

# ЭВОЛЮЦИЯ СВОЙСТВ ОПЕРАТОРОВ ФАЗЫ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В МОДЕЛЯХ РАБИ И ДЖЕЙНСА – КАММИНГСА

*А. В. Козловский\**

*Физический институт им. П. Н. Лебедева Российской академии наук  
119234, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 23 ноября 2023 г.,  
после переработки 21 декабря 2023 г.  
Принята к публикации 26 декабря 2023 г.

Исследована эволюция во времени средних значений и дисперсий тригонометрических функций оператора фазы квантового электромагнитного поля, взаимодействующего с двухуровневым атомом. Рассмотрено поле с малым числом фотонов для различных начальных квантовых состояний поля и атома в рамках теории эрмитова оператора фазы Пегга – Барнетта. Исследовано различие эволюции операторов фазы, следующей из теории Джейнса – Каммингса и модели Раби в условиях ультрасильной связи атома с полем. Показано качественное отличие результатов приближенной модели Джейнса – Каммингса от результатов модели Раби в случае ультрасильной связи атома с полем для микроскопических полей с числом фотонов  $\langle n \rangle \sim 1$  для фоковских и когерентных начальных квантовых состояний поля и любых начальных состояний атома. Показано, что в случае когерентного начального состояния поля с большими  $\langle n \rangle > 10$  в условиях ультрасильной связи для эволюции средних и дисперсий операторов фазы поля характерен ярко выраженный квантовый эффект коллапса и возрождения средних и дисперсий этих величин.

DOI: 10.31857/S004445102405002X

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Основным фундаментальным физическим процессом, исследуемым в области квантовой оптики, является динамика взаимодействия атома/молекулы с квантовомеханическим электромагнитным полем. При исследованиях таких процессов важными изучаемыми (рассчитываемыми или измеряемыми) физическими величинами являются средние квантовомеханические значения населенностей квантовых состояний атома (уровней энергии) и их флуктуации (дисперсии), а также средние значения и флуктуации разностей населенностей рассматриваемых состояний атома или молекулы. Другими фундаментальными величинами, характеризующими систему атомов и электромагнитных полей, являются средние значения амплитуды поля и их квантовые флуктуации. Величина комплекснозначной амплитуды поля (средние квантовомеханические значения неэрмитовых операторов

рождения/уничтожения электромагнитного поля) описывается в квантовой теории света с помощью эрмитовых операторов числа фотонов, а также с помощью эрмитовых операторов фазы тригонометрических функций операторов фазы (ТФОФ) электромагнитного поля, обладающих действительными средними значениями и являющихся, таким образом, непосредственно измеряемыми наблюдаемыми величинами.

Эволюция (изменение во времени) квантовомеханического вектора состояния системы атом + поле  $|\Psi(t)\rangle$  может быть найдена для любого начального состояния системы  $|\Psi(t=0)\rangle$  путем решения уравнения Шредингера в модели Раби. Модель Раби в дипольном приближении для двухуровневого атома учитывает как реальные переходы атома с излучением или поглощением фотонов поля, так и виртуальные процессы, означающие излучение фотона, сопровождающееся возбуждением атома, а также поглощение фотона, сопровождаемое переходом атома в нижнее энергетическое состояние [1–4]. Широко используемой приближенной теорией, основанной на модели Раби (МР), является модель Джейнса – Каммингса (МДК), в рам-

\* E-mail: kozlovskiyav@lebedev.ru

ках которой в гамильтониане взаимодействия атома с полем пренебрегается членами, ответственными за виртуальные процессы. Модель Джейнса – Каммингса (приближение вращающейся волны (RWA)) положена в основу квантовой теории лазера. Как показали расчеты [5–17], применимость МДК ограничивается случаем малости величины константы взаимодействия атома с полем по сравнению с частотой поля. Предсказания МДК и МР для средних и дисперсий числа фотонов и населенностей атомных уровней совпадают между собой лишь в случае, когда абсолютная величина константы взаимодействия  $|g| < 10^{-2}\omega_f$ , где  $\omega_f$  — частота поля.

В настоящее время в ряде экспериментальных работ [1–4] показана возможность создания «искусственного двухуровневого атома», обладающего величиной константы взаимодействия атома с полем  $\tilde{g} \equiv |g|/\omega_f \sim 1$ , т. е. значениями, характерными для ультрасильной связи (УСС) атома с полем. В таких условиях, как показано в теоретических работах [5–17], МДК для динамики среднего числа фотонов и населенностей состояний атома перестает быть справедливой.

В данной работе нами проведены исследования эволюции средних квантовомеханических величин для ТФОФ в условиях УСС и проведено сравнение эволюции средних величин и квантовых флуктуаций этих операторов для различных начальных квантовых состояний электромагнитного поля и двухуровневого атома для МР и МДК.

Рассмотрен случай микроскопических полей с малым числом фотонов, т. е. полей, используемых в настоящее время в экспериментах, связанных с квантовой информацией и квантовым компьютером.

## 2. ОПЕРАТОРЫ ФАЗЫ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В ПРОИЗВОЛЬНОМ КВАНТОВОМ СОСТОЯНИИ

В работах [18, 19] Пеггом и Барнеттом рассмотрено решение уравнений на собственные функции фазовой переменной в дискретном спектре собственных значений фазы. Расчеты показали, что собственные векторы  $|\theta_m\rangle$  операторов фазы поля, рассматриваемые в конечномерном базисе фоковских состояний, для собственных значений фазы

$$\theta_m = \theta_0 + \frac{2\pi m}{S+1}, \quad m = 0, 1, \dots, S, \quad (1)$$

где  $S+1$  — неограниченно большая, но конечная размерность базиса фоковских состояний,  $\theta_0$  — произвольное число, определяющее интервал изменения

собственных значений фазы ( $\theta_0 \leq \theta_m \leq \theta_0 + 2\pi$ ), составляют полный ортонормированный базис векторов состояний. В работах [18–20] предложено рассматривать дискретный базис собственных векторов состояний фазы в  $(S+1)$ -мерном подпространстве фоковских состояний для собственных значений (5) в виде

$$|\theta_m\rangle = \frac{1}{\sqrt{S+1}} \sum_{n=0}^S e^{in\theta_m} |n\rangle. \quad (2)$$

