский государственный университет  
198504, Санкт-Петербург, Россия

Поступила в редакцию 25 февраля 2023 г.,  
после переработки 3 апреля 2023 г.  
Принята к публикации 3 апреля 2023 г.

Развита теория и выполнено численное моделирование эффекта когерентного обратного рассеяния в сильнонеоднородной случайной среде с конечной длиной пространственной когерентности. В рамках метода Монте-Карло показано, что ограничение числа актов рассеяния соответствует понижению когерентности падающего излучения и приводит к угловому уширению пика обратного рассеяния, расширяя возможности использования когерентного обратного рассеяния для биомедицинских приложений. Впервые на основе диаграммного метода развито моделирование когерентного обратного рассеяния за рамками лестничного приближения.

DOI: 10.31857/S0044451023090031  
EDN: KCCFMX

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Открытие когерентных [1–8] и корреляционных [9, 10] эффектов многократного рассеяния излучения в случайных средах породило широкую область биомедицинских приложений в инфракрасной и ближней инфракрасной областях, таких как ближняя инфракрасная спектроскопия (near infrared spectroscopy, NIRS) и диффузная корреляционная спектроскопия (diffuse correlation spectroscopy, DCS) [11–14]. Такие эффекты, как волны фотонной плотности [15, 16] и временные корреляции [17] интенсивности, легли в основу инновационных методов неинвазивной диагностики биотканей, в том числе в реальной биомедицинской практике [13, 18, 19]. Однако применение эффекта усиления когерентного обратного рассеяния (КОР), наиболее наглядно проявляющего волновую природу света в режиме многократного рассеяния, в биомедицинских приложениях почти не находит применения, и его развитие сильно замедлилось по

сравнению с такими приложениями, как NIRS и DCS, в связи с малостью ширины углового конуса КОР, определяемого величиной  $W_0 \sim (kl_{tr})^{-1}$  [6–8], где  $k$  — волновое число,  $l_{tr}$  — транспортная длина.

Известно, что конечность длины когерентности объясняет [20, 21], почему отношение когерентной и некогерентной компонент обратного рассеяния не достигает теоретически предсказанного удвоения при рассеянии строго назад. Аналогично конечность длины когерентности используется для объяснения того, почему не выполняется соотношение Зигерта в работах по изучению и применению временной корреляционной функции интенсивности [18, 20]. В работах [22–27] была разработана новая методика, использующая излучение с низкой когерентностью, создающее более широкий угловой конус КОР, наблюдаемый в реальных биомедицинских условиях. В работах [24, 25, 28] был рассмотрен и использован эффект конечности понижения пространственной когерентности падающего излучения при наблюдении КОР. Возникающее при этом угловое уширение конуса КОР использовалось в реальной медицинской диагностике [25, 28].

В данной работе методом Монте-Карло выполнено численное моделирование эффекта КОР для излучения с конечной длиной когерентности. Впер-

\* E-mail: kuzmin\_vl@mail.ru

\*\* E-mail: alexvalk@mail.ru

\*\*\* E-mail: zhavoronkov95@gmail.com

вые разработана теория эффектов обратного рассеяния за пределами лестничного приближения с явным учетом конечности длины когерентности. Некогерентная составляющая обратного рассеяния формируется лестничными диаграммами, каждая из которых состоит из произведений двух комплексносопряженных полей, рассеивающихся на одной и той же последовательности случайных неоднородностей. Ряд лестничных диаграмм обеспечивает теоретическую основу для диффузионного приближения. Теория когерентного обратного рассеяния основана на суммировании максимальных перекрестных (или циклических) диаграмм, топологически эквивалентных лестничным диаграммам. Низкокогерентное обратное рассеяние требует дополнительного учета интерференционных вкладов, происходящих от корреляций диэлектрической проницаемости высоких порядков рассеяния, описание которых в терминах диаграмм требует выхода за рамки лестничных или максимально-перекрестных диаграмм. Мы впервые рассматриваем такие диаграммы для трехкратного рассеяния, учитывая интерференцию между парами полей, распространяющимися в случайной среде. В настоящей работе, принимая максимальное число событий рассеяния  $n_{sc}$  в качестве параметра, определяющего пространственную длину когерентности  $L_c = n_{sc}l_s$ , где  $l_s$  — длина рассеяния, мы показали, что использование низкокогерентного излучения позволяет получить конус КОР с шириной и относительной высотой, близкими к экспериментальным значениям из работы [6].

В работах [24, 25] высказано предположение, что при понижении когерентности двукратный вклад может стать доминирующим. Выполненное нами моделирование указывает, что такое доминирование низких кратностей реализуется только при очень больших углах обратного рассеяния, за пределами обычно наблюдаемого конуса КОР [29]. Мы обнаружили, что при больших углах обратного рассеяния вклад членов высоких порядков приводит к интерференционному уменьшению обратного рассеяния.

## 2. ДИАГРАММНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПОЛЯ И ИНТЕНСИВНОСТИ

Пусть волновые уравнения для случайного поля  $E_{rand}$  и его функции Грина  $T_{rand}$  схематично представлены в виде

$$\begin{aligned} E_{rand} &= E_0 + T_0 \delta\varepsilon E_{rand}, \\ T_{rand} &= T_0 + T_0 \delta\varepsilon T_{rand}, \end{aligned} \quad (1)$$

где нижний индекс «0» относится к нерассеиваю-

щей среде,  $\delta\varepsilon$  — флуктуации диэлектрической проницаемости, а произведения обозначают интегральные свертки. В  $(\mathbf{r}, \omega)$ -представлении

$$T_0(\mathbf{r}) = k_0^2 \exp(ik_0 r)/4\pi r,$$

$k_0 = \sqrt{\varepsilon_0}\omega/c$ ,  $\varepsilon_0$  — средняя диэлектрическая проницаемость,  $c$  — скорость света в вакууме.

