ЖЭТФ, 2024, том 165, вып. 2, стр. 152–164

ЭНЕРГИЯ, ИМПУЛЬС И УГЛОВОЙ МОМЕНТ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В СРЕДЕ С НЕЛОКАЛЬНОСТЬЮ ОПТИЧЕСКОГО ОТКЛИКА ПРИ ВЫРОЖДЕННОМ ПО ЧАСТОТЕ НЕЛИНЕЙНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ВОЛН

П. С. Рыжиков [*]***, В. А. Макаров***

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, физический факультет 119991, Москва, Россия

Поступила в редакцию 10 сентября 2023 г.,
после переработки 14 октября 2023 г.
Принята к публикации 17 октября 2023 г.

Из системы уравнений Максвелла в среде с нелокальностью нелинейного оптического отклика n-го порядка получены выражения для добавок к плотности энергии, плотности потока энергии, плотности импульса, плотности потока импульса, компонентам плотности углового момента и компонентам тензора плотности потока углового момента электромагнитного поля в случае, когда число взаимодействующих в ней волн с различными частотами меньше или равно n (вырожденные по частоте процессы). Показано, что имеющиеся при этом соотношения внутренней симметрии между компонентами тензоров локальной и нелокальной нелинейной оптической восприимчивости среды не позволяют получить правильные формулы для вышеупомянутых фундаментальных характеристик электромагнитного поля как частный случай ранее известных выражений для этих величин, появление которых обусловлено нелинейным взаимодействием $n+1$ волн с принципиально различными частотами, если некоторые из них в этих формулах просто положить равными друг другу. В качестве примера обсуждаются обусловленные нелокальным нелинейным оптическим откликом объема среды полученные добавки в случаях самофокусировки света, генерации второй и третьей гармоник.

DOI: 10.31857/S00444510240200020

1. ВВЕДЕНИЕ

Энергия, импульс и угловой момент (момент импульса) электромагнитного поля являются его важнейшими характеристиками, анализ которых представляет значительный интерес как с точки зрения теории электромагнетизма, так и для практических приложений. Являясь фундаментальными физическими величинами, они подчиняются законам сохранения, которые записываются в виде балансных уравнений, связывающих плотности этих величин и плотности их потоков [1–5]. Их вид зависит от пространственной симметрии среды, в которой существует электромагнитное поле. В поглощающих, неоднородных и анизотропных средах [1, 3, 6–8] эти уравнения являются неоднородными. Другие важные свойства среды, такие как частотная и пространственная дисперсия оптического отклика и его нелинейная зависимость от напряженности внешнего электрического поля, не приводят к возникновению неоднородности в законах сохранения, но могут принципиально изменять формулы для плотностей энергии, импульса и углового момента, а также для плотностей их потоков. При этом можно отметить определенную тенденцию: учет частотной дисперсии оптического отклика приводит, как правило, к изменению выражений только для плотности энергии, плотности импульса и плотности углового момента света в среде, не приводя к существенным изменениям в выражениях для соответствующих им плотности потоков энергии, плотности потока импульса и плотности потока момента импульса, тогда как пространственная дисперсия оптического отклика среды наоборот требует внесения изменений в определения плотностей потоков энергии, импульса и углового момента, оставляя неизменны-

[*] E-mail: ryzhikov.ps14@physics.msu.ru

ми соответствующие им плотности самих этих величин [1, 2, 9–11]. В свою очередь, нелинейность оптического отклика влияет на все упомянутые величины, поскольку они в том или ином виде зависят от поляризации среды [12–14].

Помимо фундаментальных аспектов электродинамики, изучение влияния оптического отклика среды на энергию, импульс и угловой момент распространяющегося излучения представляет большой интерес для практических применений. Так, плотность потока энергии определяет интенсивность излучения, являющуюся основной характеристикой, используемой при детектировании света [15]. Импульс и момент импульса определяют величину механического воздействия света на среду [1, 16]. Помимо этого, угловой момент света также имеет большой практический потенциал в задачах передачи информации, управления и манипуляции микрочастицами и при исследовании строения вещества [17–26].

Формулы для энергии, импульса и углового момента лазерного излучения, распространяющегося в средах, обладающих нелокальным нелинейным оптическим откликом, представляют особый интерес в связи с исследованием особенностей взаимодействия в них эллиптически поляризованных волн. В работе [27] были получены аналитические выражения для плотности энергии, плотности потока энергии, плотности импульса и плотности потока импульса света в случае, когда среди частот $n+1$ эллиптически поляризованных взаимодействующих волн в среде, демонстрирующей нелокальный нелинейный оптический отклик n-го порядка, нет равных друг другу. Для таких волн в вышеупомянутых средах были также получены выражения для компоненты углового момента и компонент тензора плотности потока углового момента электромагнитного поля [28]. В то же время многие наиболее распространенные процессы нелинейной оптики, такие, например, как генерация второй и третьей гармоник, самовоздействие, спектроскопическая схема когерентного антистоксова рассеяния света (КАРС), являются вырожденными по частоте, т. е. среди частот взаимодействующих в нелинейной среде волн есть равные друг другу. Первоначальное мнение о том, что наличие вырождения частот упрощает формулы для плотности энергии, плотности потока энергии, плотности импульса, плотности потока импульса, компоненты углового момента и компонент тензора плотности потока углового момента и они все легко получаются как частный случай равенства отдельных частот в ранее полученных выражениях работ [27, 28], оказалось ошибочным. Случай вырождения одной или нескольких частот оказывается на самом деле более общим и требует более сложных преобразований для вывода формул для вышеупомянутых характеристик электромагнитного поля, чем предельная ситуация, когда коэффициент вырождения каждой из частот взаимодействующих волн равен единице. В частности это связано с тем, что при вырождении частот тензоры, описывающие локальный и нелокальный нелинейный оптический отклик среды, обладают большей симметрией, чем в невырожденном случае [29, 30]. Целью данной работы является нахождение аналитических выражений для добавок к плотности энергии, плотности потока энергии, плотности импульса, плотности потока импульса, компонентам плотности углового момента и компонентам тензора плотности потока углового момента, обусловленных локальным и нелокальным нелинейным оптическим откликом n-го порядка объема однородной непоглощающей среды в случае, когда число взаимодействующих в ней волн с различными частотами меньше или равно n. Последнее эквивалентно тому, что среди формально взаимодействующих в среде с нелинейностью n-го порядка $n+1$ волн есть волны с одинаковыми частотами.

2. ПОЛЯРИЗАЦИЯ СРЕДЫ ПРИ ВЫРОЖДЕННОМ ПО ЧАСТОТЕ НЕЛИНЕЙНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ВОЛН В СРЕДЕ С НЕЛОКАЛЬНОСТЬЮ ОПТИЧЕСКОГО ОТКЛИКА

Пусть в среде, проявляющей нелинейность n-го порядка, из $n+1$ частот участвующих во взаимодействии волн первые $m-1$ частот различны, следующие $n-m+1$ равны ω_m, а последняя

$$\omega_{n+1} = \sum_{l=1}^{m-1} \omega_l + (n-m+1)\omega_m.$$

Напряженность создаваемого ими электрического поля равна

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \sum_{l=1}^{m} \tilde{\mathbf{E}}^{(l)}(\mathbf{r},t,\omega_l)\exp(-i\omega_l t) + \\ + \tilde{\mathbf{E}}^{(n+1)}(\mathbf{r},t,\omega_{n+1})\exp(-i\omega_{n+1} t) + \text{c.c.} = \\ = \sum_{l=1}^{m} \mathbf{E}^{(l)} + \mathbf{E}^{(n+1)} + \text{c.c.}, \quad (1)\end{aligned}$$

где $\tilde{\mathbf{E}}^{(l)}(\mathbf{r},t,\omega_l)$ — комплексная амплитуда волны с частотой ω_l. Индукция магнитного поля $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$

(которую мы будем считать равной напряженности магнитного поля $\mathbf{H}(\mathbf{r},t)$) и индукция электрического поля $\mathbf{D}(\mathbf{r},t)$ аналогично (2) выражаются через комплексные амплитуды $\tilde{\mathbf{B}}^{(l)}(\mathbf{r},t,\omega_l)$ и $\tilde{\mathbf{D}}^{(l)}(\mathbf{r},t,\omega_l)$:

$$\begin{aligned}\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \sum_{l=1}^{m}\tilde{\mathbf{B}}^{(l)}(\mathbf{r},t,\omega_l)\exp(-i\omega_l t) + \\ + \tilde{\mathbf{B}}^{(n+1)}(\mathbf{r},t,\omega_{n+1})\exp(-i\omega_{n+1}t) + \text{c.c.} = \\ = \sum_{l=1}^{m}\mathbf{B}^{(l)} + \mathbf{B}^{(n+1)} + \text{c.c.},\end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{D}(\mathbf{r},t) = \sum_{l=1}^{m}\tilde{\mathbf{D}}^{(l)}(\mathbf{r},t,\omega_l)\exp(-i\omega_l t) + \\ + \tilde{\mathbf{D}}^{(n+1)}(\mathbf{r},t,\omega_{n+1})\exp(-i\omega_{n+1}t) + \text{c.c.} = \\ = \sum_{l=1}^{m}\mathbf{D}^{(l)} + \mathbf{D}^{(n+1)} + \text{c.c.}\end{aligned} \quad (3)$$

В среде, демонстрирующей оптическую нелинейность n-го порядка,

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_L + \mathbf{P},$$

где

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}^{loc} + \mathbf{P}^{nloc}.$$

