ЖЭТФ, 2024, том 165, вып. 5, стр. 725–741 © 2024

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА ПЛАЗМЕННОГО СОЛЕНОИДА И ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ СВОЙСТВА ИНДУКТИВНОГО РАЗРЯДА

И. Н. Карташов [*], *М. В. Кузелев* [**]

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Физический факультет 119991, Москва, Россия

Поступила в редакцию 20 ноября 2023 г.,
после переработки 17 января 2024 г.
Принята к публикации 18 января 2024 г.

Исследованы электродинамические свойства плазменного соленоида с холодной столкновительной магнитоактивной плазмой и динамика возбуждения волн азимутальным током на его поверхности при произвольных соотношениях между частотой внешнего источника тока, электронной циклотронной частотой и плазменной частотой. Рассмотрены случаи безграничного и продольно ограниченного плазменных соленоидов. Вычислены их комплексные импедансы и эффективные сопротивления как величины, характеризующие поглощаемую в плазме мощность источника. Показано, что несмотря на ограниченность понятия комплексного импеданса квазистационарным случаем, вещественная его часть совпадает с эффективным сопротивлением даже за пределами условия квазистационарности. Резонансные зависимости вычисленных комплексных импедансов и эффективных сопротивлений плазмы свидетельствуют о том, что при наличии внешнего магнитного поля, в плазменном соленоиде возможно резонансное возбуждение азимутальным током электромагнитных волн со значительной продольной составляющей напряженности электрического поля в области частот меньших циклотронной и плазменной.

DOI: 10.31857/S0044451024050122

1. ВВЕДЕНИЕ

В течение нескольких десятилетий в научной литературе активно обсуждаются индуктивные высокочастотные разряды и источники плазмы на их основе (см. обзоры [1–4]). В отличие от традиционных емкостного и индуктивного высокочастотных разрядов без внешнего магнитного поля его наличие приводит к существенному изменению электромагнитных свойств плазмы в разряде. В частности, появляется возможность возбуждения проникающих в плазму волн низкочастотной части спектра с частотами меньше электронной циклотронной. Источники плазмы, основанные на индуктивном высокочастотном разряде во внешнем магнитном поле имеют существенно меньшие ограничения по плотности плазмы, связанные с достижением ею критического значения для данной частоты генератора, то есть являются источниками плотной плазмы. Реальные концентрации электронов достигают значений вплоть до 10^{13} см$^{-3}$ [1].

Уникальные характеристики предопределяют и широкие практические применения высокочастотных индуктивных источников плазмы во внешнем магнитном поле. Одним из важнейших их приложений является использование в качестве ионных двигателей космических аппаратов. В таких источниках плазма создается в результате вложения высокочастотной мощности с последующим электростатическим ускорением ионов. В качестве ионных двигателей рассматриваются источники плазмы различных размеров (диаметры 0.5 – 74 см) [5], в том числе малых (диаметр вакуумной камеры порядка нескольких сантиметров) [6, 7] и сверхмалых (диаметры 0.2 – 2 см) [8]. Внешнее магнитное поле создается как при помощи традиционного соленоида, так и при помощи системы постоянных магнитов. В частности, в [6, 7] для упрощения и миниатюризации конструкции магнитное поле создается постоянным кольцевым магнитом. Еще одним из приложений высокочастотных индуктивных источников плазмы

[*] E-mail: igorkartashov@mail.ru
[**] E-mail: kuzelev@mail.ru

является их использование в микроэлектронике для плазменного нанесения покрытий и травления материалов [9]. Помимо этого, поглощение электромагнитных волн с частотами до электронной циклотронной имеет существенное значение как один из методов нагрева плазмы в установках управляемого термоядерного синтеза, в частности, в проектах ITER и DEMO [10, 11]. Поглощение волн в горячей термоядерной плазме осуществляется в основном за счет бесстолкновительного затухания Ландау. При этом параметры плазмы и внешнего удерживающего магнитного поля отличаются от параметров традиционного высокочастотного разряда существенным образом. При концентрации электронов порядка 10^{14} см$^{-3}$ и индукции магнитного поля в токамаке 5 Тл электронные ленгмюровская и циклотронная частоты имеют один порядок и составляют $(5\ldots10)\times10^{11}$ рад/с, что соответствует СВЧ области. Это обстоятельство делает актуальным продвижение существующих теорий индуктивных высокочастотных разрядов в более коротковолновую область — вплоть до СВЧ диапазона.