Усредняя по флуктуациям диэлектрической проницаемости, получаем уравнения Дайсона для усредненного макроскопического поля  $E = \langle E_{rand} \rangle$  и макроскопической функции Грина  $T = \langle T_{rand} \rangle$ :

$$E = E_0 + T_0 \Pi E, \quad T = T_0 + T_0 \Pi T, \quad (2)$$

где ядро  $\Pi = \Pi(\mathbf{r})$  известно как оператор поляризации (ядро массового оператора/компактный блок) [30, 31] и представляется в виде суммы неприводимых диаграмм. Мнимая часть его фурье-образа  $\Pi(k)$  определяет длину рассеяния  $l_s$ , что фактически соответствует оптической теореме, связывающей полное сечение рассеяния с длиной рассеяния [32]. В дальней зоне для  $|\Pi(k_0)| \ll 1$  уравнение Дайсона дает

$$T(r) \simeq k_0^2 \exp(ikr)/4\pi r,$$

где  $k \simeq k_0(1 + \Pi(k_0)/2)$ . Таким образом, для длины рассеяния получаем

$$l_s = (\text{Im}(k_0 \Pi(k_0)))^{-1}.$$

Итерируя выражения (1), можно представить корреляционную функцию поля в виде операторного ряда:

$$\begin{aligned} \langle \delta E \delta E^* \rangle &= \langle (T \delta\varepsilon + (T \delta\varepsilon)^2 + \dots) E \times \\ &\quad \times (T^* \delta\varepsilon^* + (T^* \delta\varepsilon^*)^2 + \dots) E^* \rangle, \end{aligned} \quad (3)$$

где угловые скобки означают статистическое усреднение по случайным неоднородностям диэлектрической проницаемости,  $\delta E$  — флуктуация поля.

Парный коррелятор поля может быть представлен в виде ряда по порядкам рассеяния

$$\begin{aligned} \langle \delta E(\mathbf{r}'_0) \delta E^*(\mathbf{r}'_0) \rangle &= \sum_{n=1}^{\infty} \int d\mathbf{r}'_1 d\mathbf{r}''_1 \dots d\mathbf{r}'_n d\mathbf{r}''_n \times \\ &\quad \times T(\mathbf{r}'_0, \mathbf{r}'_1) T^*(\mathbf{r}''_0, \mathbf{r}''_1) \prod_{i=2}^n T(\mathbf{r}'_{i-1} - \mathbf{r}'_i) T^*(\mathbf{r}''_{i-1} - \mathbf{r}''_i) \times \\ &\quad \times K(\mathbf{r}'_n, \mathbf{r}''_n, \dots, \mathbf{r}'_1, \mathbf{r}''_1) E(\mathbf{r}'_n) E^*(\mathbf{r}''_n), \end{aligned} \quad (4)$$

где ядро  $K(\mathbf{r}_n, \mathbf{r}''_n, \dots, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}''_1)$  представляет собой многочастичный коррелятор флуктуаций  $\delta\varepsilon$ .

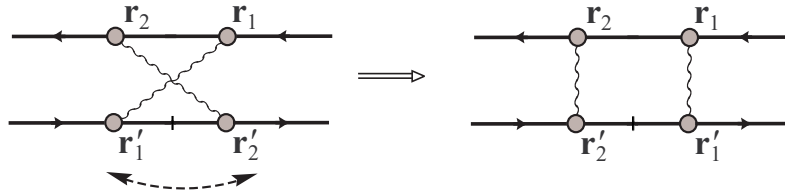


Рис. 1. Топологическая эквивалентность лестничной  $D_L^{(2)}$  и перекрестной  $D_C^{(2)}$  диаграмм второго порядка рассеяния

В предположении гауссова характера флуктуаций, согласно теореме Вика, ядро  $K$  представляется в виде суммы произведений парных корреляторов,

$$K(\mathbf{r}'_n, \mathbf{r}''_n, \dots, \mathbf{r}'_1, \mathbf{r}''_1) = \sum_{j_1, \dots, j_n} \prod_{i=1}^n \langle \delta\varepsilon(\mathbf{r}'_i) \delta\varepsilon^*(\mathbf{r}''_{j_i}) \rangle, \quad (5)$$

по всем перестановкам  $j_1, \dots, j_n$  чисел  $1, 2, \dots, n$ .

Разложение интенсивности (4) представляет собой ряд по кратностям рассеяния, полученный итерированием уравнения Бете – Солпитера. Основной вклад для почти всех углов вносят слагаемые лестничного приближения, когда пара комплексно-сопряженных полей проходит одну и ту же последовательность флуктуаций, или неоднородностей диэлектрической проницаемости, сохраняя при этом исходную разность фаз. Однако при рассеянии строго назад когерентность сохраняется также для случая, когда поля проходят неоднородности  $\delta\varepsilon$  в обратном порядке. В этом случае наблюдается эффект усиления обратного рассеяния.

Приведем диаграммы, описывающие двукратные и трехкратные вклады рассеяния. На рис. 1 показаны диаграммы двукратного рассеяния,

$$D^{(2)} = D_L^{(2)} + D_C^{(2)}, \quad (6)$$

а на рис. 2 – трехкратного рассеяния,

$$D^{(3)} = D_L^{(3)} + D_C^{(3)} + D_{LC}^{(3)} + D_{CL}^{(3)} + D_{CLL}^{(3)} + D_{LLC}^{(3)}. \quad (7)$$

В (7) мы опустили быстроосциллирующие диаграммы, в которых поля и сопряженные поля имеют разный порядок, так называемые грибовидные диаграммы.

Первые члены в (6) и (7) известны как лестничные диаграммы. Они описывают основной, некогерентный вклад в многократное рассеяние, поскольку осциллирующие фазовые коэффициенты комплексно-сопряженных пар коррелированных полей в точности компенсируются.