Эрмитов оператор фазы  $\hat{\varphi}_\theta$  с собственными значениями  $\theta_m$  при этом определяется согласно

$$\hat{\varphi}_\theta = \sum_{m=0}^S \theta_m |\theta_m\rangle \langle \theta_m|, \quad \hat{\varphi}_\theta |\theta_m\rangle = \theta_m |\theta_m\rangle. \quad (3)$$

Важной особенностью оператора фазы  $\hat{\varphi}_\theta$ , определяемого согласно (1)–(3), является то, что результаты расчетов средних значений и дисперсий фазы поля качественно зависят от выбора параметра  $\theta_0$ . За исключением фоковских  $|n\rangle$  и собственных состояний поля оператора фазы  $|\theta_m\rangle$ , для которых средние и дисперсии не зависят от  $\theta_0$ , только правильный выбор значения параметра  $\theta_0$  обеспечивает получение физически осмысленных результатов при расчете этих средних величин. Таким образом, в данной теории вид оператора фазы поля зависит от рассматриваемого квантового состояния поля. В то же время, как показано в [18–21], ТФОФ поля (3) имеют вид

$$\cos \hat{\varphi}_\theta = \frac{e^{i\hat{\varphi}_\theta} + e^{-i\hat{\varphi}_\theta}}{2}, \quad \sin \hat{\varphi}_\theta = \frac{e^{i\hat{\varphi}_\theta} - e^{-i\hat{\varphi}_\theta}}{2i}$$

и могут быть записаны с помощью соотношений

$$\begin{aligned} e^{i\hat{\varphi}_\theta} &= \sum_{n=1}^S |n-1\rangle \langle n| + e^{i(S+1)\theta_0} |S\rangle \langle 0|, \\ e^{-i\hat{\varphi}_\theta} &= \sum_{n=1}^S |n\rangle \langle n-1| + e^{-i(S+1)\theta_0} |0\rangle \langle S|, \end{aligned} \quad (4)$$

при этом средние значения ТФОФ  $\cos \hat{\varphi}_\theta$  и  $\sin \hat{\varphi}_\theta$  не зависят от параметра  $\theta_0$  и, следовательно, не зависят от рассматриваемого конкретного квантового состояния поля. Также не зависят от  $\theta_0$  и дисперсии эрмитовых ТФОФ поля.

## 3. МОДЕЛИ РАБИ И ДЖЕЙНСА – КАММИНГСА ДИПОЛЬНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДВУХУРОВНЕВОГО АТОМА С ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМ ПОЛЕМ

Рассмотрим операторы рождения (уничтожения)  $\hat{a}^\dagger$  ( $\hat{a}$ ) электромагнитного поля, удовлетворяющие следующим коммутационным соотношениям:

$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ , и оператор числа фотонов, который определяется с помощью таких операторов согласно  $\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ .

В случае дипольного взаимодействия атома с полем гамильтониан такой системы в квантовой теории может быть записан в виде (гамильтониан МР для двухуровневого атома, взаимодействующего с одномодовым электромагнитным полем)

$$\hat{H} = \hbar\omega_f \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{\hat{\sigma}^z}{2} \hbar\omega_a + \hbar\hat{V}, \quad (5)$$

где оператор дипольного взаимодействия атома с полем есть

$$\begin{aligned} \hat{V} &= (g\hat{a}^\dagger + g^*\hat{a})(\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-) = \\ &= g\hat{a}\hat{\sigma}_+ + \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-g^* + g\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_+ + \hat{a}\hat{\sigma}_-g^*, \end{aligned} \quad (6)$$

для операторов атомной подсистемы

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}^z &= |e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|, \\ \hat{\sigma}_+ &= |e\rangle\langle g|, \quad \hat{\sigma}_- = |g\rangle\langle e| \end{aligned}$$

и константы дипольного взаимодействия поля с атомом

$$g = \sqrt{\frac{\omega_f}{2\hbar\epsilon_0 V}} d. \quad (7)$$

Здесь  $d \equiv \langle g|\hat{d}|e\rangle = |d_{eg}|e^{i\varphi_d}$  — матричный элемент дипольного перехода атома, в общем случае являющийся комплексным числом;  $V$  — объем квантования электромагнитного поля,  $\omega_f$  — частота поля.

В представлении взаимодействия гамильтониан взаимодействия атома с полем приобретает вид

$$\begin{aligned} \widehat{V}_I &= |g\rangle(\hat{a}\hat{\sigma}_+e^{-i\Delta_-t} + \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-e^{i\Delta_-t} + \\ &+ \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_+e^{i\Delta_+t} + \hat{a}\hat{\sigma}_-e^{-i\Delta_+t}), \end{aligned} \quad (8)$$

а уравнение Шредингера для вектора состояния системы атом + поле может быть записано в представлении взаимодействия следующим образом:

$$i\frac{d}{dt}|\Psi(t)\rangle = \widehat{V}_I|\Psi(t)\rangle. \quad (9)$$

Будем решать уравнение движения (9), используя следующее разложение вектора состояния системы по полному базису фоковских состояний поля  $|n\rangle$  и базису квантовых состояний атома; возбужденному  $|e\rangle$  и нижнему  $|g\rangle$  энергетическим состояниям двухуровневого атома:

$$\begin{aligned} |\Psi(t)\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} [C_{e,n}(t)|e, n\rangle + C_{g,n}(t)|g, n\rangle], \\ C_{g,0}(t) &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Уравнения для амплитуд вероятности, входящих

в (10), имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{dC_{e,n}(t)}{dt} &= -i|g|[\sqrt{n+1}e^{i\Delta_-t-i\varphi_d}C_{g,n+1}(t) + \\ &+ \sqrt{n}e^{i\Delta_+t+i\varphi_d}C_{g,n-1}(t)], \\ \frac{dC_{g,n}(t)}{dt} &= -i|g|[\sqrt{n+1}e^{-i\Delta_-t+i\varphi_d}C_{e,n+1}(t) + \\ &+ \sqrt{n}e^{-i\Delta_+t-i\varphi_d}C_{e,n-1}(t)], \end{aligned} \quad (11)$$

где обозначено  $\Delta_- \equiv \omega_a - \omega_f$ ,  $\Delta_+ \equiv \omega_f + \omega_a$ ,  $g = |g|e^{i\varphi_d}$ .