В случае частоты генератора, значительно меньшей электронной циклотронной частоты, при вложении мощности в плотную плазму говорят о геликонных разрядах. Исследование геликонных разрядов и источников плазмы на их основе началось с работ Босвелла [12, 13]. В первой из этих работ показано, что в трубке, помещенной во внешнее магнитное поле величиной до 1.5 кГс, зажигался разряд на частоте 8 МГц и источником вложения мощности в плазму была возбуждаемая стоячая волна геликонного типа. При теоретическом описании геликонного разряда было указано на возможность существования двух радиальных распространяющихся мод, одна из которых связывается с геликоном, а другая в настоящее время обычно называется модой Трайвелписа-Гоулда или косой ленгмюровской волной [14–17]. В работе [18] рассматривались механизмы вложения в безграничную магнитоактивную плазму высокочастотной мощности при реализации, в зависимости от параметров разряда, предельных случаев возбуждаемой волны с законами дисперсии, соответствующими геликонной волне и косой ленгмюровской волне (моде Трайвелписа – Гоулда). В настоящей работе исследуются электромагнитные свойства индуктивного разряда конечной длины во внешнем магнитном поле при различных соотношениях между частотой возбуждающего генератора, электронной циклотронной частотой и плазменной частотой, что позволяет описать электродинамику плазменного соленоида не только в традиционной

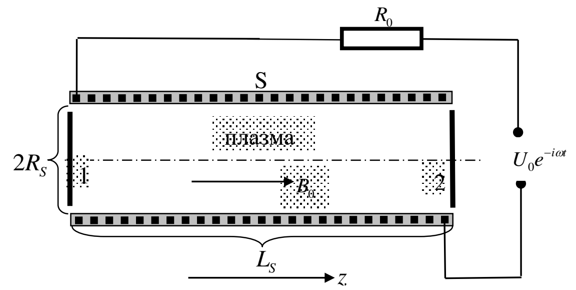

Рис. 1. Плазменный соленоид

области высокочастотного диапазона частот, но и для систем с использованием СВЧ полей [19–23].

Типичные источники плазмы представляют собой вакуумную камеру с давлением газа единицы и десятки миллитор, имеющую диаметр от нескольких миллиметров до десятков сантиметров и протяженность до значений более метра. Разряд поддерживается системой токов, текущих по антенне, которая может иметь различные конфигурации. Мы в настоящей работе будем ориентироваться на параметры разряда в работах [24–26].

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ И МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

Рассмотрим соленоид S, полностью заполненный однородной плазмой (рис. 1). Соленоид (катушка индуктивности) представляет собой участок цилиндра с радиусом R_S, длиной L_S с тонкой проволочной обмоткой, содержащей N_S витков. Обмотка соленоида через сопротивление R_0 подключена к источнику частоты ω. Имеется также однородное внешнее магнитное поле B_0, направленное вдоль оси соленоида (ось z). Торцы соленоида могут быть закрыты проводящими заглушками «1» и «2». Описанная система представляет упрощенную схему индуктивного газового разряда [27].

Введем цилиндрические координаты r, φ, z и будем рассматривать только азимутально симметричные распределения электромагнитного поля в соленоиде ($\partial/\partial\varphi = 0$). Предположим, что тензор диэлектрической проницаемости плазмы в цилиндрической системе координат имеет вид $(i, j = r, \varphi, z)$

$$\varepsilon_{ij}(\omega) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{rr}(\omega) & \varepsilon_{r\varphi}(\omega) & 0 \\ \varepsilon_{\varphi r}(\omega) & \varepsilon_{\varphi\varphi}(\omega) & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz}(\omega) \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