Максимально-перекрестные диаграммы топологически эквивалентны своим лестничным аналогам. Эта эквивалентность продемонстрирована на рис. 1 и на верхнем изображении на рис. 2 – если повернуть нижнюю линию на  $180^\circ$ , то одна диаграмма

переходит в другую. На этом основано явление когерентного обратного рассеяния, теоретически предсказанного [1–4] и экспериментально подтвержденного [5–8] в середине восьмидесятых годов прошлого века. Для обратного рассеяния строго назад максимально-перекрестные диаграммы равны лестничным. Обозначая явно зависимость от волновых векторов входящей и выходящей волн, получаем

$$D_C^{(2)}(\mathbf{k}_{out}, \mathbf{k}_{out}^* | \mathbf{k}_{in}, \mathbf{k}_{in}^*) = D_L^{(2)}(\mathbf{k}_{out}, -\mathbf{k}_{in}^* | \mathbf{k}_{in}, -\mathbf{k}_{out}^*).$$

Четыре оставшиеся диаграммы в (7) также разбиваются на две топологически эквивалентные пары, как показано на среднем и нижнем изображениях на рис. 2. Эти диаграммы сильно зависят от углов входа и выхода, и поэтому в широких угловых пределах они могут оказаться важными. Мы будем называть их случайно-интерференционными диаграммами.

### 3. ДИАГРАММЫ 2-ГО И 3-ГО ПОРЯДКОВ

При вычислении диаграмм проводится интегрирование по пространственным координатам  $\mathbf{r}'_i$  и  $\mathbf{r}''_i$ , связывающим парную корреляцию. Удобно перейти к переменным интегрирования по координатам «центра масс»  $\mathbf{r}_i = (\mathbf{r}'_i + \mathbf{r}''_i)/2$  и разностным координатам  $\mathbf{r}'''_i = \mathbf{r}'_i - \mathbf{r}''_i$ . Диапазон координат центра масс  $\mathbf{r}_i$  определяет длина рассеяния  $l_s$ , а масштаб расстояния  $\mathbf{r}'''_i$  – длина корреляций диэлектрической проницаемости  $r_c \ll l_s$ .

Функции Грина, входящие в выражение (4), для  $2 \leq i \leq n$  можно представить в виде

$$T(\mathbf{r}'_{i-1} - \mathbf{r}'_i) = \frac{k_0^2}{4\pi} \tilde{T}(\mathbf{r}_{i-1} - \mathbf{r}_i) \times \exp(i\mathbf{q}_i \cdot (\mathbf{r}'''_{i-1} - \mathbf{r}'''_i)/2), \quad (8)$$

где  $\mathbf{q}_i$  – вектор рассеяния на  $i$ -м шаге,

$$\tilde{T}(r) = r^{-1} \exp((ik_0 - \mu_s/2)r)$$

– основной пространственно-зависимый фактор функции Грина, коэффициент рассеяния  $\mu_s = l_s^{-1}$ .

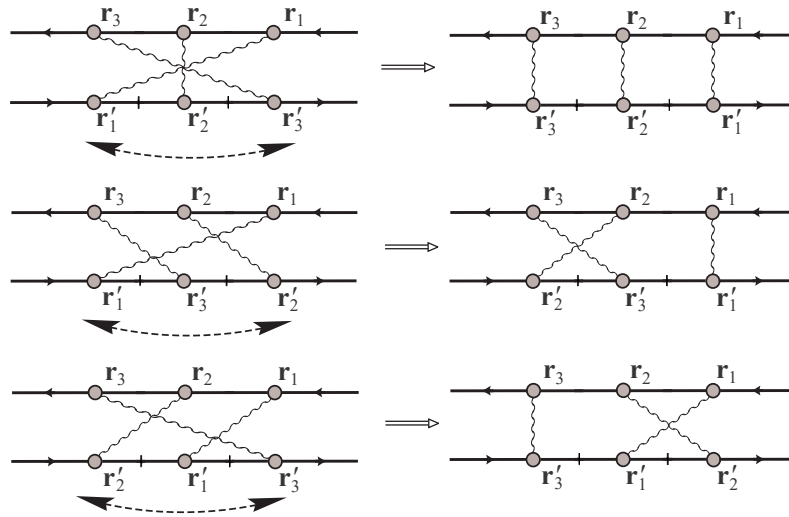


Рис. 2. Топологическая эквивалентность диаграмм третьего порядка: лестничной  $D_L^{(3)}$  и максимально-перекрестной  $D_C^{(3)}$ , и двух пар интерференционных диаграмм третьего порядка  $D_{CLL}^{(3)}$  и  $D_{LC}^{(3)}$ ,  $D_{LLC}^{(3)}$  и  $D_{CL}^{(3)}$

В силу трансляционной инвариантности парная корреляционная функция  $\langle \delta\varepsilon(\mathbf{r}'_i) \delta\varepsilon^*(\mathbf{r}''_i) \rangle$  зависит только от разностных переменных  $\mathbf{r}'''_i$ :

$$G(\mathbf{r}''') = \langle \delta\varepsilon(\mathbf{r}_i + \mathbf{r}'''_i/2) \delta\varepsilon^*(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}'''_i/2) \rangle.$$

Для изотропного рассеяния радиус корреляции  $r_c$  много меньше длины волны  $\lambda$ ; мы имеем, фактически,  $G(\mathbf{r}''') \propto \delta(\mathbf{r}''')$ , и интегралы по  $\mathbf{r}'''_i$  берутся тривиально. В общем случае эти интегралы производят фазовую функцию  $p(\mathbf{q})$  с дополнительным множителем  $\mu_s$ , поскольку, согласно оптической теореме,

$$\frac{k_0^4}{(4\pi)^2} \int d\mathbf{r}''' G(\mathbf{r}''') \exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}''') = \mu_s p(\mathbf{q}).$$

Представим вклады диаграмм второго порядка, лестничную и перекрестную, в виде

$$J_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(2)}(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_f) = \mu_s \int_0^\infty dz_1 \int d\mathbf{r}_2 D_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(2)}(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_f).$$

Индексы  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  обозначают номера координат (см. рис. 3) пары входящих  $\mathbf{k}_i$  и выходящих  $\mathbf{k}_f$  плоских волн. Набор  $\alpha = \beta = 1, \gamma = \delta = 2$  соответствует лестничной диаграмме  $D_{1122}^{(2)} = D_L^{(2)}$ , набор  $\alpha = \delta = 1, \beta = \gamma = 2$  — перекрестной диаграмме  $D_{1221}^{(2)} = D_C^{(2)}$ . Для диаграмм третьего порядка

$$J_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(3)}(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_f) = \mu_s \int_0^\infty dz_1 \int d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}_3 D_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(3)}(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_f).$$

