

МАГНИТОИНДУЦИРОВАННЫЕ ТЕЧЕНИЯ В ТРОМБИРОВАННЫХ КАНАЛАХ СО СЛОЕМ ФЕРРОЖИДКОСТИ

А. Ю. Мусихин^{}, А. Ю. Зубарев*

*Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б. Н. Ельцина
620002, Екатеринбург, Россия*

Поступила в редакцию 8 июня 2023 г.,
после переработки 1 августа 2023 г.
Принята к публикации 4 августа 2023 г.

Предложена теоретическая модель и метод ее приближенного анализа для течений, индуцируемых однородным вращающимся магнитным полем в канале, заполненном немагнитной жидкостью и внедренным в нее слоем феррожидкости. Один конец канала предполагается закрытым (тромбированным). Цель работы — развитие научной основы магнитоиндуцированной интенсификации транспорта лекарств в тромбированных кровеносных сосудах.

DOI: 10.31857/S0044451023120222

EDN: MYVLWE

1. ВВЕДЕНИЕ

Проблема интенсификации и адресного транспорта лекарств в организме при помощи внешних электрических и магнитных полей является перспективным направлением развития современной медицины (см., например, обзор в [1]).

Тромбирование кровеносных сосудов является тяжелым и трудноизлечимым заболеванием, нередко приводящим к летальным исходам. Основным методом лечения тромбозов является инъекция лекарств (тромболитиков) для растворения тромбов и восстановления кровотока. Однако в тромбированном кровеносном сосуде с остановившимся кровотоком распространение тромболитиков возможно только диффузионным, т. е. медленным и малоэффективным способом. Перспективный метод решения этой проблемы был предложен и запатентован в [2, 3]. Основная идея этого метода состоит в инъектировании в тромбированный кровеносный сосуд капли растворимой феррожидкости с наноразмерными магнитными частицами и в воздействии на это место переменного магнитного поля, создаваемого внешними электромагнитами. Под действием этого поля частицы переходят во вращательное

и поступательное движение, передающееся несущей жидкости. В результате в кровеносном сосуде возникают циркуляционные течения, интенсифицирующие перемешивание несущей жидкости и введенных в нее тромболитиков. Это обеспечивает более эффективный транспорт лекарств к месту нахождения тромба.

Очевидно, практическое применение этого метода требует тщательного изучения особенностей генерирования течений, их структуры, выявления оптимальной конфигурации магнитного поля и других физических характеристик системы. Теоретический анализ таких течений в системах со сферическими частицами под действием вращающегося сильно неоднородного поля был нами выполнен в работе [4, 5]. В частности, было показано, что эти течения возникают в системах с пространственно-неоднородным распределением частиц, если градиент напряженности поля достаточно велик. Однако на практике создать поле с необходимым градиентом напряженности непросто. Поэтому представляет интерес исследование ситуаций, когда желаемые течения в несущей жидкости генерируются в слабоградиентном или вообще в однородном поле.

В этой работе мы предлагаем теоретическую модель циркуляционного течения, генерируемого в канале, моделирующем кровеносный сосуд. Канал заполнен немагнитной жидкостью, в которой находится пространственно-неоднородный слой инжек-

^{*} E-mail: antoniusmagna@yandex.ru

тированной феррожидкости. Течения генерируются под действием пространственно-однородного вращающегося поля. Неоднородное распределение частиц феррожидкости создается магнитным полем с градиентом напряженности, направленным перпендикулярно оси канала. Полученные результаты показывают, что пространственно-неоднородное распределение частиц в канале может приводить к достаточно интенсивным макроскопическим течениям среды, способным, в частности, существенно интенсифицировать транспорт лекарств в кровеносных сосудах.

2. ОСНОВНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Ради максимального упрощения математической стороны дела в качестве модели кровеносного сосуда мы рассмотрим не цилиндрический канал, а полубесконечную плоскую щель толщины l , заполненную немагнитной ньютоновской жидкостью. При соблюдении реалистических отношений между продольными и поперечными к оси канала масштабами задачи результаты плоской модели, по крайней мере, по порядку величины должны соответствовать ситуации в цилиндрических каналах. Отметим, что переход к цилиндрической геометрии не приводит к принципиальным трудностям, но делает вычисления более громоздкими и менее прозрачными. Поэтому, исходя из методических соображений, здесь мы рассматриваем именно плоскую задачу.

Рассматриваемая модельная система показана на рис. 1. Правый конец щели закрыт непроницаемой для жидкости стенкой, моделирующей тромб. В эту жидкость внедрен слой феррожидкости, состоящей из одинаковых сферических магнитных наночастиц. К каналу приложено вращающееся однородное магнитное поле с компонентами $H_x = H_0 \sin \omega t$, $H_z = H_0 \cos \omega t$.

Во избежание недоразумений отметим, что обычно наночастицы феррожидкости вовлечены в интен-

сивное броуновское движение. Гравитация не способна привести к сколько-нибудь заметному изменению их концентрации на расстояниях, соответствующих размерам кровеносных сосудов. Поэтому здесь мы эффектов гравитации не рассматриваем, расположение слоя феррожидкости в верхней части щели на рис. 1 сделано с иллюстративной целью и не противоречит физике дела.