В простейшей модели холодной электронной магнитоактивной плазмы со столкновениями компоненты тензора (1) определяются формулами [28]

$$\begin{gathered}\varepsilon_{rr}(\omega)=\varepsilon_{\varphi\varphi}(\omega)=\varepsilon_{\perp}(\omega)=1-\frac{\omega_{Le}^2(\omega+i\nu_e)}{\omega\left[(\omega+i\nu_e)^2-\Omega_e^2\right]},\\ \varepsilon_{r\varphi}(\omega)=-\varepsilon_{\varphi r}(\omega)=ig(\omega)=-i\frac{\omega_{Le}^2\Omega_e}{\omega\left[(\omega+i\nu_e)^2-\Omega_e^2\right]},\\ \varepsilon_{zz}(\omega)=\varepsilon_{||}(\omega)=1-\frac{\omega_{Le}^2}{\omega(\omega+i\nu_e)}.\end{gathered}\tag{2}$$

Здесь ω_{Le} — электронная ленгмюровская частота, ν_e — эффективная частота столкновений электронов, Ω_e — электронная циклотронная частота.

Для плазмы с тензором диэлектрической проницаемости (1) в случае азимутально симметричных монохроматических возмущений частоты ω после перехода к комплексным амплитудам система уравнений Максвелла записывается в виде

$$\begin{gathered}\frac{\partial E_\varphi}{\partial z}=-i\frac{\omega}{c}B_r,\\ \frac{\partial E_r}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial r}=i\frac{\omega}{c}B_\varphi,\\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rE_\varphi\right)=i\frac{\omega}{c}B_z,\\ \frac{\partial B_\varphi}{\partial z}=i\frac{\omega}{c}\varepsilon_{rr}(\omega)E_r+i\frac{\omega}{c}\varepsilon_{r\varphi}(\omega)E_\varphi-\\ -\frac{4\pi}{c}j_{0r}(z,r),\\ \frac{\partial B_r}{\partial z}-\frac{\partial B_z}{\partial r}=-i\frac{\omega}{c}\varepsilon_{\varphi r}(\omega)E_r-i\frac{\omega}{c}\varepsilon_{\varphi\varphi}(\omega)E_\varphi+\\ +\frac{4\pi}{c}j_{0\varphi}(z,r),\\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rB_\varphi\right)=-i\frac{\omega}{c}\varepsilon_{zz}(\omega)E_z+\frac{4\pi}{c}j_{0z}(z,r),\\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\varepsilon_{rr}E_r\right)+\frac{\partial}{\partial z}(\varepsilon_{zz}E_z)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\varepsilon_{r\varphi}E_\varphi)=\\ =4\pi\rho_0(z,r).\end{gathered}\tag{3}$$

Здесь $\mathbf{j}_0(z,r)=\{j_{0r},j_{0\varphi},j_{0z}\}$ и $\rho_0(z,r)$ — комплексные амплитуды плотности тока и плотности заряда внешних источников поля в плазме. В нашем случае внешним источником является обмотка соленоида, по которой протекает ток от источника, а плотность заряда $\rho_0(z,r)$ равна нулю. Однако, если бы заглушки «1» и «2» были подключены к какому-то источнику, то плотность заряда $\rho_0(z,r)$ была бы обусловлена поверхностными зарядами на этих заглушках, как на обкладках конденсатора. При этом речь бы шла о комбинированном газовом разряде — индуктивно-емкостном. Мы ограничимся только случаем $\rho_0(z,r)=0$. Резонансные свойства емкостного разряда в поперечном магнитном поле рассмотрены в [29]. Поскольку ток в соленоиде преимущественно является азимутальным, будем полагать, что $j_{0r}=j_{0z}\equiv 0$.

Исключая величины B_z, B_r, B_φ и учитывая формулы (2), получаем из (3) следующие уравнения для комплексных амплитуд компонент вектора напряженности электрического поля E_z, E_r, E_φ:

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial E_r}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial r}\right)+\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_\perp E_r+i\frac{\omega^2}{c^2}gE_\varphi=0,\\ \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}rE_\varphi\right)+\frac{\partial^2 E_\varphi}{\partial z^2}+\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_\perp E_\varphi-i\frac{\omega^2}{c^2}gE_r=\\ =-i\frac{\omega}{c}\frac{4\pi}{c}j_{0\varphi}(z,r),\\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\left(\frac{\partial E_z}{\partial r}-\frac{\partial E_r}{\partial z}\right)+\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{||}E_z=0.\end{gathered}\tag{4}$$

