ЖЭТФ, 2024, том 165, вып. 1, стр. 43–50

КАЗИМИРОВО ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ КОСМИЧЕСКИХ СТРУН: МАССИВНОЕ ПОЛЕ

***Ю. В. Грац*[*], *П. А. Спирин*[**]**

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Физический факультет
119991, Москва, Россия

Поступила в редакцию 20 августа 2023 г.,
после переработки 24 сентября 2023 г.
Принята к публикации 25 сентября 2023 г.

В рамках $\operatorname{tr}\ln$-формализма исследуется влияние массы квантованного поля на эффект вакуумного взаимодействия параллельных космических струн. Рассматривается случай массивного скалярного поля с минимальной связью. Показано, что если на расстояниях между струнами, заметно превышающих комптоновскую длину волны $l_c = m^{-1}$, наличие массы приводит к экспоненциальному подавлению эффекта, то на малых по сравнению с l_c , но заметно превышающих толщину струны, расстояниях влияние массы не является существенным и вклад массивного поля в энергию Казимира становится сравнимым с вкладом безмассового.

DOI: 10.31857/S004445102401005X

1. ВВЕДЕНИЕ

Исследование эволюции сети космических струн в процессе ее формирования в ходе фазовых переходов в ранней Вселенной предполагает изучение процессов, происходящих при близких пролетах струн и при их столкновениях. В этих ситуациях учет вакуумного (казимировского) взаимодействия струн может оказаться существенным [1, 2].

Впервые оценка этого эффекта для случая параллельных бесконечно тонких струн была получена в [3]. Впоследствии допущенная там неточность была исправлена разными методами в работах [4–6]. Во всех перечисленных работах авторы ограничивались случаем безмассового поля.

Ниже рассматривается казимировское взаимодействие струн в относительно простой, но допускающей аналитическое решение, постановке. Как и в перечисленных выше работах, мы ограничимся рассмотрением статической системы параллельных бесконечно тонких струн и действительного скалярного поля, но не будем ограничиваться случаем равной нулю массы поля.

Мотивация для такой постановки задачи следующая. Прежде всего заметим, что отнесенная к единице длины энергия вакуумного взаимодействия струн имеет размерность квадрата обратной длины и из размерных величин может зависеть только от расстояния между струнами d, радиуса струн a и комптоновской длины рассматриваемого квантованного поля $l_c = m^{-1}$. Все перечисленные величины являются размерно зависимыми. Но комптоновская длина для самой тяжелой из известных на настоящее время частиц (t-кварка) $l_c \sim 10^{-15}$ см, а толщина GUT-струн $a \sim 10^{-28}$ см, что на много порядков меньше. При этом расстояние между струнами $d > 2a$. В этой ситуации, если ограничиться расстояниями d, много большими толщины струн, то струны можно рассматривать как бесконечно тонкие. Тогда отнесенная к единице длины струн энергия взаимодействия двух параллельных оси z струн может зависеть только от d и комптоновской длины рассматриваемого поля и, следовательно, всегда может быть представлена в виде

$$\frac{\mathcal{E}_{cas}}{Z} = -\frac{4}{15\pi}\,\frac{\mu_1\mu_2}{d^2}\,\mathcal{F}(md)\,, \qquad Z = \int dz\,, \qquad (1)$$

где $\mu_{1,2}$ — масса струны на единицу длины, $\mathcal{F}$ — некоторая функция со значениями в числах. Стоящий перед $\mathcal{F}$ коэффициент определяется сообра-

[*] E-mail: grats@phys.msu.ru
[**] E-mail: pspirin@physics.uoc.gr

жениями размерности и для удобства в дальнейшем выбран таким образом, чтобы он совпадал с энергией казимировского взаимодействия бесконечно тонких струн в случае скалярного поля с минимальной связью при равной нулю массе поля.

Рассмотрим поведение функции $\mathcal{F}(z)$ при стремлении $z = md$ к нулю. Этот предел может рассматриваться как переход к случаю безмассового поля при конечных значениях d и, следовательно, при нашем выборе коэффициента в (1) в этом пределе $\mathcal{F} = 1$. С другой стороны, с равными основаниями этот предел может рассматриваться и как предельный переход $d \to 0$ при конечных значениях массы. Таким образом, масштабом, на котором влияние массы будет существенным, является комптоновская длина, и на расстояниях между струнами, меньших или порядка комптоновской длины (но больших поперечного размера струн), влияние массы не будет существенным и парциальный вклад массивных мод в энергию вакуумного взаимодействия струн будет сравним с вкладом безмассового поля.

В работе используется система единиц $G = \hbar = c = 1$ и метрика пространства-времени с сигнатурой $(+\,,-\,,-\,,-\,)$.