Здесь $\mathbf{D}_L$ — линейно зависящая от $\mathbf{E}$ часть вектора электрической индукции. Локальную $\mathbf{P}^{loc}$ и нелокальную $\mathbf{P}^{nloc}$ части нелинейной поляризации среды также запишем в виде, аналогичном $\mathbf{E}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}^{loc,nloc}(\mathbf{r},t) = \sum_{l=1}^{m}\tilde{\mathbf{P}}^{loc,nloc}(\mathbf{r},t,\omega_l)\exp(-i\omega_l t) + \\ + \tilde{\mathbf{P}}^{loc,nloc}(\mathbf{r},t,\omega_{n+1})\exp(-i\omega_{n+1}t) + \text{c.c.} = \\ = \sum_{l=1}^{m}\mathbf{P}^{loc,nloc}(\omega_l) + \mathbf{P}^{loc,nloc}(\omega_{n+1}) + \text{c.c.}\end{aligned} \quad (4)$$

Материальные уравнения для $\mathbf{P}^{loc,nloc}(\omega_l)$, где $l = 1,2,\ldots,m,n+1$, в среде, проявляющей нелинейность n-го порядка, могут быть записаны в виде [30–32]

$$\begin{aligned}P_i^{loc}(\omega_l) = \\ = \chi^{(n)}_{ii_{n+1}i_1^{l-1}i_{l+1}^n}\left(\omega_l;\omega_{n+1},-\bar{\omega}_1^{l-1},-\bar{\omega}_{l+1}^{m-1},-\tilde{\omega}_m^{(F(\omega_m))}\right)\times \\ \times E_{i_{n+1}}^{(n+1)}\prod_{\substack{p=1\\p\neq l}}^{m-1}E_{i_p}^{(p)*}\prod_{p=m}^{n}E_{i_p}^{(m)*},\end{aligned} \quad (5)$$

если $l = 1,2,\ldots,m-1$,

$$\begin{aligned}P_i^{loc}(\omega_m) = \\ = \chi^{(n)}_{ii_{n+1}i_1^{m-1}i_{m+1}^n}\left(\omega_m;\omega_{n+1},-\bar{\omega}_1^{m-1},-\tilde{\omega}_m^{(F(\omega_m)-1)}\right)\times \\ \times E_{i_{n+1}}^{(n+1)}\prod_{p=1}^{m-1}E_{i_p}^{(p)*}\prod_{p=m+1}^{n}E_{i_p}^{(m)*},\end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned}P_i^{loc}(\omega_{n+1}) = \chi^{(n)}_{ii_1^n}\left(\omega_{n+1};\bar{\omega}_1^{m-1},\tilde{\omega}_m^{(F(\omega_m))}\right)\times \\ \times\prod_{p=1}^{m-1}E_{i_p}^{(p)}\prod_{p=m}^{n}E_{i_p}^{(m)},\end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned}P_i^{nloc}(\omega_l) = \Gamma_{ii_{n+1}k}(\omega_l;\omega_{n+1})\,\partial_k E_{i_{n+1}}^{(n+1)} + \\ + \sum_{\substack{s=1\\s\neq l}}^{m-1}\Gamma_{ii_sk}(\omega_l;-\omega_s)\,\partial_k E_{i_s}^{(s)*} + \\ + \Gamma_{ii_nk}(\omega_l;-\omega_m)\,\partial_k E_{i_n}^{(m)*},\end{aligned} \quad (8)$$

если $l = 1,2,\ldots,m-1$,

$$\begin{aligned}P_i^{nloc}(\omega_m) = \Gamma_{ii_{n+1}k}(\omega_m;\omega_{n+1})\,\partial_k E_{i_{n+1}}^{(n+1)} + \\ + \sum_{s=1}^{m-1}\Gamma_{ii_sk}(\omega_m;-\omega_s)\,\partial_k E_{i_s}^{(s)*}\end{aligned} \quad (9)$$

и

$$\begin{aligned}P_i^{nloc}(\omega_{n+1}) = \sum_{s=1}^{m-1}\Gamma_{ii_sk}(\omega_{n+1};\omega_s)\,\partial_k E_{i_s}^{(s)} + \\ + \Gamma_{ii_nk}(\omega_{n+1};\omega_m)\,\partial_k E_{i_n}^{(m)}.\end{aligned} \quad (10)$$

Здесь индексы i, i_1, i_2, ..., i_{n+1} и k принимают значения x, y и z, по дважды встречающимся индексам проводится суммирование, тензоры $\hat{\chi}^{(n)}$ и $\hat{\gamma}^{(n)}$ ранга соответственно $n+1$ и $n+2$ определяют вклады локального и нелокального нелинейного отклика n-го порядка в поляризацию среды, i_s^q, где $1 \leqslant s < q \leqslant n+1$, обозначает последовательность индексов $i_s, i_{s+1}, \ldots, i_{q-1}, i_q$, а $\pm\bar{\omega}_s^q$ — соответственно последовательности частот ω_s, ω_{s+1}, ..., ω_{q-1}, ω_q и $-\omega_s$, $-\omega_{s+1}$, ..., $-\omega_{q-1}$, $-\omega_q$, совокупность s одинаковых частот ω_m обозначена в этих формулах как $\tilde{\omega}_m^s$. В (5)–(7) и далее $F(\omega_m)$ — кратность вырождения частоты ω_m, определяемая как число вхождений ω_m после точки с запятой в аргументах компоненты тензора $\hat{\chi}$ или $\hat{\gamma}$, и увеличенное на единицу число вхождений, если частота $-\omega_m$ является первым аргументом компонентов этих тензоров. Для удобства записи (8)–(10) введены вспомогательные тензоры

$$\begin{aligned}\Gamma_{ii_sk}(\omega_{n+1};\omega_s) = \partial P_i^{nloc}(\omega_{n+1})/\partial\left(\partial_k E_{i_s}^{(s)}\right) = \\ = \gamma^{(n)}_{ii_1^{s-1}i_{s+1}^n i_s k}\left(\omega_{n+1};\bar{\omega}_1^{s-1},\bar{\omega}_{s+1}^m,\tilde{\omega}_m^{(F(\omega_m)-1)},\omega_s\right)\times \\ \times\prod_{\substack{p=1\\p\neq s}}^{m}E_{i_p}^{(p)}\prod_{p=m+1}^{n}E_{i_p}^{(m)},\end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{ii_{n+1}k}(\omega_l;\omega_{n+1}) = \partial P_i^{nloc}(\omega_l)/\partial\left(\partial_k E_{i_{n+1}}^{(n+1)}\right) = \\ = \gamma^{(n)}_{ii_1^{l-1}i_{l+1}^{n+1}k}\left(\omega_l;-\bar{\omega}_1^{l-1},-\bar{\omega}_{l+1}^m,-\tilde{\omega}_m^{(F(\omega_m)-1)},\omega_{n+1}\right)\times \\ \times\prod_{\substack{p=1\\p\neq l}}^{m}E_{i_p}^{(p)*}\prod_{p=m+1}^{n}E_{i_p}^{(m)*},\end{aligned} \quad (12)$$

$$\Gamma_{ii_sk}(\omega_l;-\omega_s) = \partial P_i^{nloc}(\omega_l)/\partial\left(\partial_k E_{i_s}^{(s)*}\right) =$$
$$= \gamma^{(n)}_{ii_{n+1}i_1^{\min(l,s)-1}i_{\min(l,s)+1}^{\max(l,s)-1}i_{\max(l,s)+1}^{n}i_sk}\Big(\omega_l;\, \omega_{n+1},$$
$$-\bar{\omega}_1^{\min(l,s)-1}, -\bar{\omega}_{\min(l,s)+1}^{\max(l,s)-1}, -\bar{\omega}_{\max(l,s)+1}^{m},$$
$$-\tilde{\omega}_m^{(F(\omega_m)-1)}, -\omega_s\Big) E_{i_{n+1}}^{(n+1)} \prod_{\substack{p=1\\p\neq l,s}}^{m} E_{i_p}^{(p)*} \prod_{p=m+1}^{n} E_{i_p}^{(m)*}, \quad (13)$$

позволяющие сократить запись $\mathbf{P}^{loc}(\omega_l)$ и $\mathbf{P}^{nloc}(\omega_l)$, а также последующих уравнений. Если верхний индекс у i_s^q или $\bar{\omega}_s^q$ меньше нижнего, то соответствующие множества являются пустыми, а связанные с ними произведения полей в $\mathbf{P}^{loc}(\omega_l)$, $\mathbf{P}^{nloc}(\omega_l)$, $\Gamma_{ii_sk}(\omega_{n+1};\omega_s)$, $\Gamma_{ii_{n+1}k}(\omega_l;\omega_{n+1})$ и $\Gamma_{ii_sk}(\omega_l;-\omega_s)$ считаются равными единице. Компоненты тензоров (11) и (13) удовлетворяют условию

$$\Gamma_{ii_{n+1}k}(\omega_l;\omega_{n+1}) = -\Gamma_{ii_sk}(-\omega_{n+1};-\omega_s),$$

следующему из соотношений внутренней симметрии тензора $\hat{\gamma}^{(n)}$ [30]. После подстановки явного вида i_s^q, $\bar{\omega}_s^q$ и $\tilde{\omega}_m^s$ в (5)–(7) получившиеся выражения для $P_i^{loc}(\omega_l)$, $P_i^{loc}(\omega_m)$ и $P_i^{loc}(\omega_{n+1})$ совпадут с частным случаем формул, выписанных в [33], а после подстановки (11)–(13) в (8)–(10) и записывания в них явного вида i_s^q, $\bar{\omega}_s^q$ и $\tilde{\omega}_m^s$ получившиеся выражения для $P_i^{nloc}(\omega_l)$, $P_i^{nloc}(\omega_m)$ и $P_i^{nloc}(\omega_{n+1})$ совпадут с приведенными в [30]. В материальных уравнениях (5)–(10) частота ω_m имеет кратность вырождения $F(\omega_m) = n - m + 1$, а все остальные частоты — кратность вырождения 1.