Обозначим локальную объемную концентрацию частиц $\Phi(x, z, t)$ и будем предполагать, что она мала, не превышает нескольких процентов. Поэтому можно пренебречь ее влиянием на локальную эффективную вязкость η феррожидкости и изменением локального магнитного поля \mathbf{H} за счет размагничивающих эффектов. Отметим, что приближение малых концентраций Φ соответствует ограничениям, диктуемым биологической безопасностью применения магнитных наночастиц в медицинских технологиях.

В приближении механики сплошных сред уравнения течения жидкости с феррочастицами в однородном вращающемся поле могут быть представлены в виде (см., например, [6, 7])

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v_x}{\partial t} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \Delta v_x + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z}(\Phi \Gamma), \\ \rho \frac{\partial v_z}{\partial t} &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \eta \Delta v_z - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x}(\Phi \Gamma), \\ \frac{\partial}{\partial x} v_x + \frac{\partial}{\partial z} v_z &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial z^2$ — оператор Лапласа, Γ — статистически среднее значение магнитного момента сил, действующих на единицу объема частицы, т.е. величина момента сил, действующих на частицу, отнесенная к ее объему, Φ — объемная концентрация. Величина $\Phi \Gamma/2$ является антисимметричным напряжением, действующим в жидкости, благодаря моменту сил Γ [6, 7]. Отметим, что уравнение (1) записано в форме, соответствующей малым числам Рейнольдса, построенным на скорости течения среды и толщине щели, что будет обсуждено в конце работы.

Граничные условия к уравнению (1) имеют вид

$$\begin{aligned} v_x = v_z = 0 & \text{ при } z = 0, l, \\ v_x, v_z \rightarrow 0 & \text{ при } x \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Явный вид момента сил Γ в системе (1) определяется магнитными свойствами частиц феррожидкости. Здесь рассмотрим случай одинаковых однодоменных наночастиц с постоянным магнитным моментом $m = MV$ каждая, где M — намагниченность насыщения частицы, V — ее объем. Считаем, что магнитный момент частицы вморожен в

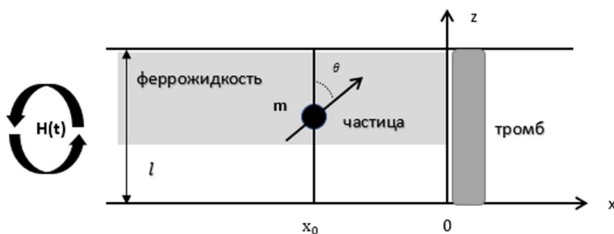


Рис. 1. Иллюстрация рассматриваемой системы. Серым цветом сверху канала отмечен слой феррожидкости

ее тело. Пренебрегая межчастичными взаимодействиями, что оправданно, если объемная концентрация Φ находится в пределах нескольких процентов, имеем [7, 8]

$$\Gamma = \mu_0 H M (\langle e_x \rangle h_z - \langle e_z \rangle h_x). \quad (3)$$

Здесь $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м — магнитная проницаемость вакуума, $\langle e_x \rangle$ и $\langle e_z \rangle$ — статистически средние компоненты единичного вектора \mathbf{e} , направленного вдоль магнитного момента частиц; $h_z = \cos \omega t$, $h_x = \sin \omega t$ — компоненты единичного вектора $\mathbf{h} = \mathbf{H}/H$, где \mathbf{H} — магнитное поле внутри щели с жидкостью.

Обозначим $w(\mathbf{e})$ функцию распределения (плотность вероятности) по ориентациям единичного вектора \mathbf{e} и выберем условие ее нормировки в стандартном виде:

$$\int w \, d\mathbf{e} = 1. \quad (4)$$

Функция w может быть найдена как решение соответствующего уравнения Фоккера — Планка, которое удобно записать в системе координат, вращающейся вместе с полем \mathbf{H} . В этой системе координат поле неподвижно, несущая жидкость вращается с угловой скоростью ω , а стационарное уравнение Фоккера — Планка имеет вид [7]

$$\begin{aligned} \omega e_{x'} e_{z'} \frac{\partial w}{\partial e_{x'}} - D_r \kappa \left[(e_i e_{z'} - h_i) \frac{\partial w}{\partial e_i} + 2w e_{z'} \right] = \\ = D_r \left(\frac{\partial^2}{\partial e_i^2} - 2e_i \frac{\partial}{\partial e_i} - e_i e_j \frac{\partial}{\partial e_i \partial e_j} \right) w, \quad (5) \\ \kappa = \mu_0 \frac{mH}{kT}, \quad D_r = \frac{kT}{6\eta V}. \end{aligned}$$

Здесь $i, j = x', y', z'$ — вращающиеся с полем \mathbf{H} декартовы координаты; ось z' направлена вдоль поля; ось x' находится в плоскости x, z (см. рис. 2), $h_{z'} = 1$, $h_{x'} = h_{y'} = 0$; D_r — коэффициент вращательной диффузии частицы; η — вязкость несущей жидкости; kT — абсолютная температура в энергетических единицах.