2. МЕТРИКА ФОНОВОГО ПРОСТРАНСТВА

Рассмотрим четырехмерное пространство-время, которое представляет собой прямое произведение двумерного пространства Минковского на двумерную риманову поверхность. Как известно, в этом случае соответствующим выбором координат метрику рассматриваемого пространства-времени всегда можно привести к виду

$$ds^2 = dt^2 - dz^2 - e^{-\sigma(\mathbf{x})}\left(dx_1^2 + dx_2^2\right), \qquad (2)$$

где $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$.

Пусть

$$\sigma(\mathbf{x}) = \sum_a \sigma_a(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_a|), \qquad (3)$$

$$|\mathbf{x} - \mathbf{x}_a| = \left[(x_1 - x_{a1})^2 + (x_2 - x_{a2})^2\right]^{1/2},$$

где $\mathbf{x}_a$ — набор фиксированных точек. В этом случае скалярная кривизна имеет вид

$$R = \sum_a R_a = \sum_a e^{\sigma}\Delta_E\sigma_a\,, \qquad (4)$$

где Δ_E — двумерный евклидов лапласиан. И если носители парциальных вкладов $\Delta_E\sigma_a$ компактны и не перекрываются, то мы получаем ультрастатическое пространство-время, кривизна которого в плоскости (x_1x_2) отлична от нуля только в наборе неперекрывающихся компактных окрестностей точек $\mathbf{x}_a$.

Выберем функции σ_a в виде

$$\sigma_a = 2(1-\beta_a)\,\ln|\mathbf{x} - \mathbf{x}_a|\,, \qquad (5)$$

где $0 < \beta_a < 1$ для всех a. Как было показано в работе [7], полученная таким образом метрика является решением уравнения Эйнштейна, в правой части которого стоит тензор энергии-импульса вида

$$T_{\mu\nu}(t,z,\mathbf{x}) = \\ = e^{\sigma(\mathbf{x})}\sum_a \mu_a\,\delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{x}_a)\,\mathrm{diag}(1,1,0,0), \qquad (6)$$

$$\mu_a = \frac{1-\beta_a}{4}\,,$$

и соответствующее решение отвечает пространству-времени системы параллельных бесконечно тонких космических струн. При этом двумерная поверхность (x_1x_2) представляет собой локально плоскую гиперповерхность с набором конических особенностей, локализованных в точках $\mathbf{x}_a$, а параметр μ_a имеет смысл линейной плотности энергии a-й струны и определяет связанный с a-й конической особенностью дефицит угла

$$\delta\varphi_a = 8\pi\,\mu_a = 2\pi(1-\beta_a)\,.$$

В случае одной бесконечно тонкой струны особенностями пространства-времени являются отсутствие в метрике каких-либо размерных параметров и высокая степень симметрии. Первое позволяет утверждать, что в случае безмассового поля вакуумное среднее оператора тензора энергии-импульса может зависеть только от расстояния до особенности и в четырех пространственно-временных измерениях

$$\langle T_{\mu\nu}\rangle_{vac}^{ren} \sim r^{-4}.$$

Второе позволяет разделить переменные в полевом уравнении, построить аналитическое выражение для соответствующей функции Грина и вычислить перенормированное вакуумное среднее оператора тензора энергии-импульса [8–12]. В случае двух и более струн и массивных полей последнее не представляется возможным и заставляет использовать методы теории возмущений [4–6]. При этом возможность работать в рамках теории возмущений обеспечивается малостью параметров $(1-\beta)$. Предполагается, что для космических струн, рассматриваемых в рамках Теории великого объединения, величина параметров $(1-\beta)$ имеет порядок 10^{-6}.

3. ВАКУУМНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ

Случай массивного действительнозначного скалярного поля ϕ соответствует выбору действия в виде

$$S_\phi = -\frac{1}{2}\int d^4x\,\phi(x)\,L(x,\partial)\,\phi(x)\ ,$$

где оператор поля

$$L(x,\partial) = \sqrt{-g}\,(\Box + m^2),$$

$$\Box = \nabla_\mu\nabla^\mu$$

— оператор Лапласа – Бельтрами.

Мы ограничились случаем скалярного поля с минимальной связью. Это обусловлено тем, что в рассматриваемом ниже случае метрики (2) с конформным фактором (5) неминимальная связь приводит к появлению в уравнении поля потенциала с δ-образными особенностями. Появление таких особенностей у потенциала требует отдельного рассмотрения, и результаты вычислений могут различаться в зависимости от того, как такие особенности интерпретируются [13, 14].