Отсутствие в этих формулах нескольких разных совокупностей одинаковых частот связано исключительно с целью сделать используемые громоздкие формулы более короткими. Все дальнейшие полученные в этом приближении формулы легко обобщаются на случаи нескольких вырожденных частот.

3. ЭНЕРГИЯ И ИМПУЛЬС СВЕТА ПРИ ВЫРОЖДЕННОМ ПО ЧАСТОТЕ НЕЛИНЕЙНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ВОЛН

Для получения добавок к плотности энергии

$$U^{(n)} = U^{(n,loc)} + U^{(n,nloc)}$$

вектору плотности потока энергии поля

$$\mathbf{S}^{(n)} = \mathbf{S}^{(n,loc)} + \mathbf{S}^{(n,nloc)}$$

(также известному как вектор Пойнтинга), компоненте плотности импульса

$$g_i^{(n)} = g_i^{(n,loc)} + g_i^{(n,noc)}$$

и компоненте плотности потока импульса

$$G_{ij}^{(n)} = G_{ij}^{(n,loc)} + G_{ij}^{(n,nloc)},$$

связанных с локальным и нелокальным нелинейным оптическим откликом n-го порядка объема однородной непоглощающей среды, необходимо аналогично [27] сначала подставить выражения (5)–(10) в формулу для $\mathbf{D}(\mathbf{r},t)$. Полученный результат, а также $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$, $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$ нужно далее подставить в следующие из уравнений Максвелла законы сохранения энергии и импульса [1–3]:

$$\frac{1}{c}\left(\mathbf{E}\cdot\partial_t\mathbf{D} + \mathbf{B}\cdot\partial_t\mathbf{B}\right) + \mathrm{div}[\mathbf{E}\times\mathbf{B}] = 0, \quad (14)$$
$$\frac{1}{c}\,\partial_t[\mathbf{D}\times\mathbf{B}] + \mathbf{D}\times\nabla\times\mathbf{E} + \mathbf{B}\times\nabla\times\mathbf{B} = 0, \quad (15)$$

и провести усреднение получившихся выражений по времени. В результате этого в равенствах останутся производные только от медленно меняющихся величин. Затем полученные выражения необходимо преобразовать так, чтобы они приняли вид уравнений непрерывности:

$$\frac{1}{c}\,\partial_t U + \mathrm{div}\mathbf{S} = 0, \quad (16)$$
$$\frac{1}{c}\,\partial_t g_i + \partial_j G_{ij} = 0, \quad (17)$$

связывающих плотность энергии U с плотностью потока энергии $\mathbf{S}$ и плотность импульса g_i с плотностью потока импульса G_{ij}. Поскольку в $\mathbf{D}$ аддитивно входят слагаемые, обусловленные соответственно линейной и нелинейной составляющими поляризации среды, причем каждое из них состоит из суммы локальной и нелокальной составляющих, входящие в (16), (17) U, $\mathbf{S}$, g_i и G_{ij} можно записать в виде

$$U = \sum_{n=1}^{\infty}\left(U^{(n,loc)} + U^{(n,nloc)}\right), \quad (18)$$
$$\mathbf{S} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\mathbf{S}^{(n,loc)} + \mathbf{S}^{(n,nloc)}\right), \quad (19)$$
$$g_i = \sum_{n=1}^{\infty}\left(g_i^{(n,loc)} + g_i^{(n,noc)}\right), \quad (20)$$
$$G_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(G_{ij}^{(n,loc)} + G_{ij}^{(n,nloc)}\right). \quad (21)$$

Для нахождения явного вида слагаемых в правых частях уравнений (18)–(21) необходимо преобразовать выражения $\langle\mathbf{E}\cdot\partial_t\mathbf{P}\rangle = \partial_t\langle\mathbf{E}\cdot\mathbf{P}\rangle - \langle\mathbf{P}\cdot\partial_t\mathbf{E}\rangle$ и $\langle\mathbf{P}\cdot\partial_p\mathbf{E}\rangle$, в которых угловые скобки означают усреднение по времени, а p принимает значения x, y и z. К сожалению, эта процедура оказывается принципиально зависящей от числа слагаемых в материальных уравнениях и поэтому результаты работы [27], в которой m было равно n, т. е. частоты всех $n+1$ взаимодействующих волн были различными, не могут быть непосредственно использованы для их нахождения.

Подставляя материальные уравнения (5)–(7) для локальной нелинейной поляризации в $\langle \mathbf{P} \cdot \partial_p \mathbf{E} \rangle$ и учитывая свойство перестановочной симметрии тензора $\hat{\chi}^{(n)}$, согласно которому [29]

$$\frac{1}{F(-\omega_m)} \times \\ \times \chi^{(n)}_{ii_1^{m-1} i^n_{m+1} i_{n+1}} \Big(\omega_m; -\bar{\omega}_1^{m-1}, -\tilde{\omega}_m^{(F(\omega_m)-1)}, \omega_{n+1}\Big) = \\ = \frac{1}{F(\omega_{n+1})} \times \\ \times \chi^{(n)}_{i_{n+1} i_1^{m-1} i^n_{m+1} i} \Big(-\omega_{n+1}; -\bar{\omega}_1^{m-1}, -\tilde{\omega}_m^{(F(\omega_m))}\Big), \quad (22)$$

можно убедиться, что для любой из множества частот $\omega_{1,2,\ldots,m,n+1}$ взаимодействующих волн справедливо равенство

$$\sum_{s=1}^{m} P^{loc}_{i_s}(\omega_s)\,\partial_p E^{(s)*}_{i_s} + P^{loc}_{i_{n+1}}(\omega_{n+1})\,\partial_p E^{(n+1)*}_{i_{n+1}} + \text{c.c.} = \\ = \frac{1}{F(\omega_l)}\,\partial_p [P^{loc}_{i_l}(\omega_l) E^{(l)*}_{i_l}] + \text{c.c.} \quad (23)$$

Для этого необходимо подставить в левую часть (23) формулы (5)–(7), далее в слагаемом, содержащем производную напряженности электрического поля на частоте ω_m, внести, применяя правила дифференцирования, под производную все поля на этой частоте, а затем, используя соотношения внутренней симметрии (22), преобразовать во всех получившихся слагаемых левой части (23) компоненты тензора $\hat{\chi}^{(n)}$ так, чтобы у всех них были одинаковые последовательности индексов и частотных аргументов. Если, например, в качестве первой частоты выбрана ω_l, то в результате полученное выражение будет совпадать с правой частью формулы (23). Преобразование последней и, как следствие, нахождение явного вида связанных с локальным нелинейным оптическим откликом объема непоглощающей изотропной среды добавок к компонентам тензора энергии-импульса электромагнитного поля связано с различием двух подходов к формальному определению числа участвующих во взаимодействии волн.

При широко распространенном *прямом подходе* считается, что в среде, демонстрирующей нелинейность n-го порядка, взаимодействуют $m+1$ волн с разными частотами $\omega_{1,2,\ldots,m,n+1}$, где $m < n$, для каждой из которых уравнения Максвелла имеют одинаковый вид. Это выглядит более естественно при проверке описывающей взаимодействие волн в нелинейной среде системы уравнений на необходимое выполнение законов сохранения энергии, импульса и углового момента света. Результирующее электрическое поле в этом случае вначале представляется в виде суперпозиции напряженностей полей заданного числа взаимодействующих волн с различными частотами, а затем используется связь между ними, обусловленная нелинейностью среды. Но в рамках *подхода, основанного на предельном переходе* от случая $n+1$ волн с разными частотами к рассматриваемому в настоящей работе вырожденному случаю, можно считать, что в среде взаимодействуют $n+1$ волн, но уравнения для $n-m+1$ из них, имеющих одинаковую частоту ω_m, совпадают. Этот случай отражает точку зрения, согласно которой в среде, обладающей нелинейностью n-го порядка, всегда взаимодействуют ровно $n+1$ волн, даже если имеет место вырождение частот. В рамках первого подхода формула (23) принимает вид

$$\sum_{s=1}^{m} P^{loc}_{i_s}(\omega_s)\,\partial_p E^{(s)*}_{i_s} + P^{loc}_{i_{n+1}}(\omega_{n+1})\,\partial_p E^{(n+1)*}_{i_{n+1}} + \text{c.c.} = \\ = \frac{1}{m+1}\,\partial_p \left[\sum_{l=1}^{m} \frac{1}{F(\omega_l)} P^{loc}_{i_l}(\omega_l) E^{(l)*}_{i_l} + \right. \\ \left. + \frac{1}{F(-\omega_{n+1})}\, P^{loc}_{i_{n+1}}(\omega_{n+1}) E^{(n+1)*}_{i_{n+1}} + \text{c.c.}\right]. \quad (24)$$

Для получения правой части (24) необходимо $m+1$ раз записать равенство (23), последовательно выбирая $\omega_{1,2,\ldots,m,n+1}$ в качестве частоты, стоящей слева от точки с запятой в последовательности частотных аргументов тензора $\hat{\chi}^{(n)}$, сложить эти выражения и поделить полученный результат на $m+1$. В соответствии со вторым подходом формула (23) записывается в виде

$$\sum_{s=1}^{m} P^{loc}_{i_s}(\omega_s)\,\partial_p E^{(s)*}_{i_s} + P^{loc}_{i_{n+1}}(\omega_{n+1})\,\partial_p E^{(n+1)*}_{i_{n+1}} + \text{c.c.} = \\ = \frac{1}{n+1}\,\partial_p \left[\sum_{l=1}^{m} P^{loc}_{i_l}(\omega_l) E^{(l)*}_{i_l} + \right. \\ \left. + P^{loc}_{i_{n+1}}(\omega_{n+1})\, E^{(n+1)*}_{i_{n+1}} + \text{c.c.}\right]. \quad (25)$$

Для получения этого равенства необходимо правую и левую части (23), записанные для частот $\omega_{1,2,\ldots,m,n+1}$, домножить соответственно на $F(\omega_l)$, где $l = 1, 2, \ldots, m, n+1$, сложить получившиеся $m+1$ равенств и поделить полученный результат на $n+1$.