Отметим, что в (5) и далее используются обозначения Эйнштейна суммирования по повторяющимся индексам i, j .

В общем случае точное аналитическое решение уравнения (5) неизвестно. К хорошим приближениям приводит математически простой метод эффективного поля, предложенный в работе [9]; его обсуждение можно найти в книгах [7, 10]. Следуя основной идее этого метода, умножим обе части уравнения (5) на компоненты $e'_{z'}$ и $e'_{x'}$ и проинтегрируем результат

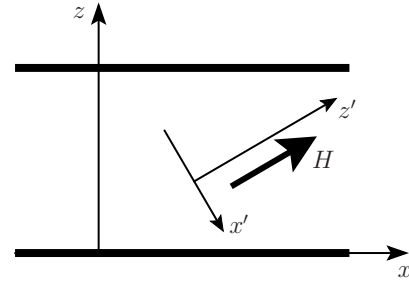


Рис. 2. Иллюстрация вращающейся системы координат x', y', z' . Ось y' не показана

по всем направлениям вектора \mathbf{e} . После вычислений приходим к соотношениям (см. детали в [7])

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \langle e_{z'} \rangle + \omega \langle e_{x'} \rangle + \kappa (1 - \langle e_{z'}^2 \rangle) h_{z'} &= 0, \\ -\frac{1}{2} \langle e_{x'} \rangle - \omega \langle e_{z'} \rangle - \kappa \langle e_{x'} e_{z'} \rangle h_{z'} &= 0, \quad (6) \\ \langle \dots \rangle &= \int \dots w \, d\mathbf{e}. \end{aligned}$$

Для того чтобы определить вторые статистические моменты $\langle e_{z'}^2 \rangle$ и $\langle e_{x'} e_{z'} \rangle$, следуя [11], мы представим неизвестную неравновесную функцию w в виде равновесной функции, но не в истинном поле \mathbf{H} , а в некотором эффективном поле \mathbf{H}_{eff} , компоненты которого предстоит найти:

$$w = \frac{\kappa_{eff}}{\text{sh } \kappa_{eff}} \exp(\kappa_{eff} \cdot \mathbf{e}) \kappa_{eff} = \mu_0 \frac{m \mathbf{H}_{eff}}{kT}. \quad (7)$$

Простые оценки показывают, что для типичных феррожидкостей на водной основе, состоящих из частиц диаметром 10–20 нм, коэффициент вращательной диффузии D_r по порядку величины равен 10^5 – 10^6 с⁻¹. Это намного больше, чем угловая скорость $\omega = 10$ – 20 с⁻¹ поля в типичных экспериментах [9]. Следовательно, можно рассматривать функцию w как почти равновесную в поле \mathbf{H} . Математически это означает, что эффективное поле \mathbf{H}_{eff} должно быть очень близко к истинному полю \mathbf{H} . Поэтому положим $\mathbf{H}_{eff} = \mathbf{H} + \delta \mathbf{H}$ (или $\kappa_{eff} = \kappa + \delta \kappa$) и примем, что выполняется сильное неравенство $\delta H \ll H$, $\delta \kappa \ll \kappa$.

Используя форму (7) в уравнении (6), вычисляя статистические моменты $\langle \dots \rangle$ в линейном приближении по параметру $\delta \kappa$ и отношению w/D_r , мы приходим к линейному алгебраическому уравнению относительно компонент $\delta \kappa$ и, как следствие, к уравнениям относительно статистических моментов $\langle e_{x'} \rangle$, $\langle e_{z'} \rangle$. Опуская подробности, которые могут

быть найдены [7, 10, 11], приведем результат:

$$\langle e_{z'} \rangle = L(\kappa), \quad \langle e_{x'} \rangle = -\frac{\omega}{D_r} \frac{L(\kappa)}{\kappa - L(\kappa)}, \quad (8)$$

$$L(\kappa) = \operatorname{cth} \kappa - \frac{1}{\kappa}.$$

Отметим, что функция $L(x)$ называется функцией Ланжевена. Используя вращающуюся систему координат x', y', z' , можно найти величину момента сил Γ :

$$\Gamma = \mu_0 H M \langle e_{x'} \rangle = -\mu_0 H M \frac{\omega}{D_r} \frac{L(\kappa)}{\kappa - L(\kappa)}. \quad (9)$$

Используя соотношение (9) в уравнениях (1), получаем

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \Delta v_x - \frac{1}{2} \mu_0 H M \frac{\omega}{D_r} \frac{L(\kappa)}{\kappa - L(\kappa)} \frac{\partial}{\partial z} \Phi,$$

$$\rho \frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \eta \Delta v_z + \frac{1}{2} \mu_0 H M \frac{\omega}{D_r} \frac{L(\kappa)}{\kappa - L(\kappa)} \frac{\partial}{\partial x} \Phi, \quad (10)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} v_x + \frac{\partial}{\partial z} v_z = 0.$$

По порядку величины характерное время инерционной релаксации жидкости в щели шириной l может быть оценено как $l^2 \rho / \eta$. Для жидкости со свойствами, близкими к свойствам воды, заполняющей щель с шириной $l \sim 1-2$ мм (что соответствует диаметру кровеносных сосудов, чье тромбирование опасно для здоровья и жизни человека), это время порядка 1 с. Поэтому здесь мы пренебрежем коротким периодом инерционного перехода от состояния покоя жидкости к ее течению, пренебрегая в (10) производной $\partial v_i / \partial t$.