Введем безразмерные параметры

$$\tilde{\Delta}_- \equiv \frac{\omega_a - \omega_f}{|g|}, \quad \tilde{\Delta}_+ \equiv \frac{\omega_f + \omega_a}{|g|},$$

а также

$$\begin{aligned} \Omega_n &\equiv \sqrt{\tilde{\Delta}_-^2 + 4(n+1)}, \quad \Omega_{n-1} \equiv \sqrt{\tilde{\Delta}_-^2 + 4n}, \\ t_g &\equiv |g|t. \end{aligned}$$

Предположим далее, что частота поля в общем случае не совпадает с частотой перехода атома и константа  $g$  взаимодействия поля с атомом является комплексным числом, а в гамильтониане взаимодействия атома с полем (8) два последних слагаемых, ответственных за виртуальные переходы, равны нулю (приближение вращающейся волны). Тогда уравнение Шредингера для атома в поле может быть решено аналитически. Точное аналитическое решение системы уравнений в приближении вращающейся волны МДК (коэффициенты разложения по фоковским состояниям  $C_{e,n}(t)$  и  $C_{g,n}(t)$ ) может быть записано в виде [22]

$$\begin{aligned} C_{e,n}(t_g) &= C_{e,n}(0)A_n(t_g) - C_{g,n+1}(0)B_n(t_g), \\ C_{g,n}(t_g) &= C_{g,n}(0)A_{n-1}^*(t_g) + C_{e,n-1}(0)B_{n-1}^*(t_g), \end{aligned} \quad (12)$$

где обозначено

$$\begin{aligned} A_n(t_g) &\equiv \left[ \cos \frac{\Omega_n t_g}{2} - \frac{i\tilde{\Delta}_-}{\Omega_n} \sin \frac{\Omega_n t_g}{2} \right] e^{i\tilde{\Delta}_- t_g/2}, \\ B_n(t_g) &\equiv 2i \frac{\sqrt{n+1}}{\Omega_n} \sin \frac{\Omega_n t_g}{2} e^{i\varphi_d} e^{i\tilde{\Delta}_- t_g/2}. \end{aligned} \quad (13)$$

#### 4. ДИНАМИКА КВАНТОВОМЕХАНИЧЕСКИХ СРЕДНИХ И ФЛУКТУАЦИЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ ФАЗЫ ПОЛЯ

Согласно теории эрмитова оператора фазы поля  $\hat{\varphi}$  [18–21] (нижний индекс  $\theta$  в обозначении оператора фазы в дальнейшем в записи будет опускаться) средние квантовомеханические значения ТФОФ

поля для любого квантового состояния поля  $|\Psi(t)\rangle$  имеют вид

$$\begin{aligned} \langle \cos \hat{\varphi}(t) \rangle &= \langle \Psi(t) | \cos \hat{\varphi} | \Psi(t) \rangle = \\ &= \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} [C_{e,n}^*(t) C_{e,n+1}(t) + \\ &\quad + C_{g,n}^*(t) C_{g,n+1}(t)], \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \langle \sin \hat{\varphi}(t) \rangle &= \langle \Psi(t) | \sin \hat{\varphi} | \Psi(t) \rangle = \\ &= \operatorname{Im} \sum_{n=0}^{\infty} [C_{e,n}^*(t) C_{e,n+1}(t) + \\ &\quad + C_{g,n}^*(t) C_{g,n+1}(t)]. \end{aligned}$$

Для средних квадрата ТФОФ, необходимых для расчета дисперсий (флуктуаций) этих величин, для произвольных состояний поля и атома  $|\Psi(t)\rangle$  находим

$$\begin{aligned} \langle (\cos \hat{\varphi})^2(t) \rangle &= \langle \Psi(t) | \cos^2 \hat{\varphi} | \Psi(t) \rangle = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} [C_{e,n}^*(t) C_{e,n+2}(t) + \\ &\quad + C_{g,n}^*(t) C_{g,n+2}(t)], \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \langle (\sin \hat{\varphi})^2(t) \rangle &= \langle \Psi(t) | \sin^2 \hat{\varphi} | \Psi(t) \rangle = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} [C_{e,n}^*(t) C_{e,n+2}(t) + \\ &\quad + C_{g,n}^*(t) C_{g,n+2}(t)]. \end{aligned}$$

Использование соотношений (15) позволяет найти выражения для дисперсий (флуктуаций) ТФОФ  $\langle (\Delta \cos \hat{\varphi})^2(t) \rangle \equiv \langle (\cos \hat{\varphi})^2(t) \rangle - \langle \cos \hat{\varphi}(t) \rangle^2$  и  $\langle (\Delta \sin \hat{\varphi})^2(t) \rangle \equiv \langle (\sin \hat{\varphi})^2(t) \rangle - \langle \sin \hat{\varphi}(t) \rangle^2$  путем численного решения системы связанных дифференциальных уравнений (11) в рамках МР.

## 5. ФОКОВСКОЕ НАЧАЛЬНОЕ СОСТОЯНИЕ ПОЛЯ

Рассмотрим случай, когда исходное поле при  $t = 0$  находится в чистом фоковском состоянии  $|n_0\rangle$ . При этом в общем случае начальные значения коэффициентов разложения вектора состояния системы отличны от нуля  $C_{s,n_0}(0) \neq 0$  для  $s = e, g$ , а все остальные  $C_{s,n_0}(0) = 0, n \neq n_0$ .

В этом случае решение МДК (12), (13), использующей приближение RWA, приобретает следующий вид:

$$\begin{aligned} C_{e,n_0}(t_g) &= C_{e,n_0}(0) A_{n_0}(t_g), \\ C_{e,n_0-1}(t_g) &= -C_{g,n_0}(0) B_{n_0-1}(t_g), \\ C_{g,n_0}(t_g) &= C_{g,n_0}(0) A_{n_0-1}^*(t_g), \\ C_{g,n_0+1}(t_g) &= C_{e,n_0}(0) B_{n_0}^*(t_g). \end{aligned} \quad (16)$$

Остальные  $C_{e,n}(t_g) = C_{g,n}(t_g) = 0$  для  $n \neq n_0, n_0 - 1$  или  $n \neq n_0, n_0 + 1$  соответственно.

Для безразмерного времени в (16) использовано обозначение  $t_g \equiv |g|t$ .