Обсудим теперь граничные условия для уравнений (4). Предположим, что обмотка соленоида локализована на цилиндрической поверхности $r=R_S$, т.е. ток соленоида является поверхностным током. В этом случае плотность тока внешнего источника можно определить при помощи дельта-функции

$$j_{0\varphi}(z,r)=J(z)\delta(r-R_S),\qquad 0<z<L_S,\tag{5}$$

где $J(z)$ — некоторая функция только продольной координаты z. Возьмем второе уравнение системы (4), подставим в него функцию (5) и проинтегрируем уравнение по r в пределах от R_S-h до R_S+h ($h\to+0$). В результате получим соотношение

$$\frac{\partial E_\varphi}{\partial r}(R_S+0)-\frac{\partial E_\varphi}{\partial r}(R_S-0)=-i\frac{\omega}{c}\frac{4\pi}{c}J(z).\tag{6}$$

Как видно из третьего и пятого уравнений системы (3), соотношение (6) обусловлено скачком тангенциальной составляющей индукции магнитного поля $B_z(r)$ на поверхности с током (5). Кроме (6) понадобятся еще и условия непрерывности тангенциальных составляющих напряженности электрического поля

$$\begin{gathered}E_z(R_S+0)-E_z(R_S-0)=0,\\ E_\varphi(R_S+0)-E_\varphi(R_S-0)=0.\end{gathered}\tag{7}$$

Соотношения (6) и (7) составляют основные граничные условия для однородных уравнений (4)[1)]. Граничные условия по переменной z будут обсуждаться в дальнейшем по ходу изложения.

Одним из сложных моментов является определение функции $J(z)$. Сложности нет только в квазистационарном приближении, в рамках которого полагается, что мгновенные значения силы тока в каждой точке электрической цепи, в том числе и в каж-

[1)] Внутри соленоида при $r<R_S$ и вне соленоида при $r>R_S$ правая часть второго уравнения системы (4) согласно (5) равна нулю.

дом витке обмотки соленоида, одинаковы. Считая, что это так, можем записать

$$\int_0^{L_S} dz \int_{R_S-h}^{R_S+h} dr j_{0\varphi}(z,r) = N_S I. \tag{8}$$

Здесь I — сила тока в цепи, а $2h$ — толщина обмотки соленоида, т.е. интегрирование в (8) производится по продольному сечению обмотки соленоида. В модели соленоида с поверхностным током (5) предполагается, что $h \to +0$. Подставляя (5) в (8), имеем

$$I = \frac{1}{N_S} \int_0^{L_S} J(z) dz. \tag{9}$$

Если плотность числа витков обмотки соленоида постоянна и число витков достаточно велико, то функция $J(z)$ может быть представлена в виде

$$J(z) = \frac{N_S I}{L_S} = \mathrm{const}. \tag{10}$$

На практике распространена ситуация, когда плотность числа витков соленоида непостоянна[2)]. В этом случае функция $J(z)$ считается известной, например, из условий эксперимента. В любом случае такая функция должна удовлетворять условию нормировки (9).

Условия применимости формулы (8)

$$\frac{\omega}{c} R_S, \frac{\omega}{c} L_S \ll 1 \tag{11}$$

означают, что длина электромагнитной волны частоты ω велика по сравнению с размерами соленоида[3)]. В этих условиях плазменный соленоид, какие бы сложные электромагнитные процессы ни происходили в плазме, для электрической цепи играет роль сосредоточенного элемента, как обыкновенные катушка индуктивности, или конденсатор. Поэтому, в квазистационарном приближении для электрической цепи плазменный соленоид характеризуется одним единственным параметром — комплексным импедансом Z_S.

Для вычисления импеданса Z_S учтем, что в цепи с соленоидом действует э.д.с. индукции $\mathcal{E}_S$, «подключенная» в цепь последовательно с внешним источником. Поэтому закон Ома для полной цепи, изображенной на рис. 1, для комплексных амплитуд имеет вид $U_0 + \mathcal{E}_S = IR_0$. Сама же э.д.с. индукции по определению равна интегралу вдоль обмотки соленоида от компоненты напряженности электрического поля $E_\varphi(z,r)$. Учитывая, что длина обмотки соленоида равна $2\pi R_S N_S$, и вводя среднее по длине соленоида значение азимутальной составляющей напряженности электрического поля

$$\langle E_\varphi(z,R_S)\rangle = \frac{1}{L_S} \int_0^{L_S} E_\varphi(z,R_S) dz, \tag{12}$$

представим э.д.с. индукции в виде

$$\mathcal{E}_S = 2\pi R_S N_S \langle E_\varphi(z,R_S)\rangle. \tag{13}$$

Подставляя выражение (13) в закон Ома, запишем следующее соотношение:

$$U_0 = IR_0 - 2\pi R_S N_S \langle E_\varphi(z,R_S)\rangle, \tag{14}$$

которое при необходимости можно использовать в качестве дополнительного условия для уравнений (4). Соотношения типа (14) известны в литературе как уравнения внешней цепи [30].