Удобно ввести функцию тока Ψ так, что

$$v_x = \frac{\partial}{\partial z} \Psi, \quad v_z = -\frac{\partial}{\partial x} \Psi. \quad (11)$$

Отметим, что при такой форме записи компонент скорости \mathbf{v} уравнение несжимаемости $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ выполняется автоматически.

Подставляя (11) в уравнения (10), пренебрегая производной $\partial v_i / \partial t$, после простых преобразований приходим к уравнению

$$\Delta^2 \Psi = G(z),$$

$$G(z) = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 H_0 M}{\eta} \frac{\omega}{D_r} \frac{L(\kappa)}{\kappa - L(\kappa)} \frac{d^2}{dz^2} (\Psi(z)), \quad (12)$$

$$\Delta^2 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4}{\partial z^4}.$$

Граничные условия (2), соответствующие непроницаемости границ щели и отсутствию скольжения жидкости на них, могут быть записаны в виде

$$z = 0, l: \quad \Psi = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial z} = 0, \quad (13)$$

$$x \rightarrow 0: \quad \Psi \rightarrow 0.$$

Здесь во втором условии учтен тот факт, что $\partial \Psi / \partial x = 0$ при $z = 0, l$, что означает, что на границах щели функция тока Ψ не зависит от координаты x , т.е. равна постоянной величине. Поскольку конкретное значение этой величины не имеет физического смысла, можно придать ей нулевое значение.

Рассмотрим ситуацию, когда система, дополнительно к вращающемуся пространственно-однородному полю \mathbf{H} , помещена в постоянное неоднородное поле $H_c(z) = Az + B$ с градиентом напряженности $|\nabla H_c(z)|$, направленным вдоль оси z ; A и B — коэффициенты, определяемые установкой, создающей поле H_c . Отметим, что такая экспериментальная ситуация была реализована в [9].

В первом приближении можно считать, что в вертикальном направлении (вдоль оси z) частицы распределены по закону Больцмана:

$$\Phi(z) = \Phi_0 \frac{\exp\left(-\frac{F(z)}{kT}\right)}{\int_0^l \exp\left(-\frac{F(z)}{kT}\right) dz} l, \quad (14)$$

$$F(z) = -kT \ln Z, \quad Z = \int_0^\pi e^{-\frac{\mu_0 m H_c(z) \cos \theta}{kT}} \sin \theta d\theta. \quad (15)$$

Здесь θ — угол между направлением магнитного момента \mathbf{m} частицы и направлением стационарного магнитного поля; $F(z)$ — свободная энергия магнитной частицы в локальном поле $H_c(z)$; Φ_0 — средняя по щели объемная концентрация частиц.

Результаты расчетов распределения частиц поперек оси канала представлены на рис. 3. Концентрация Φ растет с координатой z , что учтено в уравнении (12) и на иллюстрации рис. 1.

Отметим, что выбранная для расчетов концентрация Φ_0 и диаметр частиц $d = 15$ нм вполне типичны для современных магнетитовых феррожидкостей. Стационарное магнитное поле с градиентом $|\nabla H_c| = 10^4$ кА/м² было использовано в экспериментах [12] по магнитной сепарации частиц в феррожидкостях. Следует признать, что величина концентрации $\Phi = 0.25$ на «верхней» границе щели, строго говоря, несколько выходит за границы приближения невзаимодействующих частиц. Тем не ме-

нее, она дает верные оценки по порядку величины. Учет межчастичного взаимодействия в законе распределения частиц по координате z и, особенно, в уравнениях динамики частиц и гидродинамики суспензии, приводит к очень сильному усложнению математической стороны дела и непрозрачной форме окончательных результатов. Поэтому, имея в виду полученные оценки по порядку величины для скорости генерируемых течений, позволяющие судить о принципиальной перспективности рассматриваемого метода генерации течений в каналах, мы ограничимся здесь формулой Больцмана (14), (15) и простейшим приближением динамики невзаимодействующих частиц.

Оценим теперь время установления–разрушения распределения Больцмана (14), (15). Стандартное решение уравнения диффузионно-магнитофоретического переноса частиц вдоль оси z в поле с однородным градиентом $|\nabla H_c|$ приводит к следующей оценке наибольшего времени релаксации τ концентрации Φ к равновесному профилю (14), (15):

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{\tau_D} + \frac{1}{\tau_F},$$

$$\frac{1}{\tau_D} = \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 D, \quad \frac{1}{\tau_F} = \frac{F^2}{4(kT)^2} D.$$

Здесь τ_D — время диффузионной релаксации профиля частиц; τ_F — время форетической релаксации броуновских частиц, на которые действует сила F ; D — коэффициент трансляционной диффузии частиц, который может быть вычислен по классической формуле Эйнштейна.