Поскольку $\sum_{l=1}^{m} F(\omega_l) + F(-\omega_{n+1}) = n+1$, левая часть после такого преобразования остается неизменной.

Подстановка найденных выражений $\langle \mathbf{P}^{loc} \cdot \partial_p \mathbf{E} \rangle$ в (15) и $\langle \mathbf{P}^{loc} \cdot \partial_t \mathbf{E} \rangle$ в (14) и сравнение получившихся формул с (16), (17) позволяют записать связанные с локальным нелинейным оптическим откликом объема непоглощающей среды добавки к компонентам тензора энергии-импульса в следующем виде:

$$U^{(n,loc)} = \sum_{l=1}^{m} [1 - K(\omega_l)] P_i^{loc}(\omega_l) E_i^{(l)*} + \\ + [1 - K(-\omega_{n+1})] P_i^{loc}(\omega_{n+1}) E_i^{(n+1)*} + \text{c.c.}, \quad (26)$$

$$S_k^{(n,loc)} = 0, \quad (27)$$

$$g_p^{(n,loc)} = \sum_{l=1}^{m} e_{pij} P_i^{loc}(\omega_l) B_j^{(l)*} + \\ + e_{pij} P_i^{loc}(\omega_{n+1}) B_j^{(n+1)*} + \text{c.c.} \quad (28)$$

(e_{pij} — тензор Леви-Чивиты),

$$G_{pk}^{(n,loc)} = \sum_{l=1}^{m} \Big[\delta_{pk} K(\omega_l) P_i^{loc}(\omega_l) E_i^{(l)*} - \\ - P_k^{loc}(\omega_l) E_p^{(l)*} \Big] + \delta_{pk} K(-\omega_{n+1}) P_i^{loc}(\omega_{n+1}) E_i^{(n+1)*} - \\ - P_k^{loc}(\omega_{n+1}) E_p^{(n+1)*} + \text{c.c.} \quad (29)$$

В формулах (26)–(29) в случае прямого подхода $K(\omega_{l,n+1}) = [(m+1)F(\omega_{l,n+1})]^{-1}$, а в рамках подхода, основанного на предельном переходе, $K(\omega_{l,n+1}) = (n+1)^{-1}$. При $m = n$ для всех индексов $F(\omega_l) = 1$, и использование любого из них приводит к одинаковому результату.

Формулы (26) и (29), полученные в рамках подхода, основанного на предельном переходе, и формула (28), не зависящая от выбора подхода, отличаются от аналогичных им выражений для обусловленных нелинейным локальным оптическим откликом объема среды плотностей энергии и импульса и плотности потока импульса в случае, когда все $n+1$ частот взаимодействующих волн различаются только числом слагаемых во входящих в них суммах. При этом формулы (26) и (29) в случае прямого подхода содержат дополнительные коэффициенты. Ниже будет показано, что оба этих подхода к нахождению обусловленных нелинейностью среды добавок к плотности энергии, вектору плотности потока энергии поля, компоненте плотности импульса и компоненте плотности потока импульса распространяющегося излучения в случае их применения для получения обусловленного нелинейностью среды вклада в плотность потока углового момента приводят к выражениям, удовлетворяющим одному и тому же критерию равнозначности вклада каждой из взаимодействующих волн, который был продемонстрирован в [28].

Если подставить в $\langle \mathbf{P} \cdot \partial_p \mathbf{E} \rangle$ материальные уравнения для нелокальной составляющей нелинейной поляризации среды (формулы (8)–(10)), то с учетом содержащихся в этих формулах пространственных производных амплитуд напряженности электрического поля на различных частотах можно записать равенство

$$\langle \mathbf{P}^{nloc} \cdot \partial_p \mathbf{E} \rangle = \sum_{s=1}^{m} P_{i_s}^{nloc}(\omega_s)\, \partial_p E_{i_s}^{(s)*} + P_{i_{n+1}}^{nloc}(\omega_{n+1})\, \partial_p E_{i_{n+1}}^{(n+1)*} + \text{c.c.} = \\ = \partial_p \Bigg(\sum_{l=1}^{m-1} A_{i_1^n ik}^{(l)} \prod_{\substack{q=1\\q\neq l}}^{m-1} E_{i_q}^{(q)} \prod_{q=m}^{n} E_{i_q}^{(m)} E_i^{(n+1)*} \partial_k E_{i_l}^{(l)} + \\ + A_{i_1^n ik}^{(m)} \prod_{q=1}^{m-1} E_{i_q}^{(q)} \prod_{q=m}^{n-1} E_{i_q}^{(m)} E_i^{(n+1)*} \partial_k E_{i_n}^{(m)} + A_{i_1^n ik}^{(n+1)} \prod_{q=1}^{m-1} E_{i_q}^{(q)} \prod_{q=m}^{n} E_{i_q}^{(m)} \partial_k E_i^{(n+1)*} \Bigg) - \\ - \partial_k \Bigg(\sum_{l=1}^{m-1} A_{i_1^n ik}^{(l)} \prod_{\substack{q=1\\q\neq l}}^{m-1} E_{i_q}^{(q)} \prod_{q=m}^{n} E_{i_q}^{(m)} E_i^{(n+1)*} \partial_p E_{i_l}^{(l)} + A_{i_1^n ik}^{(m)} \prod_{q=1}^{m-1} E_{i_q}^{(q)} \prod_{q=m}^{m-1} E_{i_q}^{(m)} E_i^{(n+1)*} \partial_p E_{i_n}^{(m)} + \\ + A_{i_1^n ik}^{(n+1)} \prod_{q=1}^{m-1} E_{i_q}^{(q)} \prod_{q=m}^{n} E_{i_q}^{(m)} \partial_p E_i^{(n+1)*} \Bigg) + \text{c.c.} \quad (30)$$

Здесь $A_{i_1^n ik}^{(l)}$ — неизвестные вспомогательные тензоры, конкретный вид которых определяют $U^{(n,nloc)}$, $\mathbf{S}^{(n,nloc)}$, $g_i^{(n,nloc)}$ и $G_{ij}^{(n,nloc)}$. Для нахождения $A_{i_1^n ik}^{(l)}$ необходимо решить систему уравнений, которая образуется после раскрытия входящих в правую часть (30) производных и приравнивания содержащихся в левой и правой частях коэффициентов при находящихся в них одинаковых комбинациях напряженностей электрических полей и их пространственных производных. Получившаяся таким способом система уравнений относительно $A^{(l)}_{i_1^n ik}$ не имеет единственного решения из-за того, что законы сохранения (16), (17) остаются неизменными при добавлении к ним выражений с равными нулю дивергенциями и производными по времени. Тем не менее, отталкиваясь от отличия формулы (23) от аналогичного выражения в случае, когда все частоты $\omega_{1,2,\ldots,n+1}$ различны, и от вида, который принимает формула (30) при $m = n$ [27], также удается подобрать $A^{(l)}_{i_1^n ik}$ и записать (30) в виде

$$\begin{gathered}
\sum_{s=1}^{m} P^{nloc}_{i_s}(\omega_s)\,\partial_p E^{(s)*}_{i_s} + \\
+ P^{nloc}_{i_{n+1}}(\omega_{n+1})\,\partial_p E^{(n+1)*}_{i_{n+1}} + \text{c.c.} = \\
= \frac{1}{F(\omega_l)}\Big[\partial_p\left(P^{nloc*}_i(\omega_l)\,E^{(l)}_i\right) - \\
- \partial_k\Big(E^{(l)}_i\Gamma_{ijk}(-\omega_l;-\omega_{n+1})\,\partial_p E^{(n+1)*}_j + \\
+ E^{(l)}_i \sum_{\substack{s=1\\ s\neq l}}^{m}\Gamma_{ijk}(-\omega_l;\omega_s)\partial_p E^{(s)}_j\Big)\Big] + \text{c.c.}, \quad (31)
\end{gathered}$$

если $l = 1, 2, \ldots, m$, и

$$\begin{gathered}
\sum_{s=1}^{m} P^{nloc}_{i_s}(\omega_s)\,\partial_p E^{(s)*}_{i_s} + \\
+ P^{nloc}_{i_{n+1}}(\omega_{n+1})\,\partial_p E^{(n+1)*}_{i_{n+1}} + \text{c.c.} = \\
= \frac{1}{F(-\omega_{n+1})}\Big[\partial_p\Big(P^{nloc}_i(\omega_{n+1})E^{(n+1)*}_i\Big) - \\
- \partial_k\Big(E^{(n+1)*}_i \sum_{s=1}^{m}\Gamma_{ijk}(\omega_{n+1};\omega_s)\,\partial_p E^{(s)}_j\Big)\Big] + \\
+ \text{c.c.}, \quad (32)
\end{gathered}$$

если $l = n + 1$. Чтобы убедиться в справедливости этих выражений, достаточно расписать в явном виде производные в их правых частях и сравнить коэффициенты при одинаковых комбинациях напряженностей полей и их производных в правой и левой частях уравнений. В силу соотношений внутренней симметрии [30] эти коэффициенты оказываются равными друг другу.