Представим оператор $L(x,\partial)$ в виде

$$L(x,\partial) = (\partial^2 + m^2) + \delta L(x,\partial)\,, \tag{7}$$

$$\partial^2 = \partial_t^2 - \partial_1^2 - \partial_2^2 - \partial_z^2\,.$$

Здесь и далее скалярные произведения 4-векторов понимаются в смысле метрики пространства Минковского. При этом соответствующий метрике (2) оператор $\delta L(x,\partial)$ имеет вид

$$\delta L(x,\partial) = \Lambda(\mathbf{x})\left(\partial_t^2 - \partial_z^2 + m^2\right) \tag{8}$$

$$\Lambda(\mathbf{x}) = e^{-\sigma(\mathbf{x})} - 1\,.$$

Величиной, которая часто используется при исследовании вакуумной энергии, является эффективное действие. В подходе Швингера – де Витта оно может быть представлено в виде

$$W_{eff} = \frac{i}{2}\,\mathrm{tr}\,\ln L = \frac{i}{2}\,\ln\det L\,,$$

где под L понимается оператор в абстрактном гильбертовом пространстве, где базисные векторы $|x\rangle$ являются собственными векторами коммутирующего набора эрмитовых операторов $\hat{x}^\mu$ с условиями нормировки

$$\langle x|x'\rangle = \delta^{(4)}(x - x')$$

и полноты

$$\sum_x |x\rangle\langle x| = \mathbf{1}.$$

При этом след оператора определен как

$$\mathrm{tr}\,Q = \int d^4x\langle x|Q|x\rangle,$$

и в координатном представлении матричный элемент имеет вид

$$\langle x|L|x'\rangle = L(x,\partial_x)\,\delta^{(4)}(x - x'),$$

см. [15–17].

Определенный таким образом след при вычислении позволяет перейти к другому ортонормированному базису, в качестве которого мы выберем базис Фурье.

Далее, известно, что случае, когда внешние факторы (метрика, границы, внешние поля и т. д.) не зависят явно от времени, эффективное действие W_{eff} пропорционально полной вакуумной энергии $\mathcal{E}_{vac}$, а именно:

$$W_{eff} = -T\mathcal{E}_{vac}\,,$$

где T — полное время [18] (см. также [19]) и, следовательно, в рамках tr ln-формализма

$$\mathcal{E}_{vac} = -\frac{i}{2T}\,\ln\det L\,. \tag{9}$$

Если входящий в (7) оператор δL может рассматриваться как малое возмущение, то мы имеем

$$\begin{aligned}\ln\det L &= \ln\det\left(\partial^2 + m^2 + \delta L\right) = \\ &= \ln\det\left(\partial^2 + m^2\right) + \ln\det\left[1 + (\partial^2 + m^2)^{-1}\,\delta L\right] = \\ &= \mathrm{tr}\ln\left(\partial^2 + m^2\right) + \mathrm{tr}\ln\left[1 + (\partial^2 + m^2)^{-1}\,\delta L\right] = \\ &= \mathrm{tr}\ln(\partial^2 + m^2) + \mathrm{tr}\left[(\partial^2 + m^2)^{-1}\,\delta L\right] - \\ &- \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left[(\partial^2 + m^2)^{-1}\delta L\,(\partial^2 + m^2)^{-1}\delta L\right] + \ldots\end{aligned} \tag{10}$$

Однако полученное формальное выражение является хорошо определенным, только если входящие в него операторы являются операторами со следом [20]. В нашем случае это не так, и при вычислении следов потребуется регуляризация, в качестве которой мы выберем размерную регуляризацию.

В базисе Фурье имеющиеся в (10) следы сводятся к стандартным для квантовой теории поля выражениям. В частности, не представляющие интереса первые два члена в рамках метода размерной регуляризации сводятся к выражению

$$\begin{aligned}&\mathrm{tr}\ln(\partial^2 + m^2) + \mathrm{tr}\left((\partial^2 + m^2)^{-1}\,\delta L\right) = \\ &= -iTZ\,m^D\frac{\Gamma[-D/2]}{(4\pi)^{D/2}}\int\left(\Lambda(\mathbf{x}) + 1\right)d^2x = \\ &= -iTZ\,m^D\frac{\Gamma[-D/2]}{(4\pi)^{D/2}}\int\sqrt{-g(\mathbf{x})}\,d^2x\,,\end{aligned} \tag{11}$$

$$D = 4 - 2\varepsilon\,.$$

Соответствующий вклад в эффективное действие совпадает с первым членом разложения Швингера – де Витта и отбрасывается при перенормировке [17].

Таким образом, для выделения казимировского вклада в полную вакуумную энергию в первом неисчезающем порядке теории возмущений мы должны ограничиться третьим членом разложения (10):

$$\mathcal{E}_{vac} = \frac{i}{4T}\,\mathrm{tr}\Big((\partial^2+m^2)^{-1}\,\delta L\;(\partial^2+m^2)^{-1}\,\delta L\Big). \quad (12)$$

В базисе Фурье это выражение приобретает вид

$$\mathcal{E}_{vac}=\frac{i}{4T}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{\delta L\,(k,i(p+k))\,\delta L\,(-k,ip)}{[p^2-m^2][(p+k)^2-m^2]}\;, \quad (13)$$

где

$$\delta L(k,ip)=\int d^4x\,e^{ikx}\Big[\delta L(x,\partial)\big|_{\partial\to -ip}\Big]. \quad (14)$$