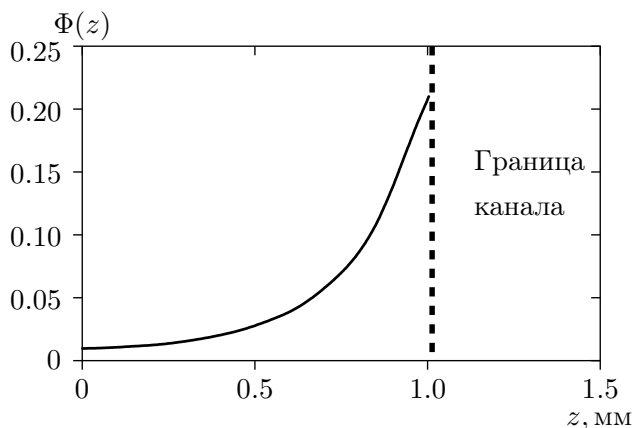


Рис. 3. Зависимость объемной концентрации магнитных частиц феррожидкости от координаты z поперек канала. Параметры системы: средняя концентрация $\Phi_0 = 0.05$, толщина канала $l = 1$ мм, градиент постоянного магнитного поля $|\nabla H_c| = 10^4$ кА/м², намагниченность материала частиц магнетита $M = 500$ кА/м, диаметр частиц $d = 15$ нм

Сила F может быть оценена из стандартной формулы $F \sim \mu_0 m |\nabla H_c(z)|$.

Для магнетитовых частиц с диаметром $d = 15$ нм, находящихся в водной среде при комнатной температуре в канале с шириной $l \sim 1$ мм под действием поля с однородным градиентом $|\nabla H_c| = 10^4$ кА/м², прямые вычисления дают $\tau_D \sim 3 \cdot 10^3$, $\tau_F \sim 2 \cdot 10^4$, т.е. распределение Больцмана после включения поля может быть достигнуто, а после выключения поля разрушено за время от одного до нескольких часов, что вполне приемлемо для проведения экспериментов.

В дальнейшем мы будем предполагать, что амплитуда H_0 вращающегося поля H намного больше стационарного поля H_c в щели, поэтому оно практически не препятствует вращению частиц. При экспериментальной реализации перед включением вращающегося поля H поле H_c может быть выключено. Тогда на временах, меньших τ_D , созданный неоднородный профиль концентрации, по крайней мере в первом приближении, будет сохраняться.

Уравнение (12) содержит четвертые производные от искомой функции тока Ψ по координатам. Точные аналитические решения таких уравнений неизвестны. Численное их решение тоже сталкивается с плохо преодолимыми сложностями; надежные алгоритмы решения таких задач нам не известны. Поэтому здесь воспользуемся идеями метода сращиваемых асимптотических разложений, суть которого состоит в сращивании решений (12), (13), получаемых на различных участках течения.

Прежде всего рассмотрим область канала вдали от тромба, на расстояниях, значительно превышающих ширину l канала. В этой области линейный масштаб изменения скорости течения вдоль продольной оси x намного больше, чем в поперечном направлении вдоль оси z . Поэтому уравнение (12) с граничными условиями (13) можно представить в виде

$$\frac{\partial^4 \Psi}{\partial z^4} = G(z), \tag{16}$$

$$z = 0, l, \quad \Psi = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial z} = 0, \quad x \rightarrow -\infty, \quad \Psi \rightarrow 0.$$

Обозначим решение этой задачи Ψ_0 . Оно имеет вид

$$\Psi_0(z) = J(z) + \frac{1}{6}Az^3 + \frac{1}{2}Bz^2, \tag{17}$$

$$\frac{\partial \Psi_0}{\partial z} = I(z) + \frac{1}{2}Az^2 + Bz,$$

где

$$\begin{aligned}
 J(z) &= \int_0^z \int_0^{z_3} \int_0^{z_2} \int_0^{z_1} G(z') dz' dz_1 dz_2 dz_3, \\
 I(z) &= \frac{\partial J}{\partial z} = \int_0^z \int_0^{z_2} \int_0^{z_1} G(z') dz' dz_1 dz_2, \\
 A &= \frac{12}{l^3} \left[J(l) - \frac{1}{2} I(l)l \right], \quad B = \frac{2}{l^2} [I(l)l - 3J(l)].
 \end{aligned}
 \tag{18}$$