Чтобы получить формулу для импеданса плазменного соленоида учтем, что напряжение внешнего источника распределяется на падение напряжения на сопротивлении R_0 и на падение напряжения на плазменном соленоиде, т.е. $U_0 = IR_0 + IZ_S$. Сравнивая последнее соотношение с выражением (14), для импеданса имеем

$$Z_S = -2\pi R_S N_S \langle E_\varphi(z,R_S)\rangle / I. \tag{15}$$

В силу граничного условия (6) и формулы (9) напряженность электрического поля в соленоиде пропорциональна току в цепи. Следовательно, величина (15) не зависит от тока, а определяется только соленоидом — его геометрией и параметрами плазмы. Используя общее соотношение $Z_S = -i\omega\Lambda_S$ можно вычислить и комплексную индуктивность плазменного соленоида Λ_S.

С помощью импеданса могут быть исследованы резонансные свойства плазменного соленоида и рассмотрен вопрос о выделении в плазме соленоида мощности внешнего источника, что для физики газоразрядных процессов имеет первостепенное значение. Для простейшей последовательной цепи (источник напряжения U_0 через активное сопротивление R_0 подключен к обмотке плазменного соленоида, рис. 1) мощность внешнего источника, выделяемая в плазме, определяется формулой [31]

$$W = \frac{1}{2}|U_0|^2 \frac{Z'_S}{(R_0 + Z'_S)^2 + (Z''_S)^2}, \tag{16}$$

[2)] В реальных экспериментах по индуктивному газовому разряду часто используются соленоиды весьма сложной формы. Поэтому их даже называют не соленоидами, а антеннами [1, 3].

[3)] Условие квазистационарности электрической цепи имеет вид (11) с заменой размеров соленоида на размер всей цепи в целом.

где $Z_S = Z'_S + iZ''_S$[4]. Как функция комплексной переменной ω, комплексный импеданс $Z_S(\omega)$ имеет полюса, в окрестности которых

$$Z_S = iA(\omega - \omega^{(\infty)})^{-1}, \tag{17}$$

и нули, вблизи которых

$$Z_S = iB(\omega - \omega^{(0)}), \tag{18}$$

где A и B — постоянные, а $\omega^{(\infty)}$ и $\omega^{(0)}$ — некоторые комплексные частоты [31]. В случае большого активного сопротивления цепи, $R_0 \gg |Z_S|$, мощность выделяемая в плазме дается формулой

$$W = \frac{|U_0|^2}{2R_0^2} Z'_S. \tag{19}$$

Как функция частоты ω величина (19) максимальна в максимумах действительной части импеданса, т.е. в точках $\omega = \mathrm{Re}\,\omega^{(\infty)}$. Известно, что при $\omega = \omega^{(\infty)}$ в цепи имеет место резонанс токов: импеданс максимален, а ток в цепи минимален. При малом сопротивлении R_0 для мощности (16) имеем

$$W = \frac{1}{2}|U_0|^2 \frac{Z'_S}{(Z'_S)^2 + (Z''_S)^2}. \tag{20}$$

Мощность (20) максимальна в нулях мнимой части импеданса $\omega = \mathrm{Re}\,\omega^{(0)}$, что имеет место при резонансе напряжений — импеданс минимален, а ток в цепи максимален[5]. Заметим, что экспериментальное наблюдение резонансов токов и напряжений в газовых разрядах базируется, в том числе и на формулах (19) и (20).

