ЖЭТФ, 2024, том 165, вып. 4, стр. 508–515

НЕЛОКАЛЬНЫЕ ГРАВИТАЦИОННЫЕ ТЕОРИИ И ИЗОБРАЖЕНИЯ ТЕНЕЙ ЧЕРНЫХ ДЫР

С.О. Алексеев [a,b*], *А.А. Байдерин* [b], *А.В. Немтинова* [c], *О.И. Зенин* [b]

[a] *Государственный астрономический институт им. П. К. Штернберга, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова 119234, Москва, Россия*

[b] *Кафедра квантовой теории и физики высоких энергий, физический факультет, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова 119234, Москва, Россия*

[c] *Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б. Н. Ельцина 620002, Екатеринбург, Россия*

Поступила в редакцию 28 ноября 2023 г.,
после переработки 4 декабря 2023 г.
Принята к публикации 4 декабря 2023 г.

С помощью метода Ньюмена – Яниса получено новое вращающееся решение «черная дыра» (ЧД) в гравитации с нелокальными поправками. Предложен способ учета поправок от квантовой гравитации при моделировании теней ЧД с использованием вращающихся метрик ЧД. Метод применим и для других нелокальных моделей с аналогичной структурой ЧД-решений. Показано, что в будущем при увеличении точности наблюдений и, следовательно, необходимости более точного их теоретического моделирования в некоторых случаях удобнее учитывать полевые и/или нелокальные поправки вместо введения новых полей.

DOI: 10.31857/S0044451024040059

1. ВВЕДЕНИЕ

Идея использования нелокальных членов в действии расширенных моделей гравитации обсуждается довольно продолжительное время [1]. Использование такого подхода дает еще одну возможность построить модель темной энергии. Нелокальные конструкции использовались, например, в моделях Рэндалл – Сандрума [2]. Отметим, что рассмотрение нелокальных членов позволило установить новые ограничения на гравитационные модели, используя данные физики высоких энергий [3]. Таким образом, нелокальные операторы появляются в эффективном действии квантовой гравитации:

$$\begin{aligned} L = R + c_1 R^2 + c_2 R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + c_3 R_{\mu\nu\alpha\beta} R^{\mu\nu\alpha\beta} + \\ + \alpha R \log \frac{\Box}{\mu^2} R + \beta R_{\mu\nu} \log \frac{\Box}{\mu^2} R^{\mu\nu} + \\ + \gamma R_{\mu\nu\alpha\beta} \log \frac{\Box}{\mu^2} R^{\mu\nu\alpha\beta}, \end{aligned} \tag{1}$$

где R — скаляр Риччи, $R_{\mu\nu}$ и $R_{\mu\nu\alpha\beta}$ — тензоры Риччи и Римана соответственно, c_i, α, β и γ — числовые коэффициенты, определенные в [4]. Решения вида «черная дыра» для действия (1) получено и имеет вид (в сигнатуре $(-,+,+,+)$)

$$ds^2 = -f_t dt^2 + f_r dr^2 + r^2 d\Omega^2, \tag{2}$$

где f_t, f_r — метрические функции,

$$f_t \simeq \left(1 - \frac{2G_n M}{r}\right) - \frac{\hat{\alpha}\hbar G_n^2 M}{r^3} + O(G_n^3),$$

$$f_r \simeq \left(1 - \frac{2G_n M}{r}\right)^{-1} - \frac{\hat{\beta}\hbar G_n^2 M}{r^3} + O(G_n^3).$$

Величины $\hat{\alpha}$ и $\hat{\beta}$ — это линейные комбинации калибровочных коэффициентов из табл. 1 в работе [4], M — масса черной дыры (ЧД), G_n — эффективная гравитационная постоянная.

* E-mail: alexeyev@physics.msu.ru

Подчеркнем несколько важных моментов. Структура нелокальных действий в разных теориях может иметь похожий вид, поэтому и их ЧД-решения будут аналогичны. Наиболее перспективным и хорошо разработанным решением подобного типа является уравнение (2). Особенность его в наличии комбинаций вида G_nM, т. е. масса ЧД M умножается на квантовый коэффициент G_n. С учетом реальной массы Sgr A* разница между этими двумя величинами составит по порядку величины 10^{44}, поэтому влияние нелокальной части будет исчезающе малым. Однако продолжение моделирования теней черных дыр важно для того, чтобы а) разработать модельно-независимый подход к учету эффектов квантовой гравитации; б) найти способ учета нелокальных членов для действий аналогичной структуры, но с коэффициентами другого порядка, чтобы применять предложенную схему для теоретического моделирования теней ЧД с дополнительными степенями свободы без добавления новых полей. Аналогично простая оценка применимости метрики (2) со значениями из [4] для описания ускоренного расширения Вселенной (для расчета радиуса разворота [5]) дает отрицательный результат по той же причине, о которой говорилось выше: малости вклада поправок.