Нижние индексы задают при  $\alpha = \beta = 1$  и  $\gamma = \delta = 3$  лестничную диаграмму  $D_{1133}^{(3)} = D_L^{(3)}$ , а

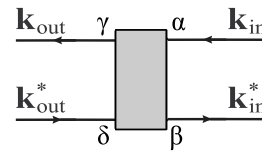


Рис. 3. Справа изображена пара плоских волн, падающих на систему, а слева — те же волны, покидающие систему в результате многократного рассеяния

при  $\alpha = \delta = 1$  и  $\beta = \gamma = 3$  максимально-перекрестную диаграмму  $D_{1331}^{(3)} = D_C^{(3)}$ , остальные — случайно-интерференционные диаграммы

$$\begin{aligned} D_{1231}^{(3)} &= D_{CLL}^{(3)}, & D_{1132}^{(3)} &= D_{LC}^{(3)}, \\ D_{1332}^{(3)} &= D_{LLC}^{(3)}, & D_{1233}^{(3)} &= D_{CL}^{(3)}. \end{aligned}$$

Определим геометрию рассеяния. Пусть плоская волна падает нормально на слой  $0 < z < T$ , где  $z$  — декартова координата нормальной границы раздела, а  $T$  — толщина слоя.

Определим элементы падающих и рассеянных плоских волн,  $\mathbf{k}_i = (0, 0, k)$  и  $\mathbf{k}_f = k(\sin\theta_s, 0, -\cos\theta_s)$ , где  $\theta_s$  — угол обратного рассеяния, отсчитываемый от обратного направления, с учетом затухания в рассматриваемой геометрии обратного рассеяния как

$$\begin{aligned} F_{\alpha\beta}^{(in)}(\mathbf{k}_i) &= \exp\left(i\mathbf{k}_i \cdot (\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta) - \frac{\mu_s}{2}(z_\alpha + z_\beta)\right), \\ F_{\gamma\delta}^{(out)}(\mathbf{k}_f) &= \exp\left(i\mathbf{k}_f \cdot (\mathbf{r}_\gamma - \mathbf{r}_\delta) - \frac{\mu_s}{2}(z_\gamma + z_\delta)\right). \end{aligned}$$

Лестничная диаграмма содержит тривиальную зависимость, обусловленную угловой зависимостью

коэффициентов рассеяния  $\mu_s / \cos \theta$  при наклонном выходе или входе. Максимально-перекрестная диаграмма содержит сильную угловую зависимость из-за интерференции падающего и рассеянного полей. Другие диаграммы могут демонстрировать сильную угловую зависимость также из-за интерференции входящего и выходящего полей. Для декартовой параметризации волновых векторов получаем

$$F_{in}^{(L)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1)F_{out}^{(L)}(\mathbf{r}_n, \mathbf{r}_n) = \exp(-\mu_s(z_1 + z_n/\cos \theta_f)),$$

$$F_{in}^{(C)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_n)F_{out}^{(C)}(\mathbf{r}_n, \mathbf{r}_1) = \exp(ik(x_1 - x_n) \sin \theta_f + ik(z_1 - z_n)(1 - \cos \theta_f) - \mu_s(z_1 + z_n/\cos \theta_f)).$$

Тогда лестничные и максимально-перекрестные диаграммы второго и третьего порядков примут вид

$$D_L^{(2)}(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_f) = \mu_s^2 p(\mathbf{q}_1) p(\mathbf{q}_2) F_{11}^{(in)}(\mathbf{k}_i) \Lambda(r_{12}) F_{22}^{(out)}(\mathbf{k}_f),$$

$$D_C^{(2)}(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_f) = \mu_s^2 p(\mathbf{q}_1) p(\mathbf{q}_2) F_{12}^{(in)}(\mathbf{k}_i) \Lambda(r_{12}) F_{21}^{(out)}(\mathbf{k}_f),$$

$$D_L^{(3)}(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_f) = \mu_s^3 p(\mathbf{q}_1) p(\mathbf{q}_2) p(\mathbf{q}_3) F_{11}^{(in)}(\mathbf{k}_i) \Lambda(r_{12}) \times$$

$$\times \Lambda(r_{23}) F_{33}^{(out)}(\mathbf{k}_f),$$

$$D_C^{(3)}(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_f) = \mu_s^3 p(\mathbf{q}_1) p(\mathbf{q}_2) p(\mathbf{q}_3) F_{13}^{(in)}(\mathbf{k}_i) \Lambda(r_{12}) \times$$

$$\times \Lambda(r_{23}) F_{31}^{(out)}(\mathbf{k}_f),$$

Стандартные алгоритмы моделирования многократного рассеяния [33] используют оператор  $\Lambda(r) = |\tilde{T}(r)|^2$  — пропагатор уравнения переноса излучения (включая уравнение Бете–Солпитера в лестничном приближении).

В некогерентных вкладах, описываемых лестничными диаграммами, остаются только затухающие множители, а осциллирующие полностью компенсируются. В максимально-перекрестных диаграммах полная компенсация осциллирующих множителей реализуется только при рассеянии строго назад,  $\mathbf{k}_f = -\mathbf{k}_i$ . Все остальные диаграммы содержат осциллирующие множители из-за несовпадения как пар входящих или выходящих полей, так и функций Грина. Например, диаграмма

$$D_{1332}(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_f) = \mu_s^3 p(\mathbf{q}_1) p(\mathbf{q}_2) p(\mathbf{q}_3) F_{13}^{(in)}(\mathbf{k}_i) \times$$

$$\times F_{32}^{(out)}(\mathbf{k}_f) \Lambda(r_{12}) \tilde{T}(r_{23}) \tilde{T}^*(r_{31}) \quad (9)$$

содержит нескомпенсированный осциллирующий множитель. Осциллирующие множители сильно затрудняют прямое стохастическое моделирование. Очевидно, что при больших значениях случайной переменной вида  $k(R_{23} - R_{13})$ , где  $R_{ij} = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$ , или  $k(z_1 - z_3)$  вкладом таких конфигураций можно пренебречь. Поэтому при моделировании мы выполняли обрезание высокочастотных стохастических флуктуаций.