В нашем случае из (8) получим

$$\delta L(k,ip) = -\Lambda(k)\left(p_0^2-p_z^2-m^2\right) \quad (15)$$

и, таким образом, вакуумная энергия определяется выражением

$$\mathcal{E}_{vac} = \frac{i}{4T}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{(p_0^2-p_z^2-m^2)^2}{[p^2-m^2][(p+k)^2-m^2]}\times \\ \times\Lambda(k)\Lambda(-k). \quad (16)$$

При получении выражения (16) было учтено, что

$$\Lambda(k) = 4\pi^2\delta(k^0)\delta(k^z)\Lambda(\mathbf{k})\,, \quad (17)$$

где $\Lambda(\mathbf{k})$ — двумерный фурье-образ функции $\Lambda(\mathbf{x})$, $\mathbf{k}=(k^1,k^2)$. Следовательно, $k^0=k^z=0$.

Интеграл по d^4p в выражении (16) расходится, но имеет стандартный для метода размерной регуляризации вид.

Поворот Вика

$$p^0 = i\,p_E^0\,,\qquad d^4p = i\,d^4p_E\,,\qquad p^2=-p_E^2$$

и дальнейшая замена d^4p на $\tilde{\mu}^{4-D}d^Dp_E$, $D=4-2\varepsilon$, приводят выражение (16) к виду

$$\mathcal{E}_{vac}^{reg} = -\frac{\tilde{\mu}^{4-D}}{4T}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\Lambda(k)\,\Lambda(-k)\times \\ \times\int\frac{d^Dp_E}{(2\pi)^D}\,\frac{\left(p_0^2+p_z^2+m^2\right)_E^2}{(p^2+m^2)_E[(p+k)_E^2+m^2]}\,, \quad (18)$$

где $\tilde{\mu}$ — произвольный масштаб с размерностью массы, который вводится для сохранения размерности регуляризованного выражения (18).

Внутренний интеграл по d^Dp_E имеет типичный для квантовой теории поля вид и вычисляется с использованием фейнмановской параметризации (см., например, [21]). При последующем интегрировании по d^4k мы столкнемся с тем, что подынтегральное выражение содержит квадрат $\Lambda(k)$ (11), т. е. квадраты $\delta(k^0)$ и $\delta(k^z)$. С ними мы поступаем стандартным способом:

$$\big[\delta(k^0)\big]^2 = \delta(k^0)\,\delta(0) = \\ = \frac{\delta(k^0)}{2\pi}\int e^{ik^0t}\,dt\Big|_{k^0=0} = \frac{T}{2\pi}\,\delta(k^0)\,.$$

Аналогично для интегрирования k^z:

$$\big[\delta(k^z)\big]^2 = \frac{Z}{2\pi}\,\delta(k^z)\,.$$

В результате для регуляризованной энергии вакуума мы получаем

$$\mathcal{E}_{vac}^{reg} = -\frac{Z}{4(4\pi)^{D/2}}\int\frac{d^2k}{(2\pi)^2}\,\Lambda(\mathbf{k})\,\Lambda(-\mathbf{k})\times \\ \times\int_0^1 d\alpha\Big[2\Gamma(-2+\varepsilon)\Delta^2+2m^2\Gamma(-1+\varepsilon)\Delta+m^4\Gamma(\varepsilon)\Big]\times \\ \times\left(\frac{\Delta}{\tilde{\mu}^2}\right)^{-\varepsilon}, \quad (19)$$

где

$$\Delta = \alpha(1-\alpha)\mathbf{k}^2+m^2\,.$$

Тогда, разлагая $\left(\Delta/\tilde{\mu}^2\right)^{-\varepsilon}$ по малому ε,

$$\left(\frac{\Delta}{\tilde{\mu}^2}\right)^{-\varepsilon} = 1-\varepsilon\ln\frac{\Delta}{\tilde{\mu}^2}+\mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (20)$$

и отбрасывая расходящиеся при снятии регуляризации члены, мы получаем

$$\mathcal{E}_{vac}^{\mathrm{ren}} = \frac{Z}{4(4\pi)^2}\int\frac{d^2k}{(2\pi)^2}\Lambda(\mathbf{k})\Lambda(-\mathbf{k})\times \\ \times\int_0^1 d\alpha(\Delta-m^2)^2\ln\frac{\Delta}{\tilde{\mu}^2} = \\ = \frac{Z}{4(4\pi)^2}\int\frac{d^2k}{(2\pi)^2}\Lambda(\mathbf{k})\Lambda(-\mathbf{k})|\mathbf{k}|^4\times \\ \times\int_0^1 d\alpha\alpha^2(1-\alpha)^2\ln\frac{\Delta}{\tilde{\mu}^2}. \quad (21)$$