Далее, как легко видеть из уравнения (2), ЧД сферически-симметрична, содержит следующие степени разложения. Поскольку изображения теней ЧД при увеличении точности способны дать дополнительную информацию и о структуре теории гравитации (например, о «приливном заряде» [6–11]), представляется интересным использовать последние результаты проекта Event Horizon Telescope (EHT) [12]. Важно, что оба объекта, полученные на EHT, представляют собой вращающиеся ЧД. Между тем обсуждаемая нами метрика из [4] представляет собой невращающуюся ЧД. Таким образом, чтобы повысить точность теоретических предсказаний, необходимо получить решение керровского типа на основе существующего, а после использовать для моделирования полученную метрику керровского типа.

Для выполнения заявленной программы статья построена следующим образом. Раздел 2 посвящен получению вращающейся метрики, в разд. 3 мы обсуждаем особенности теней для вращающихся метрик, в разд. 4 изложены результаты нашего моделирования теней черных дыр в рамках метрики (2) с вращением, в разд. 5 проведено сравнение наших результатов для Sgr A* с полученными от Event Horizon Telescope, а разд. 6 содержит обсуждение полученных результатов и выводы.

2. ПОЛУЧЕНИЕ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ РЕШЕНИЯ

2.1. Использование метода Ньюмена – Яниса

Для получения вращающейся версии метрики черной дыры часто используют алгоритм [11, 13], рассматривающий вращающийся случай как обобщение невращающегося и названный алгоритмом Ньюмена – Яниса [14]. Следуя алгоритму, в качестве первого шага метрику необходимо представить в координатах Эддингтона – Финкельштейна (u, r, θ, ϕ), используя преобразование

$$dt = \sqrt{\frac{f_r}{f_t}}du + dr. \tag{3}$$

Тогда метрику (2) можно переписать как

$$ds^2 = -f_t du^2 - 2\sqrt{f_r f_t}dudr + r^2 d\Omega^2. \tag{4}$$

Далее, вводим комплексную тетраду

$$e^a = (l^\mu, n^\mu, m^\mu, m^{*\mu}).$$

Условия для тетрады задаем в виде

$$\eta^{ab} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

и далее

$$\begin{aligned} l^\mu &= \delta^\mu_r, \\ n^\mu &= \sqrt{\frac{1}{f_r f_t}}\delta^\mu_u - \frac{1}{2f_r}\delta^\mu_r, \\ m^\mu &= \sqrt{\frac{1}{2r^2}}\left(\delta^\mu_\theta + \frac{i}{\sin\theta}\delta^\mu_\phi\right), \\ m^{*\mu} &= \sqrt{\frac{1}{2r^2}}\left(\delta^\mu_\theta - \frac{i}{\sin\theta}\delta^\mu_\phi\right). \end{aligned}$$

Для включения в рассмотрение вращения вводим комплексное преобразование в виде

$$\begin{aligned} r \to r' &= r - ia\cos\theta, \\ u \to u' &= u + ia\cos\theta, \end{aligned}$$

где a — угловой момент. После применения преобразования функции f_t, f_r и квадрат радиальной координаты r^2 примут вид

$$f_r \to \tilde{F}_r(r,\theta,a), \tag{6}$$

$$\lim_{a\to 0} \tilde{F}_r(r,\theta,a) = f_r, \tag{7}$$

$$f_t \to \tilde{F}_t(r,\theta,a), \tag{8}$$

$$\lim_{a\to 0} \tilde{F}_t(r,\theta,a) = f_t, \tag{9}$$

$$r^2 \to \rho^2 = r^2 + a^2\cos^2\theta. \tag{10}$$

Следуя рассуждениям [15], необходимо заметить, что преобразования (6)–(9) не являются полностью однозначными, необходимы дополнительные условия. Обычно полагают, что $g_{rt} = g_{r\phi} = 0$. Тогда преобразованная тетрада примет вид

$$l^{\mu\prime} = \delta^\mu_{r'}, \tag{11}$$

$$n^{\mu\prime} = \sqrt{\frac{1}{\tilde{F}_r\tilde{F}_t}}\delta^\mu_{u'} - \frac{1}{2f_r}\delta^\mu_{r'}, \tag{12}$$

$$m^{\mu\prime} = \sqrt{\frac{1}{2\rho^2}}\left(\delta^\mu_\theta + ia\sin\theta(\delta^\mu_{u'} - \delta^\mu_{r'}) + \frac{i}{\sin\theta}\delta^\mu_\phi\right). \tag{13}$$