Если начальное состояние атома  $|e\rangle$ , то ненулевыми коэффициентами разложения вектора состояния системы являются

$$\begin{aligned} C_{e,n_0}(t_g) &= C_{e,n_0}(0) A_{n_0}(t_g), \\ C_{g,n_0+1}(t_g) &= C_{e,n_0}(0) B_{n_0}^*(t_g). \end{aligned} \quad (17)$$

Если же начальное состояние атома  $|g\rangle$ , то ненулевыми являются зависимости от времени

$$\begin{aligned} C_{e,n_0-1}(t_g) &= -C_{g,n_0}(0) B_{n_0-1}(t_g), \\ C_{g,n_0}(t_g) &= C_{g,n_0}(0) A_{n_0-1}^*(t_g). \end{aligned} \quad (18)$$

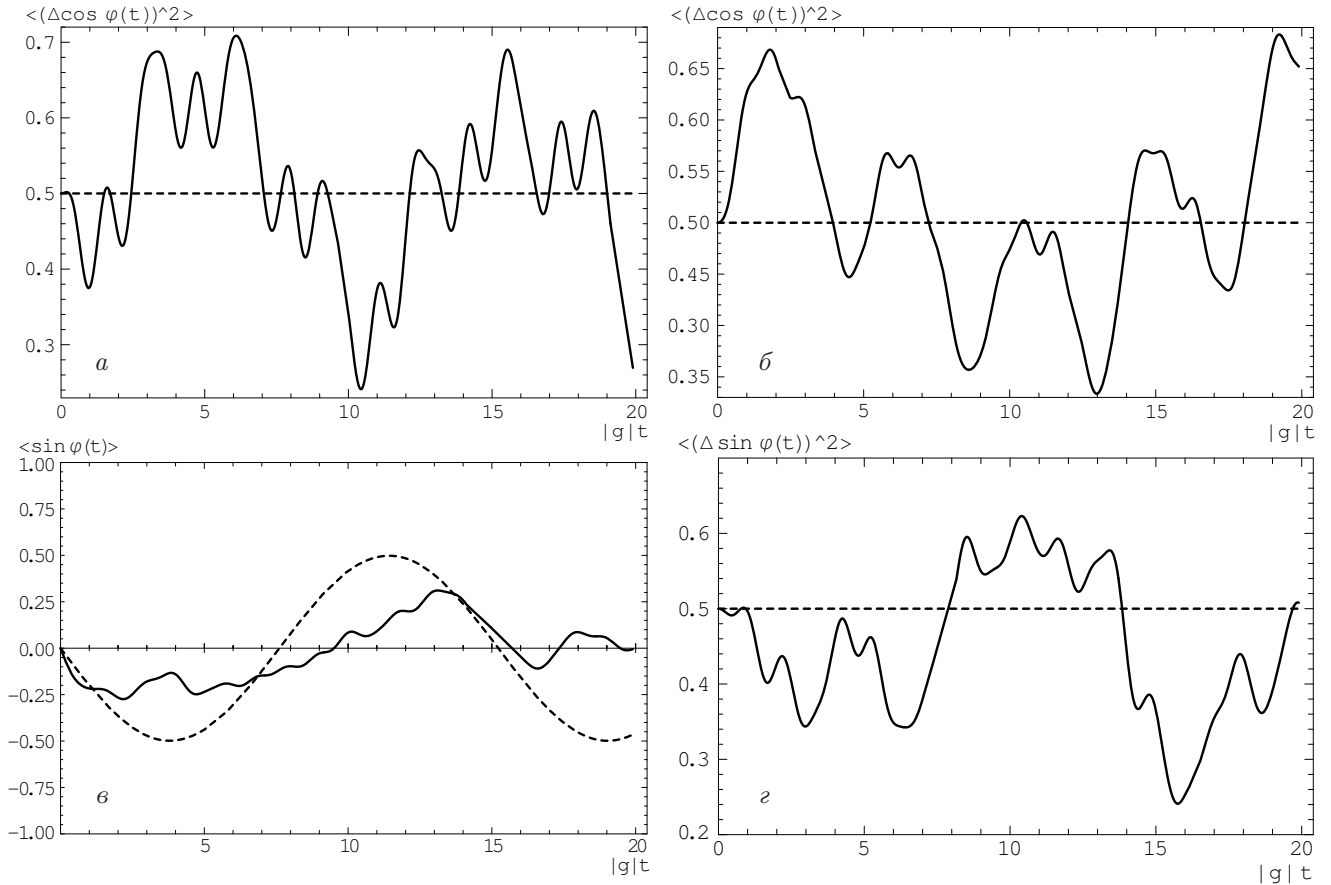
Используя формулы (16)–(18) и (14), нетрудно убедиться, что в случае начального фоковского состояния поля для исходных состояний атома  $|e\rangle$  и  $|g\rangle$  квантовомеханические средние ТФОФ (14) равны нулю:  $\langle \cos(\hat{\varphi}(t)) \rangle_{n,RWA} = \langle \sin(\hat{\varphi}(t)) \rangle_{n,RWA} = 0$ , что соответствует равномерному распределению случайных значений фазы поля от 0 до  $2\pi$  для любого момента времени. Аналогично получаем из (16)–(18) и (15), что дисперсии  $\langle (\Delta \cos \hat{\varphi})^2(t) \rangle_{n,RWA} = \langle (\Delta \sin \hat{\varphi})^2(t) \rangle_{n,RWA} = 1/2$  и не меняются во времени для фоковских начальных состояний поля и для начальных состояний атома  $|e\rangle$  или  $|g\rangle$ .

На рис. 1а,б показаны зависимости от времени дисперсии  $\langle (\Delta \cos \hat{\varphi})^2(t) \rangle_{n,RWA}$  и  $\langle (\Delta \cos(\hat{\varphi}(t)))^2 \rangle_{n,MR}$  (т.е. для МДК и МР соответственно) в условиях УСС для начального состояния  $|g\rangle$  и  $|e\rangle$  атома и начального состояния поля  $|1\rangle$ . На рисунке видно, что результаты двух моделей противоречат друг другу. МДК предсказывает, что дисперсии ТФОФ поля не изменяются во времени при взаимодействии атома с полем, тогда как МР указывает в условиях УСС на сложную зависимость от времени этих величин. Из рисунков также следует (ср. рис. 1а и рис. 1б), что характер эволюции дисперсий во времени качественно зависит от начального состояния атома.

Расчеты показывают также, что средние значения ТФОФ совпадают в таких условиях между собой для обеих моделей и равны нулю для любого момента времени.

Результаты расчетов не зависят от значения фазы матричного элемента перехода  $\varphi_d$ .