#### 4. МОДЕЛИРОВАНИЕ МЕТОДОМ МОНТЕ-КАРЛО

В численном моделировании интенсивность рассеяния представляется в виде ряда по кратностям рассеяния:

$$J(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_f) = \sum_{n=1}^{\infty} J^{(n)}(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_f), \quad (10)$$

где  $J^{(n)}(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_f)$  — вклад  $n$ -го порядка рассеяния.

В рамках лестничного приближения на основе уравнения Бете–Солпитера мы представляем член  $n$ -го порядка  $J^{(n)}(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_f)$  как среднее по выборке  $N_{ph}$  падающих фотонов:

$$J^{(n)}(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_f) = \frac{1}{N_{ph}} \sum_{i=1}^{N_{ph}} W_n^{(i)}(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_f) \times$$

$$\times p(\hat{\mathbf{k}}_{n-1}^{(i)} \hat{\mathbf{k}}_f) f_{BLB}(\mathbf{k}_f, z_n^{(i)}), \quad (11)$$

где  $W_n^{(i)}(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_f)$  и  $z_n^{(i)}$  — соответственно вес и расстояние до границы от точки  $\mathbf{r}_n^{(i)}$   $n$ -го акта рассеяния. Экспоненциальный множитель Бугера–Ламберта–Бера  $f_{BLB}(\mathbf{k}_f, z_n^{(i)})$  описывает затухание рассеянного излучения, распространяющегося от точки  $z_n^{(i)}$  последнего события рассеяния до границы в приближении Фраунгофера. Он зависит от оптических параметров среды на пути фотона, движущегося к границе. Для однородной среды

$$f_{BLB}(\mathbf{k}_f, z) = \exp(-\mu_s z / \cos \theta_s).$$

Вес  $W_n^{(i)}$  представляет собой случайное значение многократного пространственного интеграла, возникшего как итерация  $n$ -го порядка уравнения Бете–Солпитера. Вычисляя его, можно смоделировать стохастическую последовательность точек рассеяния  $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n$ . Полную сумму лестничных диаграмм, практически не зависящую от угла обратного рассеяния (кроме зависимости вида  $\exp(-\mu_s z / \cos \theta_s)$  для входящих и выходящих плоских волн) в области пика обратного рассеяния, обозначим как

$$J_L(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_f) = \sum_n J_L^{(n)}(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_f),$$

а полную сумму максимально-перекрестных диаграмм — как

$$J_C(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_f) = \sum_n J_C^{(n)}(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_f).$$

Метод Монте-Карло в теории переноса излучения основан на хорошо известной процедуре обрат-

ного преобразования [33, 34]. Обратное преобразование позволяет перестроить интеграл с экспоненциальным распределением по полубесконечному интервалу  $[0, \infty]$  в интеграл по случайной величине, равномерно распределенной в единичном интервале  $[0, 1]$ . В рамках стандартного алгоритма затухающий множитель в пропагаторе  $\Lambda(r)$  представляется как плотность вероятности экспоненциального распределения  $f(r) = \mu_s^{-1} \exp(-\mu_s r)$  случайной величины  $r$ , описывающей расстояние между двумя актами рассеяния. Кумулятивная функция экспоненциального распределения легко вычисляется:

$$\xi(r) = 1 - \exp(-\mu_s r), \quad (12)$$

где  $\xi$  или  $\xi' = 1 - \xi$  — случайные величины, равномерно распределенные в единичном интервале  $[0, 1]$ . Обратное преобразование дает

$$r = -\mu_s^{-1} \ln \xi'. \quad (13)$$

В диаграммах третьего порядка и выше появляются функции Грина без соответственной комплексно-сопряженной пары, что не позволяет описать перенос излучения в терминах пропагатора  $\Lambda(r)$ . Для таких диаграмм мы используем метод обратного преобразования пространственных интегралов, содержащих полевые функции Грина, а не стандартный метод, ориентированный на пропагатор  $\Lambda(r)$ . Представляя экспоненциально затухающий множитель функции Грина как величину, распределенную с плотностью вероятности

$$f(r) = (\mu_s/2)^{-1} \exp(-\mu_s r/2),$$

получим  $r = -(\mu_s/2)^{-1} \ln \xi'$ . Для случая, когда все функции Грина можно «спарить» со своими сопряженными, оба выбора функции распределения в методе обратного преобразования — в виде как пропагатора переноса излучения  $\Lambda(r)$ , так и функции Грина, дают одинаковые результаты.

К интегралам по угловым переменным метод обратного преобразования применяется, как обычно. Угловую переменную  $t = \cos \theta$ , представленную в виде случайной величины, распределенной на основе заданной фазовой функции, заменяют на равномерно распределенную случайную величину  $\chi$ . Определим кумулятивную функцию, распределенную в интервале  $[0, 1]$ :

$$\chi = F(t) = 2\pi \int_{-1}^t p(t') dt', \quad (14)$$

где  $p(t)$  — фазовая функция. Затем выполняем обратное преобразование  $t = F^{-1}(\chi)$ . Наиболее

часто используемой в биомедицинских приложениях является фазовая функция Хеньи–Гринштейна, важным достоинством которой является тот факт, что обратное преобразование кумулятивной функции (14) выполняется аналитически в явном виде. Описание однократного рассеяния фазовой функцией Рэля–Ганса позволяет моделировать оптические свойства ткани или биофантома на основе физической модели суспензии, но требует существенных математических усложнений [35, 36]. В данной работе мы ограничимся при моделировании функцией Хеньи–Гринштейна. Отметим, что интенсивность рассеяния, вычисленная с помощью выражения (11), может быть интерпретирована как среднее значение экспоненты  $\exp(-\mu_s z_n^{(i)})/\cos \theta_s$ , которая описывает затухание фотона, возвращающегося из объемной среды к границе после  $n$  актов рассеяния. Поскольку среда ограничена, фотон возвращается в среду, если он достиг границы, в силу закона отражения [15]. Таким образом, вес  $W_n^{(i)}$  является произведением коэффициентов отражения Френеля. В частном случае отсутствия отражения и адсорбции он равен единице или нулю.