Используя уравнения (5) и (11)–(13), получим метрику с учетом вращения:

$$\begin{aligned} ds^2 = & -\tilde{F}_t du^2 - 2\sqrt{\tilde{F}_r\tilde{F}_t}dudr + \rho^2 d\theta^2 - \\ & - 2a\sin^2\theta(\sqrt{\tilde{F}_r\tilde{F}_t} - \tilde{F}_t)dud\phi + \\ & + 2a\sin^2\theta\sqrt{\tilde{F}_r\tilde{F}_t}drd\phi + \\ & + \sin^2\theta\left(\rho^2 + a^2\sin^2\theta(2\sqrt{\tilde{F}_r\tilde{F}_t} - \tilde{F}_t)\right)d\phi^2. \end{aligned} \tag{14}$$

На последнем шаге необходимо использовать преобразование координат

$$\begin{aligned} du &= dt + \chi_1(r)dr, \\ d\phi &= d\varphi + \chi_2(r)dr. \end{aligned} \tag{15}$$

Следуя [15], берем $\chi_1(r)$ и $\chi_2(r)$ в виде

$$\chi_1 = -\frac{f_r(\omega + a^2)}{r^2 + a^2 f_r}, \tag{16}$$

$$\chi_2 = -\frac{f_r a}{r^2 + a^2 f_r}, \tag{17}$$

$$\omega = r^2\sqrt{\frac{1}{f_r f_t}}. \tag{18}$$

Таким образом, окончательный вид метрики керровского типа для обсуждаемой теории имеет вид

$$\begin{aligned} g^{tt} &= -\frac{1}{\rho^2}\left[\frac{(\omega + a^2)^2}{(f_r^{-1}r^2 + a^2)} - a^2\sin^2\theta\right], \\ g^{t\phi} &= -\frac{1}{\rho^2}\left[\frac{(\omega + a^2)a}{(f_r^{-1}r^2 + a^2)} - a\right], \\ g^{\phi\phi} &= -\frac{1}{\rho^2}\left[\frac{a^2}{(f_r^{-1}r^2 + a^2)} - \frac{1}{\sin^2\theta}\right], \\ g^{\theta\theta} &= \frac{1}{\rho^2}, \quad g^{rr} = \frac{f_r^{-1}r^2 + a^2}{\rho^2}. \end{aligned} \tag{19}$$

Здесь

$$\begin{aligned} \rho^2 &= r^2 + a^2\cos^2\theta, \\ f_s &= 1 - \frac{2MG_n}{r}, \\ f_{ex} &= \frac{\hbar G_n^2 M}{r^3}, \\ \omega &= r^2\left(1 + \frac{(\hat{\alpha} + \hat{\beta})f_{ex}}{2}\right). \end{aligned}$$

2.2. Уравнение Гамильтона – Якоби

Для уравнений траекторий фотонов в окрестности вращающейся черной дыры необходим вид функций $S_r(r)$ и $S_\theta(\theta)$ из уравнения Гамильтона – Якоби. В случае изотропных геодезических это уравнение примет вид

$$g^{\mu\nu}\frac{\partial S}{\partial x^\mu}\frac{\partial S}{\partial x^\nu} = 0. \tag{20}$$

Так как полученная метрика не имеет явной зависимости от координат t и ϕ, существуют две сохраняющиеся величины: $E = -p_t$ и $L_z = p_\phi$ (энергия и угловой момент фотона относительно оси симметрии). Поэтому для разделения переменных ищем решение в виде

$$S = -Et + L_z\phi + S_r(r) + S_\theta(\theta). \tag{21}$$

Из уравнения (20) легко видеть, что уравнения для p_r и p_θ разделяются:

$$\frac{\rho^4(\dot{r})^2}{E^2} = \mathcal{R}(r), \tag{22}$$

$$\frac{\rho^4(\dot{\theta})^2}{E^2} = \Theta(\theta), \tag{23}$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(r) &= \left(\omega + a^2 - a\lambda\right)^2 - (f_r^{-1}r^2 + a^2)\left[\eta + (a-\lambda)^2\right], \\ \Theta(\theta) &= \eta + \cos^2\theta\left(a^2 - \frac{\lambda}{\sin^2\theta}\right). \end{aligned} \tag{24}$$

Здесь $\eta = Q/E^2$, $\lambda = L_z/E$, Q — картеровская постоянная разделения.