Качественно иная зависимость от времени средних и дисперсий операторов фазы поля характерна для случая начального состояния суперпозиции



**Рис. 1.** *a* — Зависимость от времени дисперсии оператора косинуса фазы поля  $\langle (\Delta \cos \hat{\varphi})^2 \rangle$ , следующая из модели Раби для системы атом + поле в начальном фоковском состоянии поля ( $|1\rangle$ ) и невозбужденном состоянии атома  $|g\rangle$ , для значения безразмерной константы связи  $g/\omega_f = 0.5$ . Значение фазового угла матричного элемента перехода  $\varphi_d = 0$ . Штриховой линией показана аналогичная зависимость, полученная в рамках модели Джейнса–Каммингса. *б* — Зависимость от времени дисперсии оператора косинуса фазы поля  $\langle (\Delta \cos \hat{\varphi})^2 \rangle$  для системы атом + поле в начальном фоковском состоянии поля ( $|1\rangle$ ) и возбужденном состоянии атома  $|e\rangle$  для тех же значений параметров. *в* — Зависимость от времени среднего значения оператора синуса фазы поля теории Пегга–Барнетта  $\langle \sin \hat{\varphi} \rangle$ , следующая из модели Раби для системы атом + поле в начальном фоковском состоянии поля ( $|n = 1\rangle$ ) и состоянии суперпозиции атома  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|e\rangle + |g\rangle)$  для значения безразмерной константы связи  $g/\omega_f = 0.5$ . Значение фазового угла матричного элемента перехода  $\varphi_d = 0$ . Штриховой линией показана аналогичная зависимость, полученная в рамках модели Джейнса–Каммингса. *г* — Зависимость от времени дисперсии оператора синуса фазы поля  $\langle (\Delta \sin \hat{\varphi})^2 \rangle$  для системы атом + поле в начальном состоянии поля ( $|n = 1\rangle$ ) и состоянии суперпозиции атома для значения фазового угла матричного элемента перехода  $\varphi_d = \pi/2$  для тех же значений остальных параметров. Штриховой линией показана аналогичная зависимость, полученная в рамках модели Джейнса–Каммингса

возбужденного и нижнего энергетических состояний атома:

$$|\psi_a(t = 0)\rangle = C_e|e\rangle + C_g|g\rangle. \quad (19)$$

На рис. 1*в,г* показаны примеры зависимостей средних значений оператора синуса фазы поля для начального состояния суперпозиции атома и УСС. Как видно на рис. 1*в*, среднее оператора синуса фазы отлично от нуля как для МДК, так и для МР и обладает сложной зависимостью этой величины от времени в МР в режиме УСС. Эти зависимости качественно отличаются друг от друга для двух моделей. МДК предсказывает регулярное изменение средних

операторов фазы во времени, подобное осцилляциям Раби.

Как показано на рис. 1*г*, дисперсии (флуктуации) оператора синуса изменяются во времени в рамках МР и с высокой точностью остаются неизменными в теории МДК в рассмотренном случае начального условия суперпозиции атомных состояний и фоковского состояния поля. В данном случае среднее оператора синуса близко к нулю для любого момента времени. Изменение значения фазового угла матричного элемента перехода между состояниями атома  $\varphi_d$  приводит к резкому увеличению в рамках МДК амплитуд осцилляций во времени средне-



го значения оператора синуса фазы и его дисперсии (флуктуаций) и значительному их отличию от 0 и 1/2 соответственно.

Отметим, что на интервале изменения нормированного безразмерного времени  $\Delta(|g|t) > 1000$  рассматриваемые средние и дисперсии принимают хаотический вид в интервалах изменения этих величин.

### 6. КОГЕРЕНТНОЕ НАЧАЛЬНОЕ СОСТОЯНИЕ ПОЛЯ

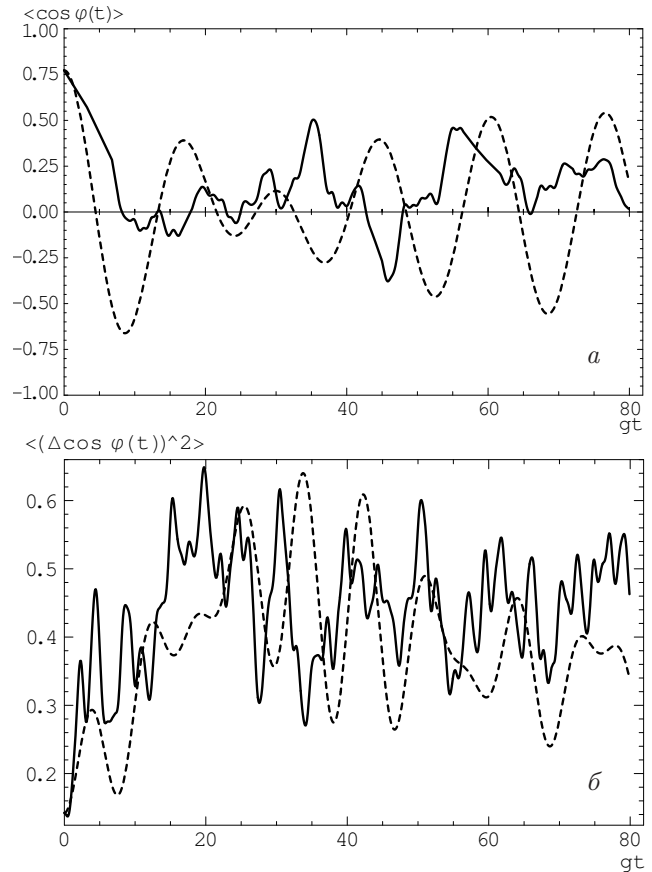
Рассмотрим в качестве квантового состояния измеряемого поля когерентное состояние

$$|\alpha\rangle = e^{-n_\alpha/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle, \quad \alpha = \sqrt{n_\alpha} e^{i\varphi_\alpha}, \quad n_\alpha \equiv |\alpha|^2.$$

Как видно на рис. 2а, изменение во времени среднего значения  $\langle \cos(\hat{\varphi}(t)) \rangle_{\alpha, NRWA}$ , рассчитанного в рамках МР (NRWA) для начального когерентного состояния поля  $|\alpha\rangle$  и возбужденного состояния атома  $|e\rangle$ , обладает сложной нерегулярной зависимостью от времени и не имеет характера стандартных регулярных осцилляций Раби. На рис. 2а динамика среднего значения оператора фазы поля сравнивается с аналогичной зависимостью  $\langle \cos(\hat{\varphi}(t)) \rangle_{\alpha, RWA}$ , полученной с использованием приближения RWA. На рисунке видно, что в рассматриваемом нами случае ультрасильной связи МР дает качественно отличную зависимость от времени средних оператора фазы поля на всем интервале времени за исключением пренебрежимо малых значений  $|g|t$ . На рис. 2б показаны зависимости дисперсий  $\langle (\Delta \cos(\hat{\varphi}(t)))^2 \rangle_{n, NRWA}$  и  $\langle (\Delta \cos(\hat{\varphi}(t)))^2 \rangle_{n, RWA}$ , полученные в рамках МР и МДК соответственно, для тех же значений параметров. Расчеты показывают, что так же, как и в случае квантовых средних значений ТФОФ поля, в условиях УСС результаты двух моделей качественно различны. Приближение RWA, имеющее место в теории Джейнса – Каммингса, для случая УСС атома с полем, оказывается несправедливо.