Область применимости формул (16)-(20), как и область применимости самого понятия импеданса, ограничивается условием квазистационарности электрической цепи [32]. При повышении частоты внешнего источника ω, когда условие квазистационарности нарушается, для вычисления мощности выделяемой в плазме соленоида следует использовать электродинамические методы. Исходим из формулы для плотности мощности $W = \langle \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \rangle$, где $\mathbf{E}$ — вектор напряженности электрического поля, $\mathbf{j}$ — вектор плотности тока, наведенного в плазме, а угловые скобки означают усреднение по периоду $2\pi/\omega$. Выражая плотность тока через напряженность поля и диэлектрическую проницаемость [33]

$$j_i = \frac{\omega}{4\pi i}(\varepsilon_{ij} - \delta_{ij})E_j, \tag{21}$$

после несложных вычислений для плотности мощности имеем

$$\begin{aligned} W(z,r) = \frac{\omega}{8\pi}[\varepsilon''_\perp(|E_r(z,r)|^2 + |E_\varphi(z,r)|^2) + \\ + \varepsilon''_{||}|E_z(z,r)|^2 - 2g''\mathrm{Im}\,(E_r^*(z,r)E_\varphi(z,r))], \end{aligned} \tag{22}$$

где индекс «два штриха» означает мнимую часть. Выполняя в (22) интегрирование по z от нуля до L_S и по r с весом $2\pi r$ от нуля до R_S, можно вычислить полную мощность внешнего источника, выделяемую в плазме соленоида $W(\omega)$. В общем случае это удается осуществить только численно.

Входящие в (22) компоненты напряженности электрического поля вычисляются из однородной системы уравнений (4) с граничными условиями (6) и (7). В связи с этим опять встает вопрос об определении функции $J(z)$, но уже за пределами применимости квазистационарного приближения, когда рассмотрение системы, изображенной на рис. 1 электротехническими методами недопустимо. В этом случае следует решать полную электродинамическую задачу для соленоида, подводящих проводов, источника напряжения и даже части окружающего пространства, что вряд ли выполнимо. Наша цель — получить компактные, физически наглядные и полезные для экспериментальных исследований результаты. Независимо от частоты стационарно подаваемого на антенну соленоида сигнала в ней устанавливается некоторое распределение тока $J(z)$. Задавая его из каких-то разумных физических соображений и определяя из системы (4) компоненты вектора напряженности электрического поля, можно по формуле (22) вычислить энергию, выделяемую в плазме соленоида и главное — исследовать резонансные свойства соленоида с плазменным заполнением, что и будет проделано в дальнейшем. В пределах применимости формулы (9) мощность, выделяемая в плазме $W(\omega)$, может быть представлена в виде $W(\omega) = R_{eff}I^2/2$, где R_{eff} — эффективное сопротивление плазмы. В квазистационарной области частот эффективное сопротивление, разумеется, должно совпадать с вещественной частью импеданса.

[4] Излагаемые здесь элементарные сведения из электротехники относятся не только к плазменному соленоиду, но и к любому другому элементу электрической цепи.

[5] Исторически названия резонансы токов и напряжений возникли в связи с исследованием параллельного и последовательного колебательных контуров, состоящих из активного сопротивления, емкости и индуктивности.

3. ПЛАЗМЕННЫЙ СОЛЕНОИД БОЛЬШОЙ ДЛИНЫ С ПОСТОЯННОЙ ПЛОТНОСТЬЮ ЧИСЛА ВИТКОВ ОБМОТКИ

Предположим, что выполнено неравенство

$$R_S \ll L_S, \tag{23}$$

т.е. длина соленоида существенно превышает его радиус. В этом случае разумно полагать, что процессы в окрестностях продольных границ соленоида $z = 0, L_S$ (краевые эффекты) мало влияют на происходящее в его объеме. Поэтому можно считать, что продольное распределение электромагнитного поля в соленоиде определяется не условиями на продольных границах, а какими-то другими факторами. В силу линейности уравнений (4) и граничных условий (6) и (7), единственным таким фактором является плотность числа витков обмотки соленоида, т.е. функция $J(z)$. Начнем с простейшего случая постоянной плотности тока (10).