Для вычисления сферической орбиты фотона необходимо решить уравнения

$$\mathcal{R} = 0, \tag{25}$$

$$\frac{d\mathcal{R}}{dr} = 0. \tag{26}$$

Подставляя уравнение (24) в (25) и (26), находим решение для λ и η в виде

$$\lambda = \frac{\omega + a^2}{a} - \frac{2\omega'}{a}\frac{(f_r^{-1}r^2 + a^2)}{(f_r^{-1}r^2)'}, \tag{27}$$

$$\eta = \frac{4(f_r^{-1}r^2 + a^2)}{(f_r^{-1}r^2)'^2}\omega'^2 - \frac{1}{a^2}\left[\omega - \frac{2(f_r^{-1}r^2 + a^2)}{(f_r^{-1}r^2)'}\omega'\right]^2,$$

где штрихами обозначены производные по r. Наконец, рассматривая плоскость, перпендикулярную направлению к удаленному наблюдателю, координаты тени можно записать как

$$x' = -\frac{\lambda}{\sin\theta_0}, \tag{28}$$

$$y' = \pm\sqrt{\eta + a^2\cos^2\theta_0 - \frac{\lambda^2}{\operatorname{tg}^2\theta_0}}, \tag{29}$$

где θ_0 — телесный угол между плоскостью вращения черной дыры и лучом зрения наблюдателя.

3. МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕНИ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ЧЕРНОЙ ДЫРЫ: ОСОБЕННОСТИ УЧЕТА ВРАЩЕНИЯ

С использованием языка Python проведено численное моделирование тени для метрики черной дыры (19). С помощью выражений (28) и (29) рассчитывались координаты X и Y на картинной плоскости. Метрика (19) использовалась с различными значениями как параметра вращения a, так и поправочных коэффициентов α и β.

Как показано ранее [16], тень вращающейся черной дыры обладает следующими признаками.

1. Горизонтальное смещение. Смещение тени вдоль положительной оси x может быть найдено с помощью выражения

$$D = \frac{x_{min} + x_{max}}{2}, \tag{30}$$

где x_{min} и x_{max} — минимальное и максимальное значения координаты x тени ЧД.

2. Асимметрия. При больших значениях параметра вращения a появляется асимметрия тени [11]: горизонтальный диаметр становится меньше вертикального, который остается примерно постоянным. Таким образом, мерой асимметрии является горизонтальный диаметр тени:

$$\Delta x = x_{max} - x_{min}, \tag{31}$$

где x_{max} и x_{min} — минимальная и максимальная координаты x.

3. Диаметры. Обозначаем горизонтальный диаметр как

$$\Delta x = x_{max} - x_{min} = x_R - x_L, \tag{32}$$

где введены обозначения L и R для крайней левой и крайней правой точек края тени. Аналогично определяем вертикальный диаметр:

$$\Delta y = y_{max} - y_{min} = y_T - y_B = 2y_T, \tag{33}$$

где B и T — нижняя и верхняя точки края тени. Из-за симметрии тени $y_B = y_T$, и на рис. 1 a показана связь между Δy, Δx и точками R, L, T и B.

4. Круговая аппроксимация. Поскольку тень является почти круглой, в работе [17] предложено использовать точки T, R, B как точки, лежащие на окружности. Первой наблюдаемой величиной является радиус тени r_s. В качестве второй наблюдаемой величины вводим параметр искажения

$$\delta_{cs} = \Delta_{cs}/r_s, \tag{34}$$

где Δ_{cs} — расстояние от окружности до точки L на тени (показано на рис. 1 b).