Обсудим теперь поведение функции Ψ в непосредственной близости от тромба, т.е. при $x \rightarrow 0$, для чего разложим функцию Ψ в ряд Тейлора вблизи точки $x = 0$:

$$\Psi = \Psi(0) + \Psi'x + \frac{1}{2}\Psi''x^2 + \dots,
 \tag{19}$$

где штрихи означают производные по x при $x = 0$. Граничное условие (10) $\partial\Psi/\partial z = 0$ при $x = 0$ показывает, что на «тромбе» функция $\Psi(x = 0, z)$ не зависит от координаты z . Поскольку при $z = 0, l$ выполняется граничное условие $\Psi = 0$, это значит, что $\Psi(x = 0, z) = 0$. Условие $\partial\Psi/\partial x = 0$ при $x = 0$ означает, что $\Psi' = 0$. Таким образом, первым исчезающим членом в разложении (19) является член $1/2\Psi''x^2$. Учитывая это, представим функцию Ψ в экстраполяционной форме, удовлетворяющей всем граничным условиям:

$$\Psi(x, z) = \begin{cases} \alpha x^2 \Psi_0(z), & x^2 < \frac{1}{\alpha}, \\ \Psi_0(z), & x^2 > \frac{1}{\alpha}, \end{cases}
 \tag{20}$$

где α — коэффициент, который определяем из условия наилучшего соответствия формы (20) дифференциальному уравнению (12). Это условие формулируем следующим образом. Запишем функцию

$$L(\alpha) = \int_0^\infty \int_0^l \left[\Delta^2 \Psi(x, z) - G(z) \right]^2 dz dx
 \tag{21}$$

и выберем α , обеспечивающее наименьшее значение L . Идеологически такой подход близок к классическому вариационному методу Онсагера определения термодинамических функций жидких кристаллов [13, 14], а также к хорошо известному методу наименьших квадратов.

Перепишем уравнение (21) в виде

$$L(\alpha) = \int_0^{\sqrt{1/\alpha}} \int_0^l \left[\alpha \Delta^2 (x^2 \Psi_0(z)) - G(z) \right]^2 dz dx +$$

$$+ \int_{\sqrt{1/\alpha}}^\infty \int_0^l \left[\Delta^2 \Psi_0(z) - G(z) \right]^2 dz dx.
 \tag{22}$$

В силу того, что $\Psi_0(z)$ является решением уравнения (16), второй интеграл равен здесь нулю. Тогда получаем

$$\begin{aligned}
 L(\alpha) &= \int_0^{\sqrt{1/\alpha}} \int_0^l \left[\alpha \Delta^2 (x^2 \Psi_0(z)) - G(z) \right]^2 dz dx = \\
 &= \int_0^{\sqrt{1/\alpha}} \int_0^l \left[\alpha^2 (\Delta^2 (x^2 \Psi_0(z)))^2 - 2\alpha G(z) \Delta^2 (x^2 \Psi_0(z)) + \right. \\
 &\quad \left. + G(z)^2 \right] dz dx.
 \end{aligned}
 \tag{23}$$

Далее запишем:

$$\begin{aligned}
 \Delta^2 (x^2 \Psi_0(z)) &= 4\Psi_0'' + x^2 \Psi_0^{IV}, \\
 (\Delta^2 (x^2 \Psi_0(z)))^2 &= 16(\Psi_0'')^2 + 8x^2 \Psi_0'' \Psi_0^{IV} + x^4 (\Psi_0^{IV})^2.
 \end{aligned}
 \tag{24}$$

Здесь штрихи означают дифференцирование по z .

Подставляя (24) в (23), после интегрирования по x получаем

$$\begin{aligned}
 L(\alpha) &= \alpha^{3/2} D - \alpha^{1/2} E + \alpha^{-1/2} F, \\
 D &= 16 \int_0^l (\Psi_0'')^2 dz, \quad E = \frac{16}{3} \int_0^l \Psi_0'' G dz, \\
 F &= \frac{8}{15} \int_0^l G^2 dz,
 \end{aligned}
 \tag{25}$$

Из условия

$$\frac{dL}{d\alpha} = \frac{3}{2} \alpha^{1/2} D + \alpha^{-1/2} E - \frac{1}{2} \alpha^{-3/2} F = 0$$

находим формулу для вычисления α :

$$\alpha = \frac{-E + \sqrt{E^2 + 12DF}}{6D}.
 \tag{26}$$

Полезно привести следующие оценки для величин α . Из уравнения (16) получаем

$$\frac{d^4}{dz^4} \Psi_0 \sim \frac{\Psi_0}{l_4} \sim G,$$

следовательно $\Psi_0 \sim Gl^4$. Аналогично получаем

$$\frac{d^2}{dz^2} \Psi_0 \sim Gl^2.$$

Тогда

$$D \sim 16l^4 \int_0^l (G)^2 dz \sim 16l^4 F,$$

$$E \sim 8l^{-2} \int_0^l G^2 dz \sim 8l^{-2} F.$$

Учитывая эти оценки и формулу (26), имеем $\alpha \sim l^{-2}$. Значит, расстояние x_c от тромба, на котором происходит переход (20) ближнего решения в дальнее, по порядку величины $x_c \sim l$.