Предполагая, что показатель экспоненты σ в (8) мал и справедлива замена

$$\Lambda(\mathbf{x}) \longrightarrow -\sum_a\sigma_a(\mathbf{x})\,,$$

приходим к выражению

$$\mathcal{E}_{vac}^{ren} = \frac{Z}{4(4\pi)^2} \sum_{a,b} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2}\, \sigma_a(\mathbf{k})\, \sigma_b(-\mathbf{k})\, |\mathbf{k}|^4 \times \\ \times \int\limits_0^1 d\alpha\, \alpha^2 (1-\alpha)^2 \ln \frac{\Delta}{\tilde{\mu}^2}\,, \quad (22)$$

где при выборе σ_a в виде (5) фурье-образ парциального конформного фактора равен

$$\sigma_a(\mathbf{k}) = -\frac{16\pi\mu_a}{\mathbf{k}^2}\, e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}_a}\,. \quad (23)$$

Мы видим, что казимировскому (зависящему от относительных расстояний между струнами) вкладу в (22) отвечают члены суммы с $a \neq b$, и при сделанном предположении казимировское взаимодействие между струнами приближенно можно рассматривать как парное. Поэтому достаточно ограничиться двумя параллельными струнами, находящимися на расстоянии d друг от друга. При этом интегрирование по α с учетом (19) приводит выражение для казимировской энергии к виду

$$\mathcal{E}_{cas} = \frac{8Z\mu_1\mu_2}{15} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2}\, e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{d}} \times \\ \times \left[\ln\frac{m}{\tilde{\mu}} + A(x)\Big(1 - \frac{2}{x^2} + \frac{6}{x^4}\Big) - \Big(\frac{47}{60} - \frac{3}{2x^2} + \frac{6}{x^4}\Big)\right], \quad (24)$$

где

$$x = \frac{|\mathbf{k}|}{m}\,, \quad A(x) = \sqrt{1 + (2/x)^2}\ \mathrm{Arsh}\,\frac{x}{2}\,.$$

Таким образом, дальнейшее преобразование выражения (24) сводится к вычислению двумерного интеграла Фурье от достаточно громоздкого выражения. Понимаемые в смысле обобщенных функций фурье-образы членов подынтегрального выражения, которые не содержат функции $A(x)$, известны [22]:

$$\int d^2k\, \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{d}}}{|\mathbf{k}|^{2\lambda}} = \frac{(-1)^\lambda \pi}{2^{2\lambda-3}\,\Gamma^2(\lambda)}\, |\mathbf{d}|^{2(\lambda-1)} \ln |\mathbf{d}|\,, \qquad \lambda \in \mathbb{N}\,. \quad (25)$$

При $\lambda = 0$ результат пропорционален $\delta^2(\mathbf{d})$ и, следовательно, равен нулю.

Оставшиеся интегралы имеют вид

$$c_n = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2}\, \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{d}}}{|\mathbf{k}|^{2n}}\, A\big(|\mathbf{k}|/m\big)\,, \quad n = 0, 1, 2\,. \quad (26)$$

Поскольку эти интегралы представляют собой фурье-образы цилиндрически-симметричных функций переменной $k = |\mathbf{k}|$, то результат преобразования будет цилиндрически-симметричной функцией переменной $d = |\mathbf{d}|$. Это позволяет выполнить интегрирование по полярному углу φ в плоскости (k_1, k_2) с помощью интеграла [23]

$$\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\, e^{iqr\cos\varphi} = 2\pi J_0(qr)\,. \quad (27)$$

Но остающиеся одномерные интегралы по dk

$$c_n = \int \frac{dk}{2\pi} J_0(kd) k^{1-2n}\, A\big(k/m\big), \quad n = 0, 1, 2, \quad (28)$$

если понимать их как интегралы Римана, расходятся либо на верхнем (c_0), либо на нижнем (c_1, c_2) пределах.

Предлагаемый нами метод заключается в том, чтобы представить их в виде суммы сходящихся римановых интегралов и известных фурье-образов, определенных в терминах обобщенных функций.

Для выяснения характера расходимости интегралов (28) нам нужно знать поведение $A(x)$ при малых и больших значениях аргумента.

При малых значениях аргумента

$$A(x) = 1 + \frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{120}x^4 + \frac{1}{840}x^6 + \mathcal{O}(x^8), \quad (29)$$

а асимптотическое разложение ($x \gg 1$) дается выражением

$$A(x) = \ln x + \frac{2\ln x + 1}{x^2} - \frac{2\ln x - 1/2}{x^4} + \\ + \mathcal{O}\Big(\frac{\ln x}{x^6}\Big). \quad (30)$$

Тогда для регуляризации каждого из интегралов c_n, в зависимости от характера неинтегрируемой особенности, вычтем из подынтегрального выражения и добавим нужное число соответствующих членов разложений (контрчлены), следя за тем, чтобы вычитаемые контрчлены позволили убрать расходимость на том пределе, где она имеется, но при этом не возникало новой расходимости на другом пределе интегрирования, и чтобы интеграл от разности сходился в смысле Римана. Понятно, что это имеет смысл, только если известны определенные в смысле обобщенных функций фурье-образы контрчленов.