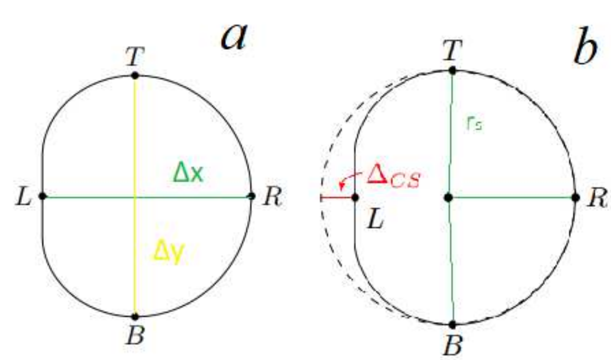

Рис. 1. Предельные значения тени R, L, T и B, а также диаметры тени Δx и Δy (a). Наблюдаемые r_s и Δ_{cs}, полученные из окружности, проведенной через точки T, R и B (b)

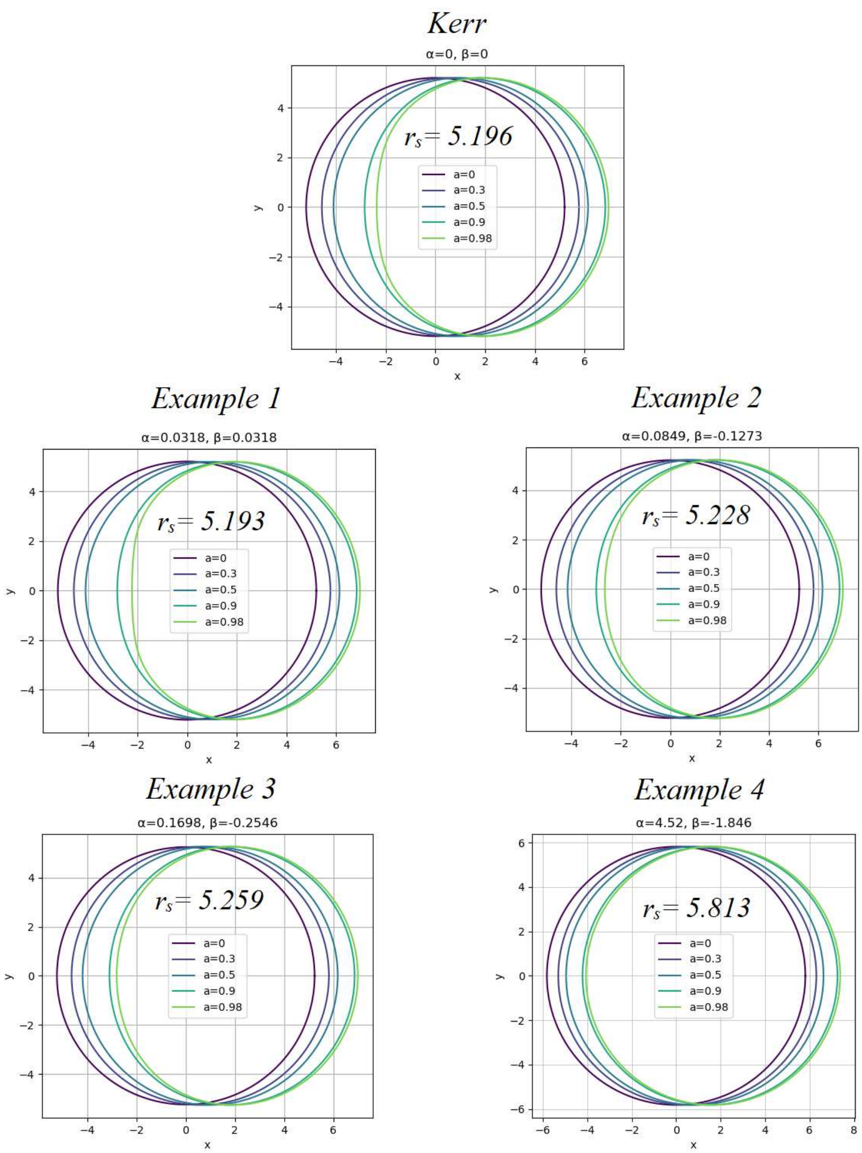

Рис. 2. Профили тени черной дыры при различных a для случая метрики Керра и различных фиксированных полей при угле наклона плоскости вращения $\theta_0 = \pi/2$

4. МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕНИ ЧЕРНОЙ ДЫРЫ ДЛЯ МЕТРИКИ (19)

После нескольких предварительных замечаний можно приступить к расчету зависимости размера тени от α и β. Применяя гравитационные поправки к метрике стабильной звезды, удовлетворяющей уравнению Толмена – Оппенгеймера – Волкова [18], мы вводим новые переменные $\alpha = \hat{\alpha}$ и $\beta = \hat{\beta}$, которые являются модельно-независимыми.