С помощью равенств (31) и (32) можно получить два набора формул для $U^{(n,nloc)}$, $\mathbf{S}^{(n,nloc)}$, $g^{(n,nloc)}_i$ и $G^{(n,nloc)}_{ij}$, соответствующих двум описанным выше различным критериям равноправия частот взаимодействующих волн. Для реализации прямого подхода необходимо сложить сумму поочередно записанных для $\omega_l = \omega_{1,2,\ldots,m}$ выражений (31) с выражением (32) и поделить полученный результат на $m + 1$. Подход, основанный на предельном переходе, требует перед сложением суммы поочередно записанных для $\omega_l = \omega_{1,2,\ldots,m}$ выражений (31) с выражением (32) сначала умножить слагаемые этой суммы соответственно на $F(\omega_l)$, а (32) — на $F(-\omega_{n+1})$. Затем получившийся в результате такой операции результат следует поделить на $n + 1$. Ввиду громоздкости получаемых окончательных выражений, аналогичных (23) и (24), мы не будем здесь приводить их явный вид, а сразу запишем формулы для добавок к компонентам тензора энергии-импульса электромагнитного поля, связанных с нелокальным нелинейным оптическим откликом объема непоглощающей среды:

$$\begin{gathered}
U^{(n,nloc)} = \sum_{l=1}^{m}\left[1 - K(\omega_l)\right] P^{nloc}_i(\omega_l)E^{(l)*}_i + \\
+ \left[1 - K(-\omega_{n+1})\right] P^{nloc}_i(\omega_{n+1})E^{(n+1)*}_i + \text{c.c.}, \quad (33)
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
S^{(n,nloc)}_k = c^{-1}\sum_{l=1}^{m}\Big[K(-\omega_{n+1})E^{(n+1)*}_i \times \\
\times \Gamma_{ijk}(\omega_{n+1};\omega_l)\partial_t E^{(l)}_j + \\
+ K(\omega_l)E^{(l)}_i\Gamma_{ijk}(-\omega_l;-\omega_{n+1})\partial_t E^{(n+1)*}_j + \\
+ K(\omega_l)\sum_{\substack{s=1\\ s\neq l}}^{m} E^{(l)}_i\Gamma_{ijk}(-\omega_l;\omega_s)\partial_t E^{(s)}_j\Big] + \\
+ \text{c.c.}, \quad (34)
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
g^{(n,nloc)}_p = \sum_{l=1}^{m} e_{pij}P^{nloc}_i(\omega_l)B^{(l)*}_j + \\
+ e_{pij}P^{nloc}_i(\omega_{n+1})B^{(n+1)*}_j + \text{c.c.}, \quad (35)
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
G^{(n,nloc)}_{pk} = \\
= \sum_{l=1}^{m}\Big[\delta_{pk}K(\omega_l)P^{nloc}_i(\omega_l)E^{(l)*}_i - P^{nloc}_k(\omega_l)E^{(l)*}_p\Big] - \\
- P^{nloc}_k(\omega_{n+1})E^{(n+1)*}_p + \\
+ \delta_{pk}K(-\omega_{n+1})P^{nloc}_i(\omega_{n+1})E^{(n+1)*}_i -
\end{gathered}$$

$$
\begin{aligned}
&- \sum_{l=1}^{m} \Big(K(-\omega_{n+1}) E_i^{(n+1)*} \Gamma_{ijk}(\omega_{n+1}; \omega_l) \partial_p E_j^{(l)} + \\
&\quad + K(\omega_l) E_i^{(l)} \Gamma_{ijk}(-\omega_l; -\omega_{n+1}) \partial_p E_j^{(n+1)*} + \\
&\quad + K(\omega_l) \sum_{\substack{s=1\\ s\neq l}}^{m} E_i^{(l)} \Gamma_{ijk}(-\omega_l; \omega_s) \partial_p E_j^{(s)} \Big) + \text{c.c.} \quad (36)
\end{aligned}
$$

Здесь явный вид $K(\omega_{l,n+1})$ зависит от реализуемого подхода и принимает те же значения, что и в случае рассмотренного выше влияния локального нелинейного оптического отклика непоглощающей среды. Приведенное выше сравнение формул (26)–(29) с аналогичными им формулами для связанных с нелинейным локальным оптическим откликом объема среды плотности энергии, плотности потока энергии, плотности импульса и плотности потока импульса, полученными ранее для случая, при котором частоты всех $n+1$ взаимодействующих волн различны, также остается в силе и для формул (33)–(36). Формула для связанной с нелокальным нелинейным оптическим откликом плотности потока энергии (34) при использовании подхода, основанного на предельном переходе, отличается от аналогичной формулы для невырожденного случая только числом входящих в нее слагаемых.

Несмотря на то, что материальные уравнения (5)–(10) для локальной и нелокальной составляющих нелинейной поляризации среды для краткости были записаны в виде, соответствующем ситуации, когда только одна частота ω_m имеет кратность вырождения выше единицы, полученные формулы (26)–(29) и (33)–(36) легко обобщаются на случай, когда несколько различных частот взаимодействующих волн обладают кратностью вырождения больше единицы (вплоть до ситуации, когда модули частот всех взаимодействующих волн равны друг другу). Используемый для записи поляризации среды тензор

$$
\Gamma_{ijk}(\omega_l; \omega_s) = \partial P_i^{(n,nloc)}(\omega_l) / \partial \left(\partial_k E_j^{(s)} \right) \qquad (37)
$$

является в этом случае произведением компоненты тензора $\hat{\gamma}^{(n)}$, у которой первый частотный аргумент равен ω_l, а последний — ω_s, на $n-1$ компонент вектора напряженности электрического поля, среди которых компоненты вектора на частотах $-\omega_l$ и ω_s встречаются $F(-\omega_l)-1$ и $F(\omega_s)-1$ раз соответственно, а компоненты на каждой из частот ω_r ($\omega_r \neq \omega_s$ и $\omega_r \neq -\omega_l$) встречаются $F(\omega_r)$ раз. Каждая из сумм от единицы до m в формулах (26)–(29) и (33)–(36) превращается в этом случае в сумму по всем возможным различным частотам, кроме учитываемой отдельным слагаемым частоты ω_{n+1}. При этом при прямом подходе явный вид выражений для $K(\omega_{l,n+1})$ обеспечивает форму записи (26)–(29) и (33)–(36), содержащую коэффициенты, необходимые для учета возможного вырождения нескольких различных частот. Более того, при подходе, основанном на предельном переходе, формулы (26)–(29) и (33)–(36) вообще не зависят от кратностей вырождения частот взаимодействующих волн.

4. УГЛОВОЙ МОМЕНТ СВЕТА ПРИ ВЫРОЖДЕННОМ ПО ЧАСТОТЕ НЕЛИНЕЙНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ВОЛН

Из закона сохранения импульса (15) можно получить формулу, выражающую закон сохранения углового момента (момента импульса) электромагнитного поля [3, 8]:

$$
c^{-1}\partial_t \left[e_{ijp} x_j g_p \right] + \partial_k \left[e_{ijp} x_j G_{pk} \right] = e_{ikp} G_{pk}. \qquad (38)
$$

Здесь x_j — декартовы координаты радиус-вектора. Аналогично тому, как уравнения для энергии (16) и импульса (17) связывают плотности этих величин с плотностями их потоков, можно поставить целью представить (38) в виде балансного уравнения для плотности углового момента J_i и плотности потока углового момента M_{ik}:

$$
c^{-1}\partial_t J_i + \partial_k M_{ik} = \tau_i. \qquad (39)
$$

В (39) τ_i — компонента вектора плотности вращательного момента, обусловленного анизотропией среды. Она тождественно равна нулю, если ось i является осью симметрии среды бесконечного порядка. Поскольку g_p и G_{pk} выражаются в виде сумм линейной и соответствующих разным n нелинейных составляющих, причем каждая из последних состоит из двух слагаемых, ответственных за локальный и нелокальный оптические отклики объема среды на электрическое поле, J_i, M_{ik} и τ_i естественно представить в виде

$$
J_i = \sum_{n=1}^{\infty} \left(J_i^{(n,loc)} + J_i^{(n,nloc)} \right), \qquad (40)
$$

$$
M_{ik} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(M_{ik}^{(n,loc)} + M_{ik}^{(n,nloc)} \right). \qquad (41)
$$

$$
\tau_i = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\tau_i^{(n,loc)} + \tau_i^{(n,noc)} \right). \qquad (42)
$$

Сравнение (39) и (38) с учетом (40)–(42) дает основание утверждать, что если

$$J_i^{(n,loc)} = e_{ijp} x_j g_p^{(n,loc)},$$

$$M_{ik}^{(n,loc)} = e_{ijp} x_j G_{pk}^{(n,loc)},$$

$$\tau_i^{(n,loc)} = e_{ikp} G_{pk}^{(n,loc)},$$

то эти выражения для любого натурального n (включая линейные среды) действительно можно считать соответственно плотностью углового момента, плотностью потока углового момента и плотностью вращательного момента света, связанными с локальным оптическим откликом объема среды. Если последний является нелокальным, то, как было показано в [27,28], определенные аналогично $\tau_i^{(n,loc)}$ компоненты вектора $e_{ikp} G_{pk}^{(n,nloc)}$ не равны нулю в изотропной среде, и поэтому последняя формула не может считаться плотностью вращательного момента. В связи с этим необходимо осуществить преобразование выражения $e_{ikp} G_{pk}^{(n,nloc)}$ таким образом, чтобы оно представлялось в виде суммы полной пространственной производной от некоторой величины $S_{ij}^{(n)}$, которая в дальнейшем будет описывать вклад нелокальности нелинейного оптического отклика в плотность потока углового момента света, и вектора $\tilde{\tau}_i^{(n)}$, проекция которого на ось симметрии среды (при ее наличии) равна нулю [28], т. е. найти $S_{ij}^{(n)}$ и $\tilde{\tau}_i^{(n)}$, удовлетворяющие равенству

$$e_{ikp} G_{pk}^{(n,nloc)} = \partial_j S_{ij}^{(n)} + \tilde{\tau}_i^{(n)}. \qquad (43)$$

После выполнения такого преобразования выражения для

$$M_{ik}^{(n,nloc)} = e_{ijp} x_j G_{pk}^{(n,nloc)} - S_{ik}^{(n)}$$

и

$$\tau_i^{(n,nloc)} = \tilde{\tau}_i^{(n)}$$

будут корректно описывать вклад нелокальности нелинейного оптического отклика соответственно в плотность потока углового момента света и плотность вращательного момента.