Считая электромагнитное поле в соленоиде независящим от координаты z, в уравнениях (4) полагаем $\partial/\partial z = 0$. При этом третье уравнение системы (4) становится независимым от первых двух уравнений. В результате компонента поля E_z, не входящая также в граничное условие (6), оказывается независимой от компонент E_r и E_φ, а поэтому можно положить $E_z = 0$. Тогда из первых двух уравнений системы (4), после исключения E_r, получается следующее уравнение:

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}rE_\varphi\right) + \frac{\omega^2}{c^2}\tilde{\varepsilon}_\perp E_\varphi = 0, \quad \tilde{\varepsilon}_\perp = \varepsilon_\perp - \frac{g^2}{\varepsilon_\perp}, \tag{24}$$

справедливое как внутри соленоида ($r < R_S$), так и вне его ($r > R_S$); вне соленоида $\tilde{\varepsilon}_\perp = 1$. Граничные условия для уравнения (24) с учетом (6), (7) и (10) имеют вид

$$\begin{gathered} E_\varphi(R_S+0) - E_\varphi(R_S-0) = 0, \\ \frac{dE_\varphi}{dr}(R_S+0) - \frac{dE_\varphi}{dr}(R_S-0) = -i\frac{\omega}{c}\frac{4\pi}{c}\frac{N_S}{L_S}I. \end{gathered} \tag{25}$$

Кроме того, функция $E_\varphi(r)$ должна быть ограничена в нуле и на бесконечности.

При $r < R_S$ ограниченное решение уравнения (24) имеет вид $E_\varphi(r) = A_1 J_1\left[(\omega/c)\sqrt{\tilde{\varepsilon}_\perp}r\right]$, где $J_1(x)$ — функция Бесселя 1-го порядка. В области $r > R_S$ решение нужно взять следующее: $E_\varphi(r) = A_2 H_1^{(1)}\left[(\omega/c)r\right]$, где $H_1^{(1)}(x)$ — функция Ганкеля 1-го рода. Записывая решение через функцию Ганкеля 1-го рода, мы использовали принцип причинности (условие излучения [34]), согласно которому при $\omega = \omega + i\delta$ при $\delta \to +0$, поле должно экспоненциально затухать при $r \to \infty$ ($\sim \exp(-\delta r/c)$). Подставляя найденные решения в граничные условия (25) и определяя постоянные $A_{1,2}$, находим электрическое поле в объеме соленоида ($r \le R_S$)

$$E_\varphi(r) = i\frac{4\pi}{c}\frac{N_S}{L_S}I\frac{J_1\left[(\omega/c)\sqrt{\tilde{\varepsilon}_\perp}r\right]H_1^{(1)}\left[(\omega/c)R_S\right]}{\sqrt{\tilde{\varepsilon}_\perp}J_0\left[(\omega/c)\sqrt{\tilde{\varepsilon}_\perp}R_S\right]H_1^{(1)}\left[(\omega/c)R_S\right] - J_1\left[(\omega/c)\sqrt{\tilde{\varepsilon}_\perp}R_S\right]H_0^{(1)}\left[(\omega/c)R_S\right]}. \tag{26}$$

В квазистационарном приближении, учитывая первое неравенство (11) и асимптотику цилиндрических функций при малом значении аргумента, решение (26) преобразуем к виду

$$E_\varphi(r) = i\frac{4\pi}{c}\frac{N_S}{L_S}I\frac{J_1\left[(\omega/c)\sqrt{\tilde{\varepsilon}_\perp}r\right]}{\sqrt{\tilde{\varepsilon}_\perp}J_0\left[(\omega/c)\sqrt{\tilde{\varepsilon}_\perp}R_S\right]}. \tag{27}$$

Решение (27) можно получить и напрямую из уравнения (24). Действительно, в квазистационарном приближении в уравнении (24) в области $r > R_S$ следует отбросить второе слагаемое в левой части. Ограниченное на бесконечности решение получившегося при этом уравнения имеет вид $E_\varphi(r) = A_2/r$. Его подстановка в граничные условия (25) опять приводит к формуле (27). Заметим, что даже в квазистационарном приближении в левой части уравнения (24) мы не отбрасываем второе слагаемое, пропорциональное $\tilde{\varepsilon}_\perp(\omega^2/c^2)R_S^2$. Например, при $\omega \approx \Omega_e$ это слагаемое существенно и в квазистационарном приближении. И вообще, если это слагаемое отбросить, то от плазмы ничего не останется.