В этом случае вычитаемые контрчлены будут регуляризовывать неинтегрируемую особенность подынтегрального выражения, и мы получим хорошо определенное как риманов интеграл интегральное выражение, к которому прибавляются известные, определенные в смысле обобщенных функций фурье-образы отдельно взятых контрчленов.

Особенность предложенной процедуры заключается в том, что вычитаемые контрчлены будут определяться сходимостью одномерного интеграла (28), а проводить соответствующее тождественное преобразование вычитания–добавления мы будем в двумерном фурье-интеграле (26).

Применяя описанную процедуру, мы получим следующее выражение для казимировской энергии:

$$\mathcal{E}_{cas} = \frac{4Z\mu_1\mu_2}{15\pi}\int\limits_0^\infty dk\, kJ_0(kd)\times \times \left[A\Big(\frac{k}{m}\Big)\Big(1-2\frac{m^2}{k^2}+6\frac{m^4}{k^4}\Big) - \ln\frac{k}{m} + \frac{3}{2}\frac{m^2}{k^2} - 6\frac{m^4}{k^4}\right] - - \frac{4Z\mu_1\mu_2}{15d^2}. \quad (31)$$

Обратим внимание на то, что внеинтегральный член в (26) совпадает с известным результатом для безмассового скалярного поля. Таким образом, интересующая нас зависимость эффекта Казимира от массы целиком определяется стоящим в (26) интегральным членом, и для формально введенной в (1) функции $\mathcal{F} = \mathcal{E}_{vac}(m)/\mathcal{E}_{vac}(0)$ мы получаем явное выражение

$$\mathcal{F} = -d^2\int\limits_0^\infty dkkJ_0(kd)\times \times \left[A\Big(1-2\frac{m^2}{k^2}+6\frac{m^4}{k^4}\Big) - \ln\frac{k}{m} + \frac{3}{2}\frac{m^2}{k^2} - 6\frac{m^4}{k^4}\right] + 1, \quad (32)$$

где интеграл уже сходится по Риману.

После замены переменной $s = k/2m$ интеграл разбивается на три:

$$\mathcal{F}(z) = 1 - z^2\Big[h_0(z) - \frac{1}{2}\,h_1(z) + \frac{3}{8}\,h_2(z)\Big], \quad z = 2md,$$

где $h_n(z)$ определены как

$$h_0(z) = \int\limits_0^\infty ds\, J_0(sz)\Big[\sqrt{1+s^2}\,\mathrm{Arsh}\, s - s\ln 2s\Big],$$

$$h_1(z) = \int\limits_0^\infty ds\, \frac{J_0(sz)}{s^2}\Big[\sqrt{1+s^2}\,\mathrm{Arsh}\, s - s\Big], \quad (33)$$

$$h_2(z) = \int\limits_0^\infty ds\, \frac{J_0(sz)}{s^4}\Big[\sqrt{1+s^2}\,\mathrm{Arsh}\, s - s - \frac{s^3}{3}\Big].$$

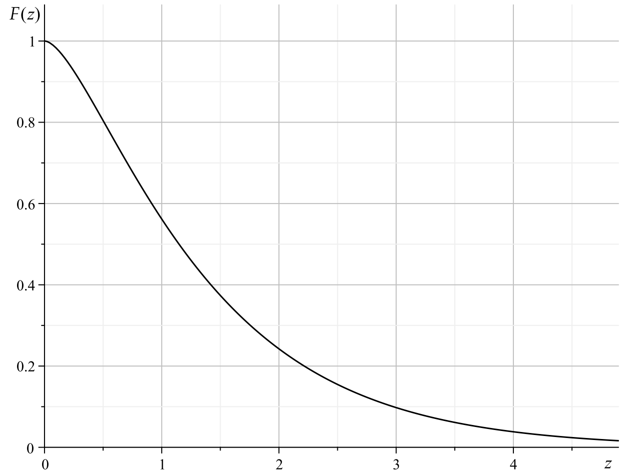

Рис. 1. График $\mathcal{F}(z)$

Они представляют собой интегралы, к которым сводятся регуляризованные двумерные интегралы Фурье c_n. Эти интегралы могут быть вычислены в явном виде:

$$h_0(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{4}\Big[K_0^2\Big(\frac{z}{2}\Big) - K_1^2\Big(\frac{z}{2}\Big)\Big],$$

$$h_1(z) = \frac{z}{2}U(z), \quad (34)$$

$$h_2(z) = -\frac{z^2}{9}\Big[K_0^2\Big(\frac{z}{2}\Big) - K_1^2\Big(\frac{z}{2}\Big)\Big] - -\frac{z^3}{18}\,U(z) - \frac{z}{6}K_0\Big(\frac{z}{2}\Big)\,K_1\Big(\frac{z}{2}\Big),$$

где $K_n(\cdot)$ — функции Макдональда, $U(\cdot)$ — специальная интегральная функция Макдональда следующего вида:

$$U(z) = \int\limits_z^\infty \frac{dx}{x^2}\,K_0^2\Big(\frac{x}{2}\Big), \quad (35)$$