Для нахождения явного вида $S_{ik}^{(n)}$ и $\tilde{\tau}_i^{(n)}$ аналогично [28] с помощью символа Кронекера переобозначим в каждом из слагаемых формулы (36) для $G_{pk}^{(n,nloc)}$ индексы у компонент напряженностей электрических полей так, чтобы поля на одинаковых частотах в каждом из них имели один и тот же индекс, а связанный с дифференцированием индекс всегда был равен j, естественно не нарушая правила, согласно которому по дважды встречающимся одинаковым индексам проводится суммирование. Преобразованное таким способом выражение для $G_{pk}^{(n,nloc)}$ затем домножим на e_{ikp} и сгруппируем в нем все слагаемые с одинаковыми комбинациями полей и их пространственных производных. Далее в слагаемом, содержащем пространственную производную от поля на вырожденной частоте, внесем все оставшиеся напряженности на той же самой частоте под оператор дифференцирования. В результате в дальнейших выражениях это слагаемое будет содержать множитель $[F(\omega_m)]^{-1}$. Выполненное преобразование является специфичным для вырожденных процессов и оказывается возможным исключительно вследствие внутренней симметрии тензора $\hat{\gamma}^{(n)}$ [30], благодаря которой можно свободно переставлять между собой индексы полей, относящихся к одной и той же частоте.

Если несколько частот вырождены, то эту процедуру нужно повторить в каждом из слагаемых, содержащих производные от полей на этих частотах. В остальные слагаемые, где под пространственной производной находятся поля на невырожденных частотах, нужно формально добавить равный единице коэффициент $[F(\omega_l)]^{-1}$. Затем в полученном выражении для $e_{ikp} G_{pk}^{(n,nloc)}$ представить слагаемое, содержащее пространственную производную от компоненты поля на частоте ω_l, в виде разности слагаемого с производной от произведения всех напряженностей электрических полей на всех частотах и выражения, равного произведению всех полей на частоте ω_l, и пространственной производной от произведения всех остальных полей, частоты которых отличны от ω_l. Далее следует записать $m+1$ раз получившуюся формулу для $e_{ikp} G_{pk}^{(n,nloc)}$, последовательно считая в каждой из них величину ω_l равной $\omega_{1,2,\ldots,m,n+1}$, сложить их и, реализуя вышеупомянутый прямой подход к числу взаимодействующих волн, поделить результат на $m+1$.

При подходе, основанном на предельном переходе от взаимодействия $n+1$ волн с разными частотами к случаю, когда среди частот взаимодействующих волн есть равные друг другу, необходимо непосредственно после записи вышеупомянутых $m+1$ уравнений умножить каждое из них на $F(\omega_l)$ ($l = 1, 2, \ldots, m, n+1$), а только потом последовательно подставлять вместо ω_l частоты $\omega_{1,2,\ldots,m,n+1}$. Результат суммирования получившихся $m+1$ уравнений следует при этом разделить на $n+1$. Оба этих подхода после деления соответствующих сумм вышеупомянутых $m+1$ равенств на $m+1$ и $n+1$

приводят к $e_{ikp}G_{pk}^{(n,nloc)}$ в левой части итогового выражения. Его правой частью в обоих случаях является сумма двух достаточно громоздких слагаемых.

Первое из них — это $\partial_j S_{ij}^{(n)}$, где

$$\begin{aligned} S_{ij}^{(n)} = -e_{ikp}\Biggl\{ \Biggl[\sum_{s=1}^{m-1} K(\omega_s)\gamma_{ki_1^{s-1}i_{s+1}^n i_s j}\Bigl(\omega_{n+1};\bar{\omega}_1^{s-1},\bar{\omega}_{s+1}^{m-1},\tilde{\omega}_m^{(F(\omega_m))},\omega_s\Bigr) + K(\omega_m)\gamma_{ki_1^n j}\Bigl(\omega_{n+1};\bar{\omega}_1^{m-1},\tilde{\omega}_m^{(F(\omega_m))}\Bigr)\Biggr] \times \\ \times E_p^{(n+1)*}\prod_{r=1}^{m-1}E_{i_r}^{(r)}\prod_{r=m}^{n}E_{i_r}^{(m)} + \sum_{l=1}^{m-1}\Biggl[K(-\omega_{n+1})\gamma_{ki_1^{l-1}i_{l+1}^n i_{n+1}j}\Bigl(-\omega_l;\bar{\omega}_1^{l-1},\bar{\omega}_{l+1}^{m-1},\tilde{\omega}_m^{(F(\omega_m))},-\omega_{n+1}\Bigr) + \\ + \sum_{\substack{s=1\\ s\neq l}}^{m-1} K(\omega_s)\gamma_{ki_{n+1}i_1^{\min(l,s)-1}i_{\min(l,s)+1}^{\max(l,s)-1}i_{\max(l,s)+1}^n i_s j}\Bigl(-\omega_l;-\omega_{n+1},\bar{\omega}_1^{\min(l,s)-1},\bar{\omega}_{\min(l,s)+1}^{\max(l,s)-1},\bar{\omega}_{\max(l,s)+1}^{m-1},\tilde{\omega}_m^{(F(\omega_m))},\omega_s\Bigr) + \\ + K(\omega_m)\gamma_{ki_{n+1}i_1^{l-1}i_{l+1}^n j}\Bigl(-\omega_l;-\omega_{n+1},\bar{\omega}_1^{l-1},\bar{\omega}_{l+1}^{m-1},\tilde{\omega}_m^{(F(\omega_m))}\Bigr)\Biggr] E_{i_{n+1}}^{(n+1)*}E_p^{(l)}\prod_{\substack{r=1\\ r\neq l}}^{m-1}E_{i_r}^{(r)}\prod_{r=m}^{n}E_{i_r}^{(m)} + \\ + \Biggl[\sum_{s=1}^{m-1}K(\omega_s)\gamma_{ki_{n+1}i_1^{s-1}i_{s+1}^{m-1}i_{m+1}^n i_s j}\Bigl(-\omega_m;-\omega_{n+1},\bar{\omega}_1^{s-1},\bar{\omega}_{s+1}^{m-1},\tilde{\omega}_m^{(F(\omega_m)-1)},-\omega_s\Bigr) + \\ + K(-\omega_{n+1})\gamma_{ki_1^{m-1}i_{m+1}^n i_{n+1}j}\Bigl(-\omega_m;\bar{\omega}_1^{m-1},\tilde{\omega}_m^{(F(\omega_m)-1)},-\omega_{n+1}\Bigr)\Biggr] \times \\ \times E_{i_{n+1}}^{(n+1)*}E_p^{(m)}\prod_{r=1}^{m-1}E_{i_r}^{(r)}\prod_{r=m+1}^{n}E_{i_r}^{(m)}\Biggr\} + \text{c.c.} \end{aligned} \quad (44)$$

Здесь

$$K(\omega_{l,n+1}) = [(m+1)F(\omega_{l,n+1})]^{-1}$$

в случае прямого подхода, а в рамках подхода основанного на предельном переходе,

$$K(\omega_{l,n+1}) = (n+1)^{-1}.$$

При $m=n$ для всех индексов $F(\omega_l)=1$ и использование любого из подходов приводит к одинаковому выражению для $S_{ij}^{(n)}$. Второе слагаемое, естественно равное

$$e_{ikp}G_{pk}^{(n,nloc)} - \partial_j S_{ij}^{(n)},$$

где $G_{pk}^{(n,nloc)}$ задается формулой (36), обращается в нуль, если нелинейная среда имеет совпадающую с x_i ось симметрии бесконечного порядка, т. е. является $\tilde{\tau}_i^{(n,nloc)}$. Явный вид $\tilde{\tau}_i^{(n,nloc)}$ мы не приводим, так как дифференцирование сложных несколько раз встречающихся произведений напряженностей электрических полей в $S_{ij}^{(n)}$ делает эту формулу очень громоздкой. Полный вклад нелинейного оптического отклика в плотность вращательного момента

$$\tau_i^{(n)} = e_{ikp}G_{pk}^{(n,loc)} + \tilde{\tau}_i^{(n,nloc)}.$$

В завершение этого раздела отметим, что среди различных режимов взаимодействия волн, вызванных нелинейностями нечетных порядков (включая линейный отклик), существуют такие, для которых суммы в выражениях (26)–(28), (33)–(36) и (44) действительны, и поэтому эти формулы необходимо записывать без слагаемого с.с. Если выбрать одну из волн, участвующих в таком взаимодействии, например, имеющую частоту ω_{n+1}, и записать частотные аргументы во входящих в $P_i^{(loc)}(\omega_{n+1})$ и $P_i^{(nloc)}(\omega_{n+1})$ тензорах $\hat{\chi}^{(n)}$ и $\hat{\gamma}^{(n)}$ в виде последовательности $\omega_{n+1}, -\omega_1, -\omega_2, ..., -\omega_m$, то окажется, что, руководствуясь соотношениями внутренней симметрии, частотные аргументы всегда можно переставить так, чтобы сумма рядом стоящих на нечетных и четных местах частот была равна нулю. Примером такого процесса является самовоздействие света в среде с кубической нелинейностью, которое вместе с другими будет рассмотрено в следующем разделе.

5. НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕРЫ

В качестве примеров использования полученных общих формул приведем выражения для связанных с нелокальным нелинейным оптическим откликом объема непоглощающей среды добавок к плотности энергии $U^{(n,nloc)}$, вектору плотности потока энергии $S_k^{(n,nloc)}$, компонентам вектора плотности импульса $g_p^{(n,nloc)}$, компонентам тензора плотности потока импульса $G_{pk}^{(n,nloc)}$ и компоненте тензора $S_{ij}^{(n)}$ для генерации второй и третьей гармоник и самофокусировки. Громоздкие выражения для связанных с нелинейным оптическим откликом объема среды плотности углового момента

$$J_i^{(n,nloc)} = e_{ijp} x_j g_p^{(n,nloc)},$$

плотности потока углового момента

$$M_{ik}^{(n,nloc)} = e_{ijp} x_j G_{pk}^{(n,nloc)} - S_{ik}^{(n)}$$

и $\tilde{\tau}_i^{(n,nloc)}$ для этих процессов при необходимости могут быть записаны с помощью приведенных ниже выражений для $G_{pk}^{(n,nloc)}$ и $S_{ij}^{(n)}$.

При генерации второй гармоники в среде с квадратичной нелинейностью $n = 2$, $\omega_{1,2} = \omega$, $m = 1$, $\omega_3 = 2\omega$, а $F(\omega) = 2$, $F(-2\omega) = 1$. Поэтому

$$\begin{aligned} U^{(2,nloc)} &= \\ &= \{[1 - K(\omega)]\gamma_{ijlk}(-\omega; \omega, -2\omega)E_i(\omega)\,\partial_k E_l^*(2\omega) + \\ &+ [1 - K(-2\omega)]\gamma_{ijlk}(2\omega; \omega, \omega) \times \\ &\times E_i^*(2\omega)\,\partial_k E_l(\omega)\}E_j(\omega) + \text{c.c.}, \end{aligned} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} S_k^{(2)} &= c^{-1}[K(-2\omega)\gamma_{ijlk}(2\omega; \omega, \omega)E_i^*(2\omega)\,\partial_t E_l(\omega) + \\ &+ K(\omega)\gamma_{ijlk}(-\omega; \omega, -2\omega)E_i(\omega)\,\partial_t E_l^*(2\omega)]E_j(\omega) + \\ &+ \text{c.c.}, \end{aligned} \quad (46)$$

$$\begin{aligned} g_p^{(2,nloc)} &= e_{pij}(\gamma_{ilmk}(-\omega; \omega, -2\omega)B_j(\omega)\,\partial_k E_m^*(2\omega) + \\ &+ \gamma_{ilmk}(2\omega; \omega, \omega)B_j^*(2\omega)\,\partial_k E_m(\omega))E_l(\omega) + \text{c.c.}, \end{aligned} \quad (47)$$

$$\begin{aligned} G_{pk}^{(2,nloc)} &= \\ &= \{\delta_{pk}[K(\omega)\gamma_{ijlm}(-\omega; \omega, -2\omega)E_i(\omega)\,\partial_m E_l^*(2\omega) + \\ &+ K(-2\omega)\gamma_{ijlm}(2\omega; \omega, \omega)E_i^*(2\omega)\,\partial_m E_l(\omega)] - \\ &- [K(-2\omega)\gamma_{ijlk}(2\omega; \omega, \omega)E_i^*(2\omega)\,\partial_p E_l(\omega) + \\ &+ K(\omega)\gamma_{ijlk}(-\omega; \omega, -2\omega)E_i(\omega)\,\partial_p E_l^*(2\omega)] - \\ &- [\gamma_{kjlm}(2\omega; \omega, \omega)E_p^*(2\omega)\,\partial_m E_l(\omega) + \\ &+ \gamma_{kjlm}(-\omega; \omega, -2\omega)E_p(\omega)\,\partial_m E_l^*(2\omega)]\}\,E_j(\omega) + \\ &+ \text{c.c.}, \end{aligned} \quad (48)$$

$$\begin{aligned} S_{ij}^{(2)} &= -e_{ikp}[K(\omega)\gamma_{klmj}(2\omega; \omega, \omega)E_p^*(2\omega)E_m(\omega) + \\ &+ K(-2\omega)\gamma_{klmj}(-\omega; \omega, -2\omega)E_p(\omega)\,E_m^*(2\omega)]E_l(\omega) + \\ &+ \text{c.c.} \end{aligned} \quad (49)$$

Здесь $K(\omega) = 1/4$ и $K(-2\omega) = 1/2$ для прямого подхода, и $K(\omega) = K(-2\omega) = 1/3$ для подхода, основанного на предельном переходе. Используя формулы работы [27], полученные в случае невырожденных процессов, мы получили бы в формулах (45)–(49) неправильные значения $K(\omega) = 2/3$ и $K(-2\omega) = 1/3$. Помимо этого, в формулах (45), (47), а также в не содержащих $K(\omega)$ слагаемых правой части уравнения (48) появился бы не существующий в правильном равенстве коэффициент 2 перед компонентами тензора $\hat{\gamma}$, первый частотный аргумент которых равен $-\omega$.

В случае генерации третьей гармоники в среде с кубической нелинейностью $n = 3$, $\omega_{1,2,3} = \omega$, $\omega_4 = 3\omega$, т. е. $m = 1$, $F(\omega) = 3$, а $F(-3\omega) = 1$. В результате получаем

$$\begin{aligned} U^{(3,nloc)} &= \\ &= \{[1 - K(\omega)]\gamma_{ijlmk}(-\omega; \omega, \omega, -3\omega)E_i(\omega)\,\partial_k E_m^*(3\omega) + \\ &+ [1 - K(-3\omega)]\gamma_{ijlmk}(3\omega; \omega, \omega, \omega)E_i^*(3\omega) \times \\ &\times \partial_k E_m(\omega)\}E_j(\omega)E_l(\omega) + \text{c.c.}, \end{aligned} \quad (50)$$

$$\begin{aligned} S_k^{(3)} &= \\ &= c^{-1}[K(-3\omega)\gamma_{ijlmk}(3\omega; \omega, \omega, \omega)E_i^*(3\omega)\,\partial_t E_m(\omega) + \\ &+ K(\omega)\gamma_{ijlmk}(-\omega; \omega, \omega, -3\omega)E_i(\omega)\,\partial_t E_m^*(3\omega)] \times \\ &\times E_j(\omega)E_l(\omega) + \text{c.c.}, \end{aligned} \quad (51)$$

$$\begin{aligned} g_p^{(3,nloc)} &= \\ &= e_{pij}(\gamma_{ilmnk}(-\omega; \omega, \omega, -3\omega)B_j(\omega)\,\partial_k E_n^*(3\omega) + \\ &+ \gamma_{ilmnk}(3\omega; \omega, \omega, \omega)B_j^*(3\omega)\,\partial_k E_n(\omega)) \times \\ &\times E_l(\omega)E_m(\omega) + \text{c.c.}, \end{aligned} \quad (52)$$

$$\begin{aligned} G_{pk}^{(3,nloc)} &= \\ &= \{\delta_{pk}[K(\omega)\gamma_{ijlmn}(-\omega; \omega, \omega, -3\omega)E_i(\omega)\,\partial_n E_m^*(3\omega) + \\ &+ K(-3\omega)\gamma_{ijlmn}(3\omega; \omega, \omega, \omega)E_i^*(3\omega)\,\partial_n E_m(\omega)] - \\ &- [K(-3\omega)\gamma_{ijlmk}(3\omega; \omega, \omega, \omega)E_i^*(3\omega)\,\partial_p E_m(\omega) + \\ &+ K(\omega)\gamma_{ijlmk}E_i(\omega)\,\partial_p E_m^*(3\omega)] - \\ &- [\gamma_{kjlmn}(3\omega; \omega, \omega, \omega)E_p^*(3\omega)\,\partial_n E_m(\omega) + \\ &+ \gamma_{kjlmn}(-\omega; \omega, \omega, -3\omega)E_p(\omega)\,\partial_n E_m^*(3\omega)]\} \times \\ &\times E_j(\omega)E_l(\omega) + \text{c.c.}, \end{aligned} \quad (53)$$

$$\begin{aligned} S_{ij}^{(3)} &= -e_{ikp}[K(\omega)\gamma_{klmnj}(3\omega; \omega, \omega, \omega)E_p^*(3\omega)E_n(\omega) + \\ &+ K(-3\omega)\gamma_{klmnj}(-\omega; \omega, \omega, -3\omega)E_p(\omega)E_n^*(3\omega)] \times \\ &\times E_l(\omega)E_m(\omega) + \text{c.c.} \end{aligned} \quad (54)$$

В этих формулах

$$K(\omega) = 1/6 \quad \text{и} \quad K(-3\omega) = 1/2$$

при использовании прямого подхода и

$$K(\omega) = K(-3\omega) = 1/4$$

при использовании подхода, основанного на предельном переходе. Используя формулы работы [27], полученные в случае невырожденных процессов, мы получили бы в формулах (50)–(54) неправильные значения $K(\omega) = 3/4$ и $K(-3\omega) = 1/4$. Также в формулах (50), (52) и (53) появился бы несуществующий в правильном выражении коэффициент 3 перед слагаемыми, содержащими компоненты тензора $\hat{\gamma}$, у которых первый частотный аргумент равен $-\omega$.