Отметим, что Ψ — функция тока, следовательно компоненты скорости течения \mathbf{v} не зависят от времени. Это означает, что однородное вращающееся поле в рассматриваемом канале порождает стационарные потоки. Подчеркнем, что для генерирования этих потоков необходимо, чтобы концентрация частиц Φ зависела от пространственных координат.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ

Коэффициент α был вычислен при помощи (25) и (26) с учетом (17) и (18). В соответствии с (20) мы определяли продольную компоненту скорости течения феррожидкости в канале так:

$$v(x) = \frac{\partial \Psi}{\partial z} = \begin{cases} \alpha x^2 \frac{\partial \Psi_0(x, z, t)}{\partial z}, & x^2 < 1/\alpha, \\ \frac{\partial \Psi_0(x, z, t)}{\partial z}, & x^2 > 1/\alpha. \end{cases} \quad (27)$$

Некоторые результаты расчетов скорости v_x , представляющей наибольший интерес с точки зрения транспорта лекарства или другой нейтральной примеси вдоль оси x канала, приведены на рис. 4, 5. Отметим, что ширина канала $l = 2$ мм выбиралась так, чтобы она соответствовала характерному диаметру кровеносного сосуда, тромбирование которого может вызывать опасность для здоровья и жизни человека; как и на рис. 3, средняя концентрация частиц $\Phi_0 = 0.05$; намагниченность материала ферромагнитных сферических частиц $M = 500$ кА/м (магнетит), диаметр частиц $d = 15$ нм.

Можно заметить, что увеличение частоты магнитного поля ведет к росту скорости течения феррожидкости. На рис. 4 видно, что непосредственно рядом с тромбом ($x \sim -0.2$ мм) продольная скорость течения v_x порядка 50 мкм/с. На расстояниях от тромба порядка $x \sim 1$ мм скорость достигает значений 600 мкм/с. На рис. 5 приведены кривые скоростей при различных полях, индуцирующих неоднородность концентрации частиц: чем больше градиент поля, приложенный вдоль канала, тем быстрее циркулирует жидкость в нем. На рис. 6 показана

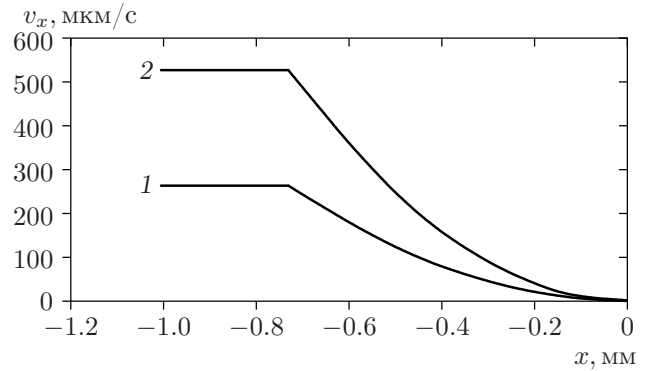


Рис. 4. Продольная компонента скорости v_x в зависимости от координаты x для различных частот ω при фиксированном $z = 2l/7$, толщина канала $l = 2$ мм. Кривая 1: $\omega = 10 \text{ с}^{-1}$; кривая 2: $\omega = 20 \text{ с}^{-1}$. Градиент постоянного магнитного поля $|\nabla H_c(z)| = 10^4 \text{ кА/м}^2$, амплитуда вращающегося поля $H_0 = 100 \text{ кА/М}$

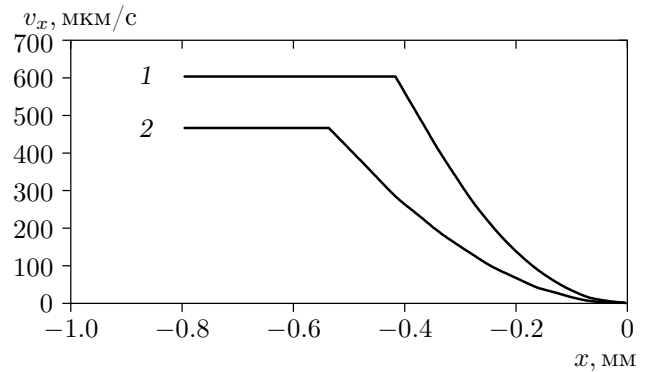


Рис. 5. Продольная компонента скорости v_x в зависимости от координаты x для разных полей $H_c(z)$. Кривая 1: $|\nabla H_c(z)| = 2 \cdot 10^4 \text{ кА/м}^2$; кривая 2: $|\nabla H_c(z)| = 1.5 \cdot 10^4 \text{ кА/м}^2$. Остальные параметры такие же, как на рис. 4

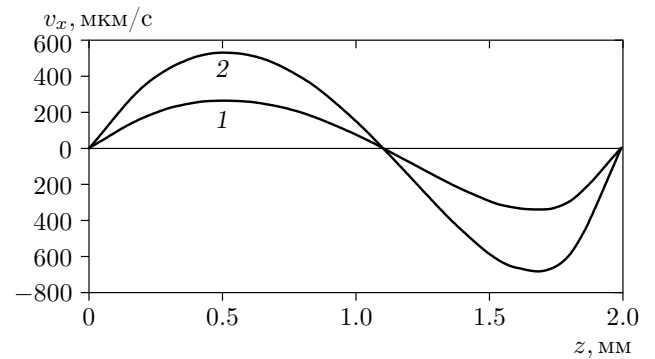


Рис. 6. Продольная компонента скорости v_x в зависимости от координаты z при различных частотах ω и фиксированном $x = -0.36$ мм. Кривая 1: $\omega = 10 \text{ с}^{-1}$; кривая 2: $\omega = 20 \text{ с}^{-1}$. Остальные параметры такие же, как на рис. 4

скорость течения v_x как функция от координаты z , поперечной к оси канала при фиксированной координате x .