Наши расчеты показали, что абсолютные значения средних и дисперсий ТФОФ поля качественно зависят от начального значения фазового угла начального когерентного состояния поля  $\varphi_\alpha$  (см. рис. 2 и рис. 3 для сравнения). Таким образом, сам характер эволюции средних значений и дисперсий ТФОФ поля во времени зависит от начального значения фазового угла когерентного состояния поля.

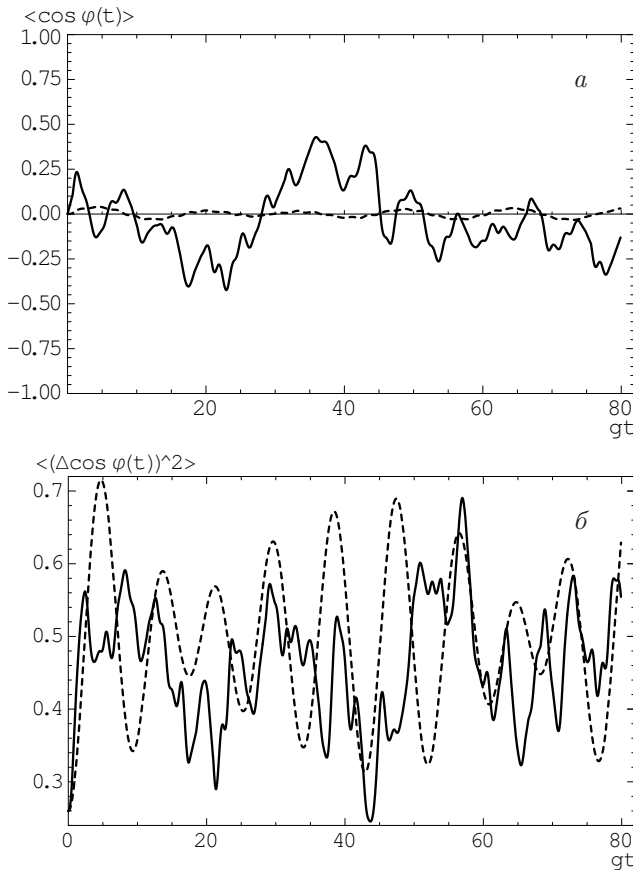
В то же время, как показали наши расчеты, динамика средних и дисперсий фазы поля для начальных состояний атома  $|g\rangle$  или  $|e\rangle$  не зависит от значения фазового угла матричного элемента перехода



**Рис. 2.** а — Зависимости от времени среднего значения оператора косинуса фазы поля теории Пегга–Барнетта  $\langle \cos \hat{\varphi} \rangle$ , следующая из модели Раби для системы атом + поле в начальном когерентном состоянии поля ( $|\alpha = 1\rangle$ ) и возбужденном состоянии атома  $|e\rangle$ , для значения безразмерной константы связи  $g/\omega_f = 0.7$ ,  $\omega_A = 1.1\omega_f$ . Значение фазового угла матричного элемента перехода  $\varphi_d = 0$ . Штриховой линией показана аналогичная зависимость, полученная в рамках модели Джейнса – Каммингса. б — Зависимости от времени дисперсии оператора косинуса фазы поля  $\langle (\Delta \cos \hat{\varphi})^2 \rangle$  для системы атом + поле в начальном когерентном состоянии поля ( $|\alpha = 1\rangle$ ) и возбужденном состоянии атома  $|e\rangle$  для тех же значений параметров

да  $\varphi_d$ . Качественная зависимость от этого параметра возникает в случае начального состояния атома суперпозиции вида (19). На рис. 4 представлены зависимости от времени среднего и дисперсии оператора косинуса фазы для  $\varphi_d = \pi/2$  в случае начального состояния суперпозиции атома  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|e\rangle + |g\rangle)$  и когерентного состояния поля. Расчеты показали, что для  $\varphi_d = 0$  и тех же значений параметров системы динамика рассматриваемых средних и дисперсий качественно отличается от динамики в случае  $\varphi_d = \pi/2$  в условиях УСС.

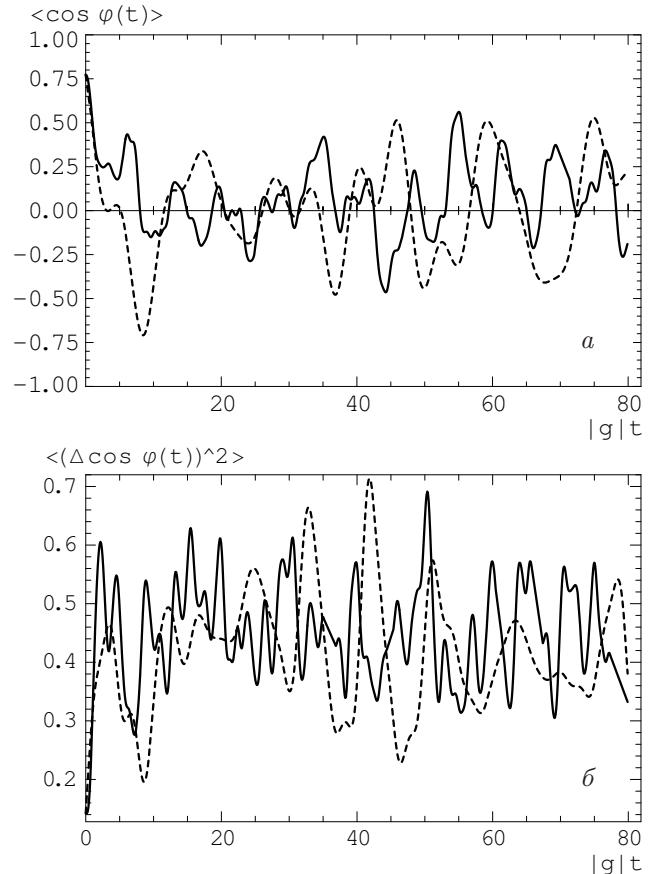
При увеличении числа фотонов начального когерентного состояния  $n_\alpha$  различие между результа-