## 5. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Основным препятствием для применения эффекта усиления КОР в биомедицинской практике является малая ширина пика. В работах [24, 25] показано, что ширина пика значительно увеличивается при понижении пространственной когерентности падающего излучения, а его высота одновременно уменьшается. Понижение пространственной когерентности в рассматриваемой нами расчетной схеме моделируется путем понижения максимального числа актов рассеяния  $n_{sc}$ . Для сравнения результатов моделирования КОР с известными экспериментальными результатами мы взяли значения оптических параметров из известной работы [6]:  $\lambda = 0.633$  мкм, показатель преломления  $n = 1.33$ ,  $g = 0.93$ ,  $l_s = 2.6$  мкм.

На рис. 4 показана индикатриса КОР, а именно, угловая зависимость величины

$$h(\theta_s) = (J_{BG} + J_{CBS}(\theta_s))/J_{BG},$$

представляющей собой отношение суммарной интенсивности обратного рассеяния к фоновой интенсивности  $J_{BG}$  за пределами угловой области усиления КОР. На практике  $J_{BG}$  — это вклад лестничных диаграмм,  $J_{BG} = J_L$ . В интересующей нас сравнительно узкой области углов  $J_{BG}$  можно считать

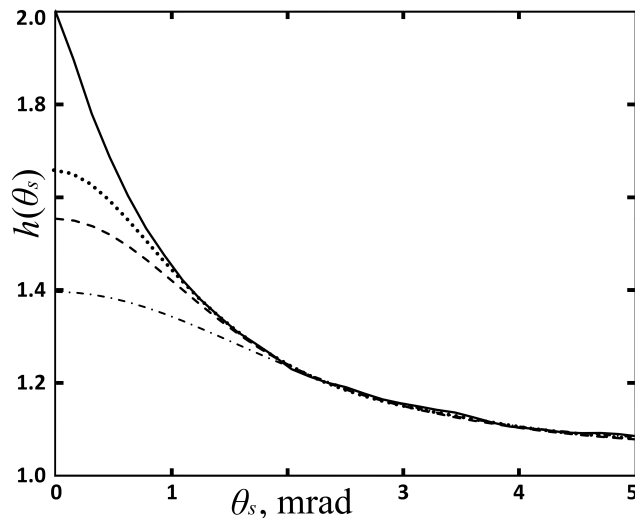


Рис. 4. Зависимости относительной интенсивности обратного рассеяния  $h(\theta_s) = (J_{BG} + J_{CBS}(\theta_s))/J_{BG}$  от угла обратного рассеяния  $\theta_s$  при различных значениях максимального числа актов рассеяния: сплошная линия —  $n_{sc} = 5 \cdot 10^5$ ; пунктирная линия —  $n_{sc} = 340$ ; штриховая линия —  $n_{sc} = 200$ ; штрихпунктирная линия —  $n_{sc} = 100$ . Параметр анизотропии рассеяния  $g = 0.93$

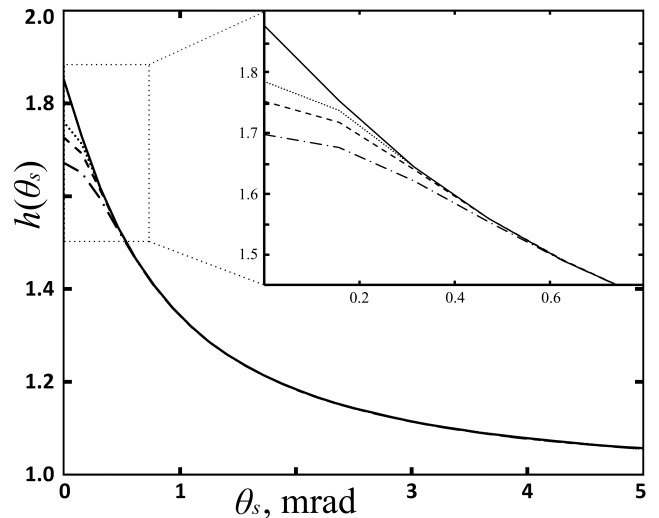


Рис. 5. То же, что на рис. 4 для изотропного рассеяния ( $g = 0$ )

Таблица. Уменьшение высоты и угловое уширение пика КОР с понижением когерентности

$n_{sc}$	$h(0)$	$\theta_{HW}$ , мрад	$L_c$ , мкм
$5 \cdot 10^5$	1.99	0.78	$3.9 \cdot 10^5$
340	1.64	1.50	884
200	1.55	1.73	520
100	1.39	2.36	260

величиной, не зависящей от  $\theta_s$ . Мы использовали  $n_{sc} = 5 \cdot 10^5$ , что соответствует практически бесконечной длине когерентности, а также  $n_{sc} = 340$ ,  $n_{sc} = 200$  и  $n_{sc} = 100$  для учета пониженной когерентности излучения. Значение  $n_{sc} = 340$  соответствует длине когерентности  $L_c \sim n_{sc} l_s \approx 880$  мкм, а  $n_{sc} = 200$  и  $n_{sc} = 100$  — соответственно длинам  $L_c = 520$  мкм и  $L_c = 260$  мкм. Видно, что при таких  $L_c$  происходит заметное уширение пика КОР, причем ширина пика возрастает с уменьшением когерентности излучения. В таблице приведены соответствующие высоты  $h(0)$ , полуширины  $\theta_{HW}$  пиков КОР (НВНМ — полуширина на полувывоте пика,  $J_{CBS}(\theta_{HW}) = J_{CBS}(0)/2$ ) и длины когерентности  $L_c$ .

Практически во всех экспериментальных работах, начиная с пионерских [6–8, 29], значение параметра усиления КОР  $h(0)$  заметно не достигает предельного теоретического значения  $h(0) = 2$ .