Необходимо отметить, что в качестве примеров мы используем значения коэффициентов из [4]. Таким образом, получены изображения теней ЧД для $M = 1$[1)] и различных значений a для метрики Керра и ее расширения, определенные в [18] (в скалярном поле $\xi = 1/3$), см. рис. 2. Угол плоскости вращения равен $\theta_0 = \pi/2$. Заметим две основные особенности: во-первых, тень смещается от оси симметрии с увеличением a и, во-вторых, тень становится асимметричной вдоль направления x для больших значений a. Обе особенности исчезают при $a \to 0$, когда круглая тень для метрики Шварцшильда восстанавливается. Также заметим, что при угле $\theta_0 = \pi/2$ размер

[1)] Поскольку в реальном случае $M = 10^{44}$, эффект исчезает, как было указано во Введении.

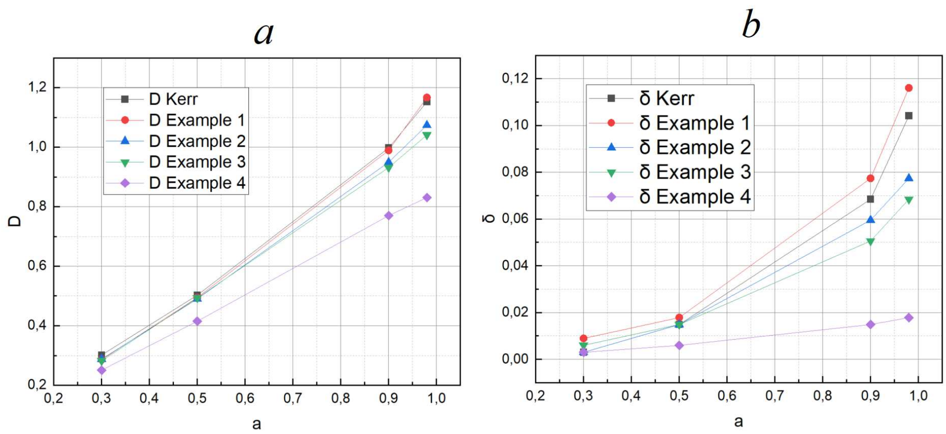

Рис. 3. Зависимости смещения D (a) и параметра искажения δ (b) от параметра вращения a для случая метрики Керра и различных фиксированных полей при угле наклона плоскости вращения $\theta_0 = \pi/2$

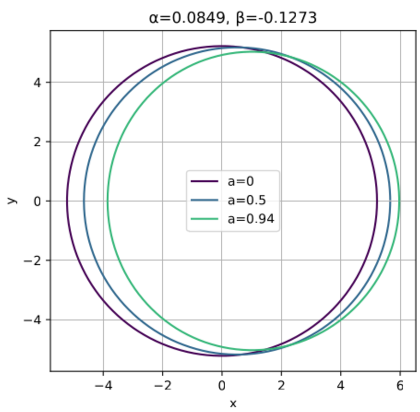

Рис. 4. Профили тени черной дыры при различных a для случая поля примера 2 при угле наклона плоскости вращения $\theta_0 = \pi/6$ (Sgr A*)

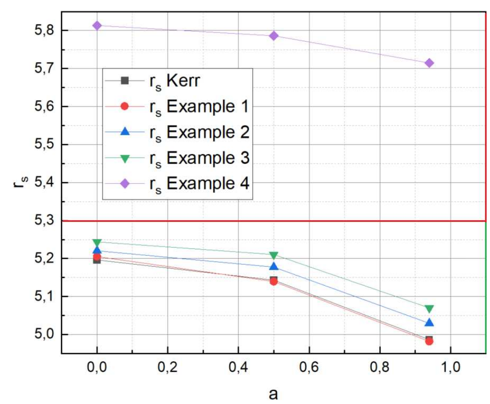

Рис. 5. Зависимости размера тени r_s от параметра вращения a для случая метрики Керра и различных фиксированных полей при угле наклона плоскости вращения $\theta_0 = \pi/6$ (Sgr A*). Красной линией выделена область, которая противоречит результатам наблюдения Sgr A*, зеленой — разрешенная

тени не меняется из-за вращения (поскольку вертикальный диаметр остается неизменным).

По результатам моделирования теней черных дыр были получены значения эффективных радиусов теней r_s (см. таблицу).