которая также может быть записана через G-функцию Мейера [24]:

$$U(z) = \frac{\sqrt{\pi}}{8}\,G^{3,0}_{1,3}\left(\begin{matrix} 1 \\ -1/2, -1/2, -1/2 \end{matrix}\,\Bigg|\,\frac{z^2}{4}\right). \quad (36)$$

В результате для функции $\mathcal{F}(z)$ окончательно получаем

$$\mathcal{F}(z) = \frac{z^2}{4}\Big[\Big(\frac{z^2}{6}-1\Big)\Big[K_0^2\Big(\frac{z}{2}\Big) - K_1^2\Big(\frac{z}{2}\Big)\Big] + + \Big(\frac{z^2}{12}+1\Big)zU(z) + \frac{z}{4}\,K_0\Big(\frac{z}{2}\Big)K_1\Big(\frac{z}{2}\Big)\Big]. \quad (37)$$

График $\mathcal{F}(z)$ представлен на рис. 1.

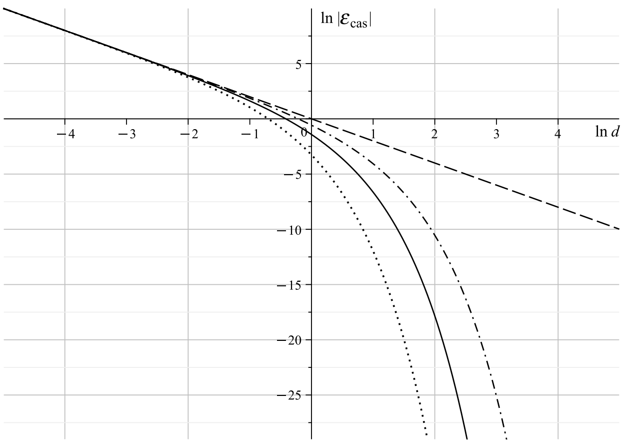

Рис. 2. Энергия казимировского притяжения двух струн как функция расстояния (в единицах $l_c^{(m=1)} = 1$) в двойном логарифмическом масштабировании: для массивных полей с $m = 0.5$ (штрихпунктирная кривая), $m = 1$ (сплошная), $m = 2$ (пунктирная) и для безмассового поля (штриховая, с тангенсом угла наклона к горизонтали -2)

Из полученного выражения следует, что при $z \gg 1$

$$\mathcal{F}(z) = \frac{\pi}{16}\, e^{-z}\Big(15 - \frac{75}{2z} + \frac{25031}{128z^2} + \mathcal{O}(z^{-3})\Big)\,.$$

Таким образом, на больших по сравнению с комптоновской длиной массивного поля расстояниях эффект подавлен экспоненциально.

В противоположном предельном случае при $z \ll 1$

$$\mathcal{F}(z) = 1 + \frac{5}{8}\, z^2\Big(\ln\frac{z}{4} + \gamma + \frac{1}{3}\Big) + \mathcal{O}(z^4|\ln z|)\,,$$

где γ — постоянная Эйлера–Маскерони, и мы видим, что при $d \ll l_c$ вклад массивных мод в казимировскую энергию, как это и следовало из качественных соображений, сравним с вкладом безмассового поля.

График зависимости энергии Казимира

$$\mathcal{E}_{cas} = -\frac{4Z\mu_1\mu_2}{15d^2}\,\mathcal{F}(2md) \tag{38}$$

от расстояния между взаимодействующими струнами в двойном логарифмическом масштабе представлен на рис. 2. Штриховая линия соответствует безмассовому пределу.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках tr ln-формализма рассмотрено вакуумное взаимодействие космических струн в приближении, когда их поперечным размером можно пренебречь, но масса квантованного поля не предполагается равной нулю. Основным результатом можно считать то, что на расстояниях, меньших комптоновской длины, но заметно превышающих радиус струн, парциальный вклад массивных полей в энергию казимировского взаимодействия струн сравним с вкладом безмассового поля. Таким образом, на малых, в указанном смысле, расстояниях массой в первом приближении можно пренебречь. Однако если это расстояние уже нельзя считать большим по сравнению с поперечным размером струн, то пренебрегать радиусом струн уже нельзя. В этом случае у нас снова имеется два параметра с одинаковой размерностью, но только теперь это радиус струн a и расстояние между ними d. В результате оценочная формула (1) заменяется на

$$\frac{\mathcal{E}_{cas}}{Z} = -\frac{4}{15\pi}\,\frac{\mu_1\mu_2}{d^2}\,\Phi\Big(\frac{a}{d}\Big)\,. \tag{39}$$