В частности, в работе [6] получено экспериментальное значение  $h(0) = 1.64$ , которое совпадает с результатом нашего численного расчета при выборе  $n_{sc} = 340$ . Рассчитанная при этом значении  $n_{sc}$  полуширина пика КОР  $\theta_{HW} = 1.50$  мрад также неплохо согласуется с экспериментальным значением  $\theta_{HW} = 1.58$  мрад [6]. Добавим, что согласно априорной оценке имеем величину  $\theta_{HW} \sim W_0 = (kl_{tr})^{-1} \approx 2.0$  мрад, где  $l_{tr} = l_s/(1 - g)$ , а  $g$  — параметр анизотропии среды. Диффузионное приближение дает  $\theta_{HW} = 3.3$  мрад [8], что по порядку величины также согласуется с нашими данными из таблицы.

Отметим, что в работе [25] эффект КОР применялся в реальной биомедицинской практике при изучении рака тканей толстой кишки человека с помощью низкокогерентного оптического излучения. Полученная в этой работе высота пика  $h(0)$  составляла около 1.07, а полуширина  $\theta_{HW} \approx 3.5$  мрад. Наше моделирование методом Монте-Карло дает такую величину  $h(0)$  при  $n_{sc} = 20$ .

При  $\theta_s \gtrsim 2$  мрад индикатрисы на рис. 4 для  $n_{sc} = 5 \cdot 10^5, 340, 200, 100$  практически совпадают, т.е. роль очень высоких кратностей рассеяния при больших углах существенно понижается. Это происходит за счет того, что, во-первых, положительные вклады от лестничных диаграмм при больших углах рассеяния достаточно быстро убывают (по закону  $n_{sc}^{-3/2}$  [37]), а во-вторых, потому, что в этой области максимально-перекрестные диаграммы практически полностью компенсируют друг друга, поскольку при больших углах их вклад может быть как положительным, так и отрицательным.

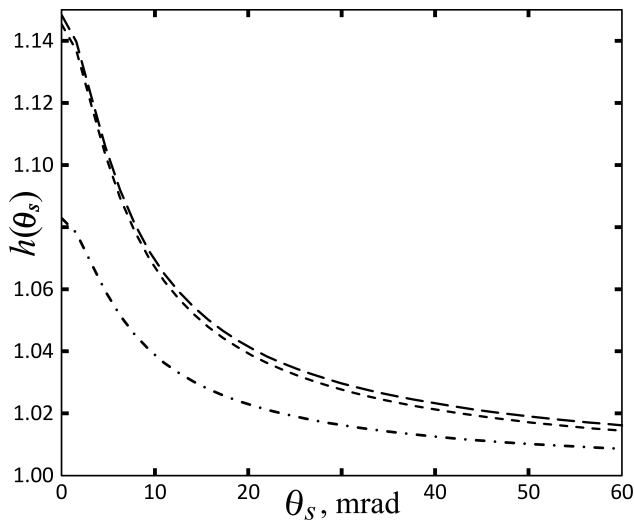


Рис. 6. Вклад низших нелестничных диаграмм в  $h(\theta_s)$  для изотропного рассеяния в области  $\theta_s \geq 10$  мрад. Длинные штрихи — сумма всех диаграмм второго и третьего порядков, короткие штрихи — сумма максимально-перекрестных диаграмм второго и третьего порядков; штрихпунктирная линия — двукратная перекрестная диаграмма

Для сравнения на рис. 5 приводятся индикатрисы в той же области углов, рассчитанные для изотропной среды. Здесь эффект уширения пика КОР также имеет место, но для тех же длин когерентности выражен заметно меньше.

Для случая изотропного рассеяния мы также рассчитали угловую зависимость  $h(\theta_s)$ , включая вклады нелестничных диаграмм третьего порядка (последние четыре диаграммы на рис. 2). Оказалось (рис. 6), что их вклад в области пика КОР составляет около 1% от вклада максимально-перекрестных диаграмм, возрастая до 5–8% при углах более 50 мрад.

На рис. 6 мы приводим также график угловой зависимости вклада двукратного рассеяния. Этот вклад составляет менее 10% от высоты пика КОР, что делает неоправданным предположение [24,25] об основной роли двукратного рассеяния в образовании пика КОР для низкокогерентного излучения.

## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы выполнили моделирование эффекта обратного когерентного рассеяния в широкой угловой области. Развита алгоритм моделирования методом Монте-Карло на основе итерационного решения уравнения Бете–Солпитера. Использование описания интенсивности многократного рассеяния в

терминах полевых функций Грина позволило нам учесть вклады нелестничных диаграмм, которые мы называем случайно-интерференционными. Моделирование в рамках стандартного описания КОР в терминах оператора переноса  $\Lambda(r)$  и описания на основе функций Грина показало, что при малых углах обратного рассеяния относительный вес случайно-интерференционных диаграмм составляет около 1%, достигая 5–8% при углах рассеяния около 50 мрад, актуальных при применении излучения с пониженной когерентностью в биомедицинской практике.

Для вклада интерференционных диаграмм мы получили оценку ширины пика обратного рассеяния, в несколько раз превосходящую априорную оценку  $W \sim W_0 = (kl_{tr})^{-1}$ . Это свойство уширения пика КОР наблюдается только у части перекрестных диаграмм,  $D_{1332}^{(3)}$  и  $D_{1231}^{(3)}$ , с явными корреляциями между входящими и выходящими полями и может быть использовано в приложениях. Диаграммы  $D_{1132}^{(3)}$  и  $D_{1233}^{(3)}$  представляют собой первую поправку к лестничному приближению уравнения Бете–Солпитера. Указанные диаграммы практически не зависят от угла рассеяния в рассматриваемом угловом диапазоне КОР, вплоть до  $\theta_s = 60$  мрад, и представляют фактически фон пика КОР.

Принимая максимальное число событий рассеяния  $n_{sc}$  в качестве параметра, определяющего пространственную длину когерентности  $L_c = n_{sc}l_s$ , где  $l_s$  — длина рассеяния, мы показали, что использование низкокогерентного излучения позволяет получить конус КОР с шириной и относительной высотой, близкими к экспериментальным значениям [6].