Таблица. Значения параметров α и β, а также эффективных радиусов теней r_s

Тип решения	α	β	r_s
Керр	0	0	5.196
Пример 1	0.0318	0.0318	5.193
Пример 2	0.0849	-0.1273	5.228
Пример 3	0.1698	-0.2546	5.259
Пример 4	4.52	-1.846	5.813

Поскольку EHT были получены ограничения на размер тени черной дыры ($4.3M < r_s < 5.3M$) [19], можно отбросить последний вариант в таблице (пример 4).

Перейдем к детальному анализу изображений теней вращающихся черных дыр, а именно смещения D и параметра искажения δ. На рис. 3 a показаны зависимости смещения D от параметра вращения a во всех обсуждаемых ранее случаях: с увеличением модуля значений параметров α и β смещение становится меньше (единственное исключение — это сильное вращение $a = 0.98$ и значение для случая примера 1, что, скорее всего, связано с тем, что коэффициент β в данном случае положителен, а в остальных случаях отрицателен). Также в случае больших зна-

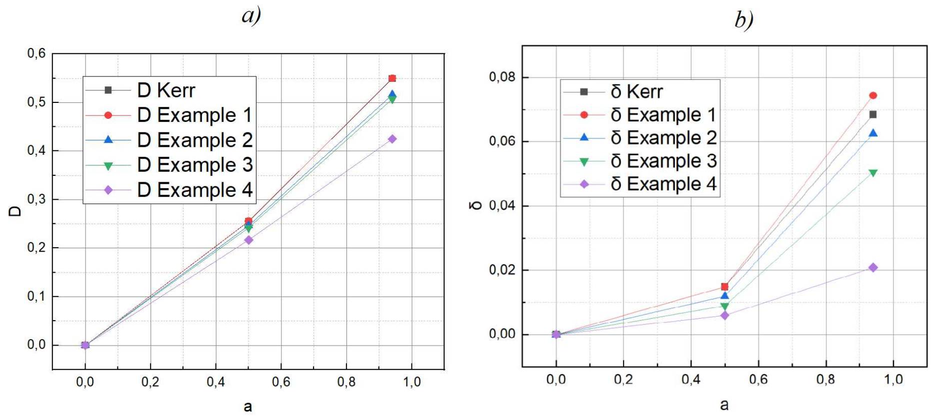

Рис. 6. Зависимости смещения D (a) и параметра искажения δ (b) от параметра вращения a для случая метрики Керра и различных фиксированных полей при угле наклона плоскости вращения $\theta_0 = \pi/6$ (Sgr A*)

чений модуля коэффициентов α и β смещение линейно зависит от параметра вращения a. Однако на практике данный параметр невозможно определить корректно, поскольку нет информации о точном начале координат для данной метрики. Теперь перейдем к параметру искажения δ (рис. 3 b). Больше всего тень отличается от сферической формы в случае примера 1. При этом в случае примера 4 при больших модулях α и β тень даже при больших значениях параметра вращения a остается практически сферически-симметричной.

5. ОГРАНИЧЕНИЯ ОТ РЕЗУЛЬТАТОВ НАБЛЮДЕНИЙ SGR A*

Теперь перейдем непосредственно к сравнению с результатами фотографирования черной дыры Sgr A*. В [19] показано, что наиболее вероятные значения параметра вращения a — это 0.5 и 0.94. Эти предположения оказались возможны, поскольку Sgr A* находится в нашей галактике и удалось получить данные по орбитам звезд вокруг этой ЧД. На рис. 4 показаны профили теней черной дыры Sgr A* из данных EHT (наклон плоскости вращения $\theta_0 = \pi/6$, значения параметра вращения a равны 0.5 и 0.94). Также, для сравнения, показан случай с $a = 0$. Как можно заключить из профилей теней, в случае данного угла наклона форма тени искажается незначительно, но при этом радиус тени меняется. Начнем с анализа размера тени ЧД (рис. 5). В отличие от случая $\theta_0 = \pi/2$, при $\theta_0 = \pi/6$ размер тени зависит от параметра вращения a. Как следует из графика, ограничения EHT проходят все поля (зеленая область), кроме поля из примера 4 (уже в красной области). Теперь перейдем к смещению D (рис. 6 a). Заключаем, что смещение значительно меньше, чем в рассмотренном в разд. 4 случае. Что касается параметра искажения δ (рис. 6 b), максимальное искажение получится при $a = 0.94$ и равно около 5–8% (кроме случая примера 4). При этом при параметре вращения $a = 0.5$ искажение составит около 1.5%.