**Рис. 3.** *а* — Зависимости от времени среднего значения оператора косинуса фазы поля теории Пегга–Барнетта  $\langle \cos \hat{\varphi} \rangle$ , следующая из модели Раби (NRWA) для системы атом + поле в начальном когерентном состоянии поля ( $|\alpha = e^{i\pi/2}\rangle$ ) и возбужденном состоянии атома  $|e\rangle$ , для значения безразмерной константы связи  $g/\omega_f = 0.7$ ,  $\omega_A = 1.1\omega_f$ . Значение фазового угла матричного элемента перехода  $\varphi_d = 0$ . Штриховой линией показана аналогичная зависимость, полученная в рамках модели Джейнса–Каммингса (RWA). *б* — Зависимости от времени дисперсии оператора косинуса фазы поля  $\langle (\Delta \cos \hat{\varphi})^2 \rangle$  для системы атом + поле в начальном когерентном состоянии поля ( $|\alpha = e^{i\pi/2}\rangle$ ) и возбужденном состоянии атома  $|e\rangle$  для тех же значений параметров

тами теорий МДК и МР для эволюции поля уменьшается как для средних значений, так и для дисперсий тригонометрических операторов фазы и для мезоскопических когерентных состояний с  $n_\alpha \gg 1$  практически совпадают для УСС.

При этом в случае когерентного начального состояния поля при  $n_\alpha \gg 1$  и состояния атома суперпозиции (19) присутствует ярко выраженное явление коллапса и возрождения как для средних значений, так и для дисперсий ТФОФ поля. Так, при  $n_\alpha = 30$  ( $|\tilde{g}| = 0.1$ ,  $\tilde{\Delta}_- = 1$ ) и в интервале изменения безразмерного времени  $700 < |g|t < 1100$  для сред-



**Рис. 4.** *а* — Зависимости от времени среднего значения оператора косинуса фазы поля теории Пегга–Барнетта  $\langle \cos \hat{\varphi} \rangle$ , следующая из модели Раби (NRWA) для системы атом + поле в начальном когерентном состоянии поля ( $|\alpha = 1\rangle$ ) и суперпозиционном состоянии атома  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|e\rangle + |g\rangle)$ , для значения безразмерной константы связи  $g/\omega_f = 0.7$ ,  $\omega_A = 1.1\omega_f$ . Значение фазового угла матричного элемента перехода  $\varphi_d = \pi/2$ . Штриховой линией показана аналогичная зависимость, полученная в рамках модели Джейнса–Каммингса (RWA). *б* — Зависимости от времени дисперсии оператора косинуса фазы поля  $\langle (\Delta \cos \hat{\varphi})^2 \rangle$  для системы атом + поле в начальном когерентном состоянии поля ( $|\alpha = 1\rangle$ ) и суперпозиционном состоянии атома  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|e\rangle + |g\rangle)$  для тех же значений параметров

них значений операторов имеют место соотношения

$$\langle \cos(\hat{\varphi}(t)) \rangle_{n,RWA/NRWA}, \langle \sin(\hat{\varphi}(t)) \rangle_{n,RWA/NRWA} \approx 0, \\ \langle (\Delta \cos(\hat{\varphi}(t)))^2 \rangle_{n,NRWA}, \langle (\Delta \cos(\hat{\varphi}(t)))^2 \rangle_{n,RWA} \approx \frac{1}{2}$$

(то же для операторов  $\sin$ ). При  $|g|t < 700$  имеют место затухающие регулярные осцилляции Раби. С ростом времени взаимодействия  $|g|t > 1100$  осцилляции Раби указанных величин восстанавливаются, т. е. явление коллапса сменяется эффектом возрождения осцилляций Раби [14, 17, 22–27]. При  $|g|t < 700$

имеют место затухающие осцилляции как средних, так и дисперсий. Следует отметить, что значения средних и дисперсий ТФОФ поля в интервале изменения времени, для которого присутствует квантовый эффект коллапса, характерны для фоковского состояния поля.

Эффект коллапса и возрождения осцилляций рассмотренных величин имеет место для любых начальных состояний атома.

Частота временных осцилляций рассмотренных величин значительно отличается от доминантной частоты осцилляций Раби  $\Omega_R = \sqrt{\Delta^2 + 4g^2(n_\alpha + 1)}$ ,  $\Delta \equiv \omega_a - \omega_f$ , характерной для осцилляций Раби инверсии населенности атома для начального когерентного состояния поля [14, 17, 27].

Из сказанного выше также можно сделать вывод, что для исследования эволюции средних значений и дисперсий ТФОФ поля в рамках теории оператора фазы Пегга–Барнетта применимо как приближение МДК (RWA), так и МР (NRWA) для мезо- и макрополей с большим числом фотонов в условиях УСС.

Для малого числа фотонов когерентного состояния поля  $n_\alpha \sim 1$  при УСС характер эволюции средних значений и дисперсий ТФОФ поля качественно зависит от фазового угла когерентного начального состояния поля  $\varphi_\alpha$  для любого начального состояния атома, при этом регулярные осцилляции Раби и эффект коллапса и возрождения отсутствуют.

Зависимость динамики изменения указанных величин от фазового угла дипольного момента перехода атома  $\varphi_d$  имеет место только в случае начального состояния атома (19) для малых значений  $n_\alpha \sim 1$  (см. рис. 4), в то же время при больших  $n_\alpha > 10$  эволюция средних значений и дисперсий ТФОФ поля практически не зависит от  $\varphi_d$  для любых начальных состояний атома. Следует отметить, что эволюция средних и дисперсий операторов фазы слабо зависит от начального состояния атома в случае больших чисел фотонов  $n_\alpha > 10$  начального когерентного состояния поля.