Отсюда следует, что масштабом, на котором сказывается поперечный размер струн, является их радиус. Как и в рассмотренном во Введении случае, при $\tilde{z} = a/d \to 0$ функция $\Phi(\tilde{z})$ должна стремиться к единице. Действительно, если этот предел понимать как предельный переход $d \to \infty$, то достаточно очевидно, что на таких расстояниях струны должны взаимодействовать как бесконечно тонкие. Следовательно, результат должен совпадать с энергией взаимодействия двух бесконечно тонких струн, т.е. с коэффициентом при Φ. Точно так же должен выглядеть ответ и при стремлении к нулю a, но в случае толстых струн $d \geqslant 2a$. Поэтому заметное отличие Φ от единицы и, следовательно, заметная зависимость энергии Казимира от поперечного размера струн будет иметь место, если расстояние между струнами не намного превышает $2a$. В работе [25] мы показали, что это действительно так. Более того, на этих расстояниях энергия вакуумного взаимодействия толстых струн может даже заметно превосходить аналогичную величину для бесконечно тонких струн с той же массой на единицу длины.

Полученные результаты могут оказаться полезными при исследовании взаимодействия струн при близком пролете, их столкновении и происходящем при этом их перепутывании и перезамыкании.

Финансирование. Исследование выполнено в рамках научной программы Национального центра физики и математики, направление № 5 «Физика частиц и космология».

ЛИТЕРАТУРА

1. *The Formation and Evolution of Cosmic Strings*, ed. by G. W. Gibbons, S. W. Hawking, and T. Vachaspati, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1990).
2. A. Vilenkin and E. P. S. Shellard, *Cosmic Strings and Other Topological Defects*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1994).
3. M. Bordag, Ann. Phys. (Berlin) **47**, 93 (1990).
4. Д. В. Гальцов, Ю. В. Грац, А. Б. Лаврентьев, ЯФ **58** 570 (1995) [D. V. Gal'tsov, Yu.V. Grats, and A. B.Lavrent'ev, Phys. Atom. Nucl. **58**, 516 (1995)].
5. J. M. Muñoz-Castañeda and M. Bordag, Phys. Rev. D **89**, 065034 (2014).
6. Yu.V. Grats, Theor. Math. Phys. **186**, 205 (2016).
7. P. C. Letelier, Class. Quant. Grav. **4**, L75 (1987).
8. T. M. Helliwell and D. A. Konkowski, Phys. Rev. D **34**, 1918 (1986).
9. V. P. Frolov and E. M. Serebriany, Phys. Rev. D **35**, 3779 (1987).
10. B. Linet, Phys. Rev. D **35**, 536 (1987).
11. J. S. Dowker, Phys. Rev. D **36**, 3095 (1987).
12. J. S. Dowker, Phys. Rev. D **36**, 3742 (1987).
13. Y. V. Grats and P. Spirin, Eur. Phys. J. C **77**, 101 (2017).
14. Y. V. Grats and P. Spirin, Int. J. Mod. Phys. A **35**, 2040030 (2020).
15. B. S. De Witt, Phys. Rep. C **19**, 297 (1975).
16. Б. С. де Витт, *Динамическая теория групп и полей*, Наука, Москва (1987) [B. S. DeWitt, *Dynamical Theory of Groups and Fields*, Gordon and Breach, New York (1965)].
17. Н. Биррелл, П. Девис, *Квантованные поля в искривленном пространстве-времени*, Мир, Москва (1984) [N. D. Birrell and P. C. W. Davies, *Quantum Fields in Curved Space*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1982)].
18. М. Пескин, Д. Шредер, *Введение в квантовую теорию поля*, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Ижевск (2001) [M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Addison-Wesley, Reading (1995)].
19. M. Bordag, G. L. Klimchitskaya, U. Mohideen, and V. M. Mostepanenko, *Advances in the Casimir Effect*, Oxford Univ. Press, Oxford (2009).
20. М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики,* т. 3, Мир, Москва (1982) [M. Reed and B. Simon, *Methods of Mathematical Physics III: Scattering Theory*, Academic Press, New York (1979)].
21. К. Ициксон, Ж.-Б. Зюбер, *Квантовая теория поля*, т. 2, Мир, Москва (1984) [C. Itzykson and J. B. Zuber, *Quantum Field Theory*, McGraw-Hill (1980)].
22. И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, *Обобщенные функции и действия над ними*, т. 1, Физматгиз, Москва (1958) [I. M.Gel'fand and G. E.Shilov, *Generalized Functions: Properties and Operations*, Academic Press, Waltham (1964)].
23. А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев, *Интегралы и ряды*, т. 2, Наука, Москва (1983) [A. P. Prudnikov, Yu. Brychkov, and O. Marichev, *Integrals and Series, Vol. 2, Special Functions*, Gordon and Breach Science Publishers, New York (1990)].
24. Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции*, тт. 1–3, Наука, Москва (1965–1967) [H. Bateman and A. Erdelyi, *Higher Transcendental Functions*, McGraw-Hill (1953)].
25. Y. V.Grats and P. Spirin, Phys. Rev. D **108**, 045001 (2023).