Если происходит самовоздействие электромагнитной волны (процесс $\omega = -\omega + \omega + \omega$) в среде с кубической нелинейностью ($n = 3$), то частота $\omega_1 = -\omega$, а $\omega_{2,3,4} = \omega$. Формально можно считать, что взаимодействуют две волны с частотами ω и $-\omega$, и поэтому $m = 2$, а $F(\omega) = F(-\omega) = 2$. В этом случае формулы принимают вид

$$U^{(3,nloc)} = \frac{3}{4}\left[\gamma_{ijlmk}(\omega;-\omega,\omega,\omega)E_i^*(\omega)\,\partial_k E_m(\omega) + \right.$$
$$\left. + \gamma_{iljmk}(-\omega;\omega,-\omega,-\omega)E_i(\omega)\,\partial_k E_m^*(\omega)\right] \times$$
$$\times E_j^*(\omega)E_l(\omega), \quad (55)$$

$$S_k^{(3)} = \frac{1}{4c}\left[\gamma_{ijlmk}(\omega;-\omega,\omega,\omega)E_i^*(\omega)\,\partial_t E_m(\omega) + \right.$$
$$\left. + \gamma_{iljmk}(-\omega;\omega,-\omega,-\omega)E_i(\omega)\,\partial_t E_m^*(\omega)\right] \times$$
$$\times E_j^*(\omega)E_l(\omega), \quad (56)$$

$$g_p^{(3,nloc)} = e_{pij}\left[\gamma_{ilmnk}(\omega;-\omega,\omega,\omega)B_j^*(\omega)\,\partial_k E_n(\omega) + \right.$$
$$\left. + \gamma_{imlnk}(-\omega;\omega,-\omega,-\omega)B_j(\omega)\,\partial_k E_n^*(\omega)\right] \times$$
$$\times E_l^*(\omega)E_m(\omega), \quad (57)$$

$$G_{pk}^{(3,nloc)} =$$
$$= \left\{\frac{1}{4}\left[\delta_{pk}(\gamma_{ijlmn}(\omega;-\omega,\omega,\omega)E_i^*(\omega)\,\partial_n E_m^*(\omega) + \right.\right.$$
$$+ \gamma_{iljmn}(-\omega;\omega,-\omega,-\omega)E_i(\omega)\,\partial_n E_m^*(\omega)) -$$
$$- (\gamma_{ijlmk}(\omega;-\omega,\omega,\omega)E_i^*(\omega)\,\partial_p E_m(\omega) +$$
$$\left. + \gamma_{iljmk}(\omega;\omega,-\omega,-\omega)E_i(\omega)\,\partial_p E_m^*(\omega))\right] -$$
$$- \gamma_{kjlmn}(\omega;-\omega,\omega,\omega)E_p^*(\omega)\,\partial_n E_m(\omega) -$$
$$\left. - \gamma_{kljmn}(-\omega;\omega,-\omega,-\omega)E_p(\omega)\,\partial_n E_m^*(\omega)\right\} \times$$
$$\times E_j^*(\omega)E_l(\omega), \quad (58)$$

$$S_{ij}^{(3)} = -\frac{e_{ikp}}{4}\left[\gamma_{klmnj}(\omega;-\omega,\omega,\omega)\,E_p^*(\omega)E_n(\omega) + \right.$$
$$\left. + \gamma_{kmlnj}(-\omega;\omega,\,-\omega,\,-\omega)\,E_p(\omega)E_n^*(\omega)\right] \times$$
$$\times E_l^*(\omega)E_m(\omega). \quad (59)$$

При самофокусировке оба подхода приводят к одинаковым результатам. Отметим, что в этом процессе каждое из выражений автоматически является действительным и наличия комплексного сопряжения в формулах не требуется. Используя формулы [27], полученные в случае невырожденных процессов, мы получили бы в два раза большие величины, чем те, которые стоят в правых частях равенств (55)–(59).

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе получены аналитические выражения для добавок к плотности энергии, плотности потока энергии, плотности импульса, плотности потока импульса, компонентам плотности углового момента и компонентам тензора плотности потока углового момента, обусловленных локальным и нелокальным нелинейным оптическим откликом n-го порядка объема однородной непоглощающей среды в случае, когда реальное число взаимодействующих в ней волн с различными частотами меньше или равно n. Эти добавки не могут быть непосредственно определены из аналогичных им выражений, ранее полученных в случае нелинейного взаимодействия $n + 1$ волн с различными частотами в такой среде, если в них положить некоторые из частот равными друг другу, т. е. формально считать, что распространяется $n + 1$ волн, но частоты, амплитуды и волновые векторы некоторых из них полностью совпадают. Полученные в работе формулы могут использоваться не только теми, кто справедливо считает, что число взаимодействующих волн с различными частотами, участвующих в вырожденных нелинейных оптических процессах, меньше или равно n, но и теми, для кого вырожденный процесс получается как предельный переход от случая $n+1$ различных частот взаимодействующих волн, в результате которого некоторые из них кладутся равными друг другу, т. е. в среде формально распространяется $n + 1$ волн, но несколько из них полностью идентичны друг другу. Полученные в результате этих двух подходов два набора формул различаются лишь численными коэффициентами, значения которых определяются кратностями вырождения частот взаимодействующих волн и числом слагаемых во входящих в них суммах. Формулы, полученные в первом случае, имеют более сложный вид. Каждое слагаемое в них явным образом содержит кратность вырождения соответствующей частоты. Во втором случае аналитические выражения для фундаментальных характеристик поля оказываются внешне похожими на аналогичные формулы работ, в которых все $n+1$ частот взаимодействующих волн различны. Принципиальное различие полученных в работе формул проявляется в числе слагаемых в суммах, входящих в выражения для обусловленных нелинейностью среды добавок к характеристикам электромагнитного поля.

Найденные формулы для добавок к плотности энергии, плотности потока энергии, плотности импульса, плотности потока импульса, компонентам плотности углового момента и компонентам тензора плотности потока углового момента, обусловленных локальным и нелокальным нелинейным оптическим откликом объема однородной непоглощающей среды, позволяют записать их конкретный вид для всех вырожденных процессов нелинейной оптики.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика. Том 8. Электродинамика сплошных сред*, Физматлит, Москва (2005).

2. И. Н. Топтыгин, К. Левина, УФН **186**, 141 (2016).

3. I. Campos-Flores, J. L. Jiménez-Ramírez, and J. Roa-Neri, J. Electromagn. Anal. Appl. **9**, 203 (2017).

4. D. E. Soper, *Classical Field Theory*. Dover Publications, New York (2008).

5. S. M. Barnett, J. Opt. B: Quantum and Semiclassical Optics **4**, S7 (2002).

6. В. П. Макаров, А. А. Рухадзе, УФН **181**, 1357 (2011).

7. S. Stallinga, Phys. Rev. E **73**, 026606 (2006).

8. O. Yamashita, Optik **122**, 2119 (2011).

9. В. М. Агранович, В. Л. Гинзбург, *Кристаллооптика с учетом пространственной дисперсии и теория экситонов*, Наука, Москва (1965).

10. P. W. Milonni and R. W. Boyd, Adv. Opt. Photon. **2**, 519 (2010).

11. C. Heredia and J. Llosa, J. Phys. Commun. **5**, 055003 (2021).

12. R. Boyd, *Nonlinear Optics*. Elsevier, Amsterdam (2020).

13. S. Serulnik and Y. Ben-Aryeh, Quantum Optics: J. Europ. Opt. Soc. Part B **3**, 63 (1991).

14. G. Moe and W. Happer, J. Phys. B: Atomic and Molecular Physics **10**, 1191 (1977).

15. С. А. Ахманов, С. Ю. Никитин, *Физическая оптика*, Наука, Москва (2004).

16. S. M. Barnett, Phys. Rev. Lett. **104**, 070401 (2010)

17. A. Willner, H. Huang, Y. Yan et al., Adv. Opt. Photonics **7**, 66 (2015).

18. A. Trichili, C. Rosales-Guzmán, A. Dudley et al., Sci. Rep. **6**, 27674 (2016).

19. V. D'Ambrosio, E. Nagali, S. Walborn et al., Nature Commun. **3**, 961 (2012).

20. W. Brullot, M. Vanbel, T. Swusten et al., Science Advances **2**, e1501349 (2016).

21. P. Polimeno, A. Magazzù, M. Iatì et al., J. Quant. Spectr. Radiat. Trans. **218**, 131 (2018).

22. Y. Tian, L. Wang, and G. Duan, Opt. Commun. **485**, 126712 (2020).

23. M. Padgett and R. Bowman, Nature Photonics **5**, 343 (2011).

24. S. Franke-Arnold, L. Allen and M. Padgett, Laser and Photonics Rev. **2**, 299 (2008).

25. A. Yao and M. Padgett, Adv. Opt. Photonics **3**, 161 (2011).

26. M. Ritsch-Marte, Phil. Trans. Roy. Soc. A **375**, 20150437 (2017).

27. П. С. Рыжиков, В. А. Макаров, ЖЭТФ **162**, 45 (2022).

28. P. S. Ryzhikov and V. A. Makarov, Laser Phys. Lett. **19**, 115401 (2022).

29. Y. R. Shen, *Principles of Nonlinear Optics*, Wiley, New York (1984).

30. P. S. Ryzhikov and V. A. Makarov, Laser Phys. Lett. **20**, 105401 (2023).

31. S. V. Popov, Yu. P. Svirko, and N. I. Zheludev, *Susceptibility Tensors for Nonlinear Optics*. Taylor and Francis, New York (2015).

32. Y. P. Svirko and N. I. Zheludev, *Polarization of Light in Nonlinear Optics*. Wiley, New York (1998).

33. P. S. Ryzhikov and V. A. Makarov, Laser Phys. Lett. **19**, 035401 (2022).