Среднеквадратичную скорость \bar{v}_x циркуляционных течений в канале можно оценить как несколько десятков микрон в секунду, что на полтора-два порядка величины больше скорости диффузионного транспорта тромболитиков в неподвижной среде, оцененной в [3], примерно, как 0.8 мкм/с. Это подтверждает эффективность магнитного метода интенсификации транспорта лекарств в тромбированных сосудах. Решение задачи о конвективной диффузии молекулярной примеси (тромболитиков) в канале с магнитоиндуцированными циркуляционными течениями с учетом возникновения тонкого диффузионного пограничного слоя вблизи тромба может являться предметом отдельного исследования.

Обсудим теперь правомерность приближения малых чисел Рейнольдса, которому соответствует уравнение (1). Как видно на рис. 4, 5, скорость течения жидкости по порядку величины не превышает 600 мкм/с. При таких скоростях для канала диаметром около 2 мм (что, как отмечалось, соответствует диаметру кровеносного сосуда, тромбирование которого опасно для здоровья и жизни человека) и несущей жидкости с вязкостью крови (примерно $4-5 \cdot 10^{-3}$ Па·с) число Рейнольдса имеет порядок 0.04. Это обосновывает выбранное линейное приближение (1) течения жидкости.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрена модель генерации циркуляционных течений в канале с немагнитной жидкостью и инжектированной в нее нанодисперсной феррожидкостью под действием однородного вращающегося магнитного поля.

При помощи неоднородного внешнего поля в направлении поперек оси канала создано неоднородное распределения концентрации феррочастиц. Один конец канала предполагался закрытым (тромбированным). Расчеты показывают, что при вполне реалистических параметрах системы частоты и напряженности магнитного поля в канале в слое феррожидкости могут быть генерированы течения с амплитудой продольной скорости порядка 600 мкм/с. Эти потоки могут существенно интенсифицировать транспорт нейтральной молекулярной примеси (лекарства) в несущей жидкости, что подтверждает идею, высказанную в [2, 3], о перспективности метода генерирования магнитоиндуцированных течений в тромбированных кровеносных сосудах для интенсификации в них транспорта тромболитиков.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 21-52-12013) и в рамках Госзадания (проект FEUZ 2023-0020).

ЛИТЕРАТУРА

1. L. Trahms, *Biomedical applications of magnetic nanoparticles*, in *Colloidal magnetic fluids. Basics, Development and application of ferrofluids*, Springer, Berlin (2009).
2. F. M. Creighton, *Magnetic-based systems for treating occluded vessels*, U. S. Patent No. 8.308.628 (2012).
3. M. J. Clements, *A mathematical model for magnetically-assisted delivery of thrombolytics in occluded blood vessels for ischemic stroke treatment*. Doctoral dissertation, Texas University (2016).
4. A. Musickhin, A. Y. Zubarev, M. Raboisson-Michel, G. Verger-Dubois, P. Kuzhir, *Field-induced circulation flow in magnetic fluids*, *Phil. Trans. R. Soc. A.* **378**, 20190250 (2020).
5. А. Ю. Зубарев, А. Ю. Мусихин, *Макроскопические течения, индуцируемые феррожидкостью под действием вращающегося магнитного поля*, *ЖЭТФ* **163**, 602 (2023)
6. R. Rosensweig, *Ferrohydrodynamics*, Cambridge, New York (1985).
7. В. Покровский, *Статистическая механика разбавленных суспензий*, Наука, Москва (1978).
8. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, Наука, Москва (1982).
9. M. Raboisson-Michel, *Micro-vortex magnétique pour le transport convective de molécules: vers une application biomédicale*, University Cote d'Azur (2022).
10. E. Blums, A. Cebers, M. Maiorov, *Magnetic Fluids*, Walter de Gruyter, Berlin (1997).
11. М. А. Марценюк, Ю. Л. Райхер, М. И. Шлиомиш, *К кинетике намагничивания суспензий однодоменных ферромагнитных частиц*, *ЖЭТФ* **65**, 1 (1973).
12. S. Odenbach, S. Thurm, *Magnetoviscous effect in ferrofluids*, *Ferrofluids. Magnetically controllable fluids and their applications*, Springer, Berlin (2002).
13. L. Onsager, *The effects of shape on the interaction of colloidal particles*, *Ann. N. Y. Acad. Sci.* **5**, 4 (1949).
14. P. G. de Gennes, *The Physics of Liquid Crystals*, Clarendon Press, Oxford (1974).