## 7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе нами проведено исследование эволюции во времени средних квантовомеханических значений (наблюдаемых) и дисперсий (квантовых флуктуаций) ТФОФ поля при взаимодействии поля с атомом. Рассмотрен и проанализирован случай УСС атома и поля. Для расчетов использована квантовомеханическая модель Раби и теория эрмита оператора фазы электромагнитного поля Пег-

га–Барнетта. Рассмотрен случай квантовых микрополей со средним числом фотонов  $\sim 1$ . Проведено сравнение характера эволюции указанных величин, следующего из теории Раби и приближенной теории Джейнса–Каммингса, использующей приближение вращающейся волны в условиях УСС.

Анализ проведен для различных начальных квантовых состояний поля и двухуровневого атома.

Если электромагнитное поле в начальный момент времени находится в фоковском состоянии, результаты МР принципиально отличаются от результатов расчета эволюции средних и/или дисперсий ТФОФ поля в условиях УСС. Нами показано, что в случае начального состояния атома в возбужденном или нижнем энергетическом состоянии дисперсии операторов фазы в рамках МДК остаются неизменными во времени, тогда как МР предсказывает сложную зависимость от времени дисперсий ТФОФ поля. При начальном состоянии суперпозиции двух состояний атома качественное отличие результатов МР и МДК присутствует как для средних значений, так и для дисперсий операторов. В этом случае имеет место качественная зависимость характера эволюции средних и флуктуаций ТФОФ поля от фазового угла матричного элемента дипольного перехода между состояниями атома.

Нами показана неприменимость МДК (приближения вращающейся волны, RWA) для расчета эволюции операторов фазы в условия УСС для фоковских начальных состояний поля.

Если начальное состояние поля является когерентным  $|\alpha\rangle$  с малым числом фотонов  $n_\alpha \sim 1$ , то приближение RWA (МДК) оказывается неприменимым для расчета динамики средних и дисперсий ТФОФ поля в условиях УСС для любого начального состояния атома, взаимодействующего с полем. С ростом  $n_\alpha$  различие результатов МР и МДК сокращается и при  $n_\alpha \gg 10$  результаты обеих моделей почти не различаются между собой для любых начальных состояний атома в условиях УСС.

В данной работе показано, что эволюция рассматриваемых величин качественно зависит от фазового угла начального когерентного состояния микроскопического поля  $\varphi_\alpha$  для любых начальных состояний атома, а также при УСС качественно зависит от значения фазового угла  $\varphi_d$  матричного элемента перехода атома в случае начального состояния суперпозиции состояний атома.

Показано, что в случае начального когерентного состояния поля с числом фотонов  $n_\alpha \gg 1$  и при произвольном начальном состоянии атома для эволюции во времени средних значений и дисперсий



ТФОФ поля характерно явление коллапса и возрождения осцилляций Раби этих величин.

### ЛИТЕРАТУРА

1. P. Forn-Díaz, L. Lamata, E. Rico, J. Kono, and E. Solano, *Rev. Mod. Phys.* **91**, 25005 (2019).
2. T. Niemczyk, F. Deppe, H. Huebl, E. P. Menzel, F. Hocke, M. J. Schwarz, J. J. Garcia-Ripoll, D. Zueco, T. Hümmer, E. Solano, A. Marx, and R. Gross, *Nature Phys.* **6**, 772 (2010).
3. A. Le Boité, *Adv. Quantum Technol.* **37**, 1900140 (2020).
4. A. F. Kockum, A. Miranowicz, S. DelLiberato, S. Savasta, and F. Nori, *Nature Rev. Phys.* **1**, 19 (2019).
5. Shuangshuang Fu, Shunlong Luo, and Yue Zhang, *Quantum Inf. Proces.* **20**, 88 (2021).
6. Jin-Sheng Peng and Gao-xiang Li, *Phys. Rev. A* **45**, 3289 (1992).
7. I. Feranchuk, A. Ivanov, Van-Hoang Le, and A. Ulyanekov, *Non-perturbative Description of Quantum Systems*, *Lecture Notes Phys.* **894**, 362 (2015).
8. F. A. Wolf, M. Kollar, and D. Braak, *Phys. Rev. A* **85**, 053817 (2012).
9. Qing-Hu Chen, Tao Liu, Yu-Yu Zhang, and Ke-Lin Wang, *EPL* **96**, 14003 (2011), [www.epljournal.org](http://www.epljournal.org), doi: 10.1209/0295-5075/96/14003.
10. Jin-sheng Peng and Gao-xiang Li, *Phys. Rev. A* **47**, 3167 (1993).
11. T. Werliang, A. V. Dodonov, E. L. Duzzioni, and C. J. Villas-Boas, *Phys. Rev. A* **78**, 053805 (2008).
12. Ho Trung Dung, R. Tanaś, and A. S. Shumovsky, *J. Mod. Opt.* **38**, 2069 (1991).
13. Ho Trung Dung, R. Tanas, and A. S. Shumovsky, *Opt. Commun.* **79**, 462 (1990).
14. H. X. Meng, C. L. Chai, and Z. M. Zhang, *Phys. Rev. A* **45**, 2131 (1992).
15. A. A. Faisal El-Orany, M. H. Mahran, M. R. B. Wahiddin, and A. M. Hashim, *Opt. Commun.* **240**, 169 (2004).
16. M. H. Naderi, *J. Phys. A: Math. Theor.* **44**, 055304 (2011).
17. Qiongtao Xie, Honghua Zhong, M. T. Batchelor, and Chaohong Lee, *J. Phys. A: Math. Theor.* **50**, 113001, (2017).
18. D. T. Pegg and S. M. Barnett, *Phys. Rev. A* **39**, 1665 (1989).
19. S. M. Barnett and D. T. Pegg, *J. Phys. A* **19**, 3849 (1986).
20. P. Carruthers and M. M. Nieto, *Rev. Mod. Phys.* **40**, 411 (1968).
21. A. V. Kozlovskii, *J. Mod. Opt.* **66**, 463 (2019).
22. В. П. Шляйх, *Квантовая оптика в фазовом пространстве*, Физматлит, Москва (2005).
23. J. H. Eberly, N. B. Narozhny, and J. J. Sanchez-Mondragon, *Phys. Rev. Lett.* **44**, 1323 (1980).
24. N. B. Narozhny, J. J. Sanchez-Mondragon, and J. H. Eberly, *Phys. Rev. A* **23**, 236 (1981).
25. H. I. Yoo, J. J. Sanchez-Mondragon, and J. H. Eberly, *J. Phys. A* **14**, 1383 (1981).
26. J. Eiselt and H. Risken, *Phys. Rev. A* **43**, 346 (1991).
27. А. В. Козловский, *КЭ* **40**, 223 (2010).