Между решениями (26) и (27) имеется важное различие. Решение (26) учитывает вынос электромагнитного излучения из соленоида через его боковую поверхность $r = R_S$. Квазистационарное решение (27) такого излучения естественно не учитывает. Но в области высоких частот $\omega > c/R_S$ излучение из соленоида в общем балансе энергии может играть заметную роль, как некий дополнительный канал расхода энергии внешнего источника. Чтобы исключить излучение через боковую поверхность соленоида, можно предположить, что соленоид заключен в проводящий цилиндрический кожух радиуса $r = \mathcal{R} > R_S$. Тогда, дополняя краевую задачу (24), (25) условием $E_\varphi(\mathcal{R}) = 0$ и находя ее решение, не сложно получить для $E_\varphi(r)$ выражение, отличающееся от (26) только заменой функций Ганкеля $H_{0,1}^{(1)}[(\omega/c)R_S]$ на функции $X_{0,1}[(\omega/c)R_S] = J_{0,1}[(\omega/c)R_S]N_1[(\omega/c)\mathcal{R}] - N_{0,1}[(\omega/c)R_S]J_1[(\omega/c)\mathcal{R}]$.

Вычислим теперь импеданс рассматриваемого соленоида. Используем для этого результат квазистационарного приближения (27), подставляя который в формулу (15), имеем

$$Z_S(\omega) = Z'_S(\omega) + iZ''_S(\omega) = = -i\omega\Lambda_0 \frac{2J_1\left[(\omega/c)\sqrt{\tilde{\varepsilon}_\perp}R_S\right]}{(\omega/c)\sqrt{\tilde{\varepsilon}_\perp}R_S J_0\left[(\omega/c)\sqrt{\tilde{\varepsilon}_\perp}R_S\right]}, \quad (28)$$

где $\Lambda_0 = 4\pi^2 R_S^2 N_S^2 c^{-2} L_S^{-1}$ — индуктивность соленоида без плазменного заполнения. Приведем еще формулу для импеданса плазменного соленоида, заключенного в проводящий кожух

$$Z_S(\omega) = -i\omega\Lambda_0 \frac{2\left[(\omega/c)R_S\right]^{-1} J_1\left[(\omega/c)\sqrt{\tilde{\varepsilon}_\perp}R_S\right] X_1\left[(\omega/c)R_S\right]}{\sqrt{\tilde{\varepsilon}_\perp}J_0\left[(\omega/c)\sqrt{\tilde{\varepsilon}_\perp}R_S\right] X_1\left[(\omega/c)R_S\right] - J_1\left[(\omega/c)\sqrt{\tilde{\varepsilon}_\perp}R_S\right] X_0\left[(\omega/c)R_S\right]}. \quad (28a)$$

Индуктивность плазменного соленоида можно определить формулой $\Lambda_S(\omega) = -Z''_S(\omega)/\omega$, а его активное сопротивление равно вещественной части импеданса $Z'_S(\omega)$.

Проанализируем выражение (28) для плазмы с диэлектрической проницаемостью (1), (2). Если столкновения отсутствуют, то активное сопротивление плазменного соленоида равно нулю, а выражение для его индуктивности оказывается следующим:

$$\Lambda_S(\omega) = \Lambda_0 \frac{2J_1(a)}{aJ_0(a)}, \quad a^2 = \frac{(\omega^2-\omega_{Le}^2)^2 - \omega^2\Omega_e^2}{\omega^2 - \Omega_g^2}\frac{R_S^2}{c^2}, \quad (29)$$

где $\Omega_g = \sqrt{\omega_{Le}^2 + \Omega_e^2}$ — верхняя гибридная частота. Рассмотрим предельные случаи. В отсутствие плазмы, т.е. при $\omega_{Le} = 0$, с учетом условия квазистационарности (11) для индуктивности (29) имеем, как и должно быть, $\Lambda_S(\omega) = \Lambda_0$. В отсутствии внешнего магнитного поля ($\Omega_e = 0$) формула (29) преобразуется к виду

$$\Lambda_S(\omega) = \Lambda_0 \frac{2J_1\left(\sqrt{\omega^2-\omega_{Le}^2}R_S/c\right)}{\left(\sqrt{\omega^2-\omega_{Le}^2}R_S/c\right)J_0\left(\sqrt{\omega^2-\omega_{Le}^2}R_S/c\right)}. \quad (30)$$

В квазистационарной области