Для сравнения с экспериментом мы взяли данные из работы [7]. Однако значения оптических параметров, представляющих в настоящее время интерес в биомедицинской практике, лежат в другом интервале, где рассеяние существенно меньше. Для типичных биологических тканей коэффициент рассеяния лежит в пределах от 200 до 500 см<sup>-1</sup>. Для длины рассеяния это дает интервал 20–50 мкм, который на порядок больше типичных значений длин рассеяния суспензий, использованных в работах [6–8]. Для реального использования КОР в биотканях требуется добиться более широкой угловой области усиления обратного рассеяния, в том числе за счет различных механизмов понижения когерентности, включая рассмотренный в настоящей работе.

**Финансирование.** Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда, грант №23-22-00035, <https://rscf.ru/project/23-22-00035/>.



## ЛИТЕРАТУРА

1. K. M. Watson, *J. Math. Phys.* **10**, 688 (1969).
2. D. A. de Wolf, *IEEE Trans. Antennas Propag.* **19**, 254 (1971).
3. Ю. Н. Барабаненков, *Изв. вузов, Радиофизика* **16**, 88 (1973).
4. А. Г. Виноградов, Ю. А. Кравцов, В. И. Татарский, *Изв. вузов, Радиофизика* **16**, 1064 (1973).
5. Y. Kuga and A. Ishimaru, *J. Opt. Soc. Am. A* **1**, 831 (1984).
6. M. P. Van Albada and A. Lagendijk, *Phys. Rev. Lett.* **55**, 2692 (1985).
7. P.-E. Wolf and G. Maret, *Rev. Lett.* **55**, 2696 (1985).
8. E. Akkermans, P. Wolf, R. Maynard, and G. Maret, *J. de Phys.* **49**, 77 (1988).
9. D. J. Pine, D. A. Weitz, P. M. Chaikin, and E. Herbolzheimer, *Phys. Rev. Lett.* **60**, 1134 (1988).
10. P. Wolf, G. Maret, E. Akkermans, and R. Maynard, *J. de Phys.* **49**, 63 (1988).
11. T. Durduran, R. Choe, W. B. Baker, and A. G. Yodh, *Rep. Prog. Phys.* **73**, 076701 (2010).
12. A. P. Tran, S. Yan, and Q. Fang, *Neurophoton.* **7**, 015008 (2020).
13. A. Sabeeh and V. V. Tuchin, *J. Biomed. Photon. Engineer.* **6**, 040201 (2020).
14. В. В. Тучин, *Оптика биологических тканей. Методы рассеяния света в медицинской диагностике*, IPR Media, Москва (2021).
15. T. H. Pham, O. Coquoz, J. B. Fishkin, E. Anderson, and B. J. Tromberg, *Rev. Sci. Instrum.* **71**, 2500 (2000).
16. R. C. Haskell, L. O. Svaasand, T.-T. Tsay, T.-C. Feng, B. J. Tromberg, and M. S. McAdams, *J. Opt. Soc. Am. A* **11**, 2727 (1994).
17. D. A. Boas, L. E. Campbell, and A. G. Yodh, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 1855 (1995).
18. X. Cheng, D. Tamborini, S. A. Carp, O. Shatrovov, B. Zimmerman, D. Tyulmankov, A. Siegel, M. Blackwell, M. A. Franceschini, and D. A. Boas, *Opt. Lett.* **43**, 2756 (2018).
19. H. Wabnitz, J. Rodriguez, I. Yaroslavsky, A. Yaroslavsky, and V. V. Tuchin, *Handbook of Optical Biomedical Diagnostics. Light-Tissue Interaction*, Vol. 1, SPIE Press, Bellingham, Washington (2016).
20. D. A. Boas, S. Sakadzic, J. Selb, P. Farzam, M. A. Franceschini, and S. A. Carp, *Neurophotonics* **3**, 031412 (2016).
21. S. Etemad, R. Thompson, M. J. Andrejco, S. John, and F. C. MacKintosh, *Phys. Rev. Lett.* **59**, 1420 (1987).
22. T. Okamoto and T. Asakura, *Opt. Lett.* **21**, 369 (1996).
23. A. Wax, C. Yang, and J. A. Izatt, *Opt. Lett.* **28**, 1230 (2003).
24. Y. L. Kim, P. Pradhan, H. Subramanian, Y. Liu, M. H. Kim, and V. Backman, *Opt. Lett.* **31**, 1459 (2006).
25. Y. L. Kim, Y. Liu, V. M. Turzhitsky, H. K. Roy, R. K. Wali, H. Subramanian, P. Pradhan, and V. Backman, *J. Biomed. Opt.* **11**, 041125 (2006).
26. H. Subramanian, P. Pradhan, Y. L. Kim, Y. Liu, X. Li, and V. Backman, *Appl. Opt.* **45**, 6292 (2006).
27. M. Xu, *Opt. Lett.* **33**, 1246 (2008).
28. J. Liu, Z. Xu, Q. Song, R. L. Konger, Y. L. Kim, *J. Biomed. Opt.* **15**, 037011 (2010).
29. D. S. Wiersma, M. P. van Albada, and A. Lagendijk, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 1739 (1995).
30. С. М. Рытов, Ю. А. Кравцов, В. И. Татарский, *Введение в статистическую радиофизику. Часть 2. Случайные поля*, Наука, Москва (1978).
31. V. Kuzmin, V. Romanov, and L. Zubkov, *Phys. Rep.* **248**, 71 (1994).
32. В. Л. Кузьмин, *ЖЭТФ* **127**, 1173 (2005).
33. L. Wang, S. L. Jacques, and L. Q. Zheng, *Comput. Meth. Prog. Bio.* **47**, 131 (1995).
34. L. Devroye, *Non-Uniform Random Variate Generation*, Springer, New York (1986).
35. В. Л. Кузьмин, А. Ю. Вальков, *Письма в ЖЭТФ* **105**, 261 (2017).
36. В. Л. Кузьмин, А. Ю. Вальков, Л. А. Зубков, *ЖЭТФ* **155**, 460 (2019).
37. T. M. Nieuwenhuizen and J. M. Luck, *Phys. Rev. E* **48**, 569 (1993).