6. ОБСУЖДЕНИЕ И ВЫВОДЫ

В данной работе с помощью алгоритма Ньюмена – Яниса было получено вращающееся решение для модели квантовой гравитации с действием (1). Проведено моделирование тени ЧД для вращающейся метрики для чисто квазикерровского случая и с учетом дополнительных полей в пределе $M = 1$. Для более наглядного представления результатов выбран угол $\theta_0 = 90°$, поскольку в этом случае тень больше деформируется при сильном вращении. Из ограничений на размер тени [12] отброшен случай примера 4 ($r_s = 5.813$ при максимально разрешенном 5.3). Также показано, что при больших значениях a при всех возможных полях, кроме примера 4 (который уже отброшен), тень черной дыры сильно деформируется. Для метрики типа Керра и примера 1 деформация составляет около 10–11%, а для примера 2 и примера 3 — 5–8%. Для фиксации этой деформации требуется гораздо меньшее разрешение, чем для фиксации изменения размера тени из-за поправок второго и третьего порядков, как было показано ранее [6–10]. В обсуждаемом приближении $M = 1$ поправки и вращение вносят противоположные друг другу вклады и, следовательно, могут компенсировать друг друга. Таким образом, в будущем при повышении точности наблюдений и, следовательно, теоретического воспроизведения новых результатов можно было бы учитывать нелокальные члены (если они имеют порядок, приближающийся к массе ЧД) вместо введения новых полей.

С помощью результатов EHT [19] показано, что наиболее вероятный угол наклона для Sgr A* составляет $\theta_0 = 30^\circ$, а наиболее вероятные значения a — это 0.5 и 0.94. Нами показано, что в упомянутом случае (в гипотетическом случае $M = 1$) тень деформируется несущественно. При $a = 0.94$ деформация составит около 5–8% (кроме примера 4), а при $a = 0.5$ — около 1.5%. Поэтому при дальнейшем улучшении разрешающей способности можно будет точно определить параметры вращения Sgr A*. Также при данном наклоне плоскости вращения размер тени зависит от параметра вращения a, что также поможет определить его значение при лучшей точности наблюдений.

В итоге нами предложен алгоритм учета нелокальных гравитационных эффектов при моделировании теней ЧД. Алгоритм не зависит от ультрафиолетового предела теории квантовой гравитации и может быть легко масштабирован на другие нелокальные теории.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант №23-22-00073).

ЛИТЕРАТУРА

1. А. О. Барвинский, УФН **175**, 569 (2005).

2. Е. Е. Боос, В. Е. Буничев, И. П. Волобуев, М. Н. Смоляков, ЭЧАЯ **43**, 1 (2012).

3. S. Alexeyev, X. Calmet, and B. Latosh, Phys. Lett. B **776**, 111 (2018).

4. X. Calmet, R. Casadio, and F. Kuipers, Phys. Rev. D **100**, 086010 (2019).

5. С. О. Алексеев, Б. Н. Латош, В. А. Ечеистов, ЖЭТФ **152**, 1271 (2017).

6. A. Zakharov, Phys. Rev. D **90**, 062007 (2014).

7. С. О. Алексеев, Д. А. Стародубцева, ЖЭТФ **138**, 652 (2010).

8. В. А. Прокопов, С. О. Алексеев, О. И. Зенин, ЖЭТФ **162**, 108 (2022).

9. В. А. Прокопов, С. О. Алексеев, О. И. Зенин, ЖЭТФ **162**, 878 (2022).

10. S. Alexeyev and V. Prokopov, Universe **8**, 283 (2022).

11. С. О. Алексеев, В. А. Прокопов, ЖЭТФ **157**, 796 (2020).

12. The Event Horizon Telescope Collaboration, Astrophys. J. Lett. **930**, L13 (2022).

13. H. Erbin, Universe **3**, 19 (2017).

14. E. T. Newman and A. I. Janis, J. Math. Phys. **6**, 915 (1965).

15. H. C. D. Lima Jun., L. C. B. Crispino, P. V. P. Cunha, and C. A. R. Herdeiro, Eur. Phys. J. C **80**, 1036 (2020).

16. H. Kenta and K. Maeda, Phys. Rev. D **80**, 024042 (2009).

17. K. Hioki and Kei-ichi Maeda, Phys. Rev. D **80**, 024042 (2009).

18. X. Calmet and B. K. El-Menoufi, Eur. Phys. J. C **77**, 243 (2017).

19. The Event Horizon Telescope Collaboration, Astrophys. J. Lett. **930**, L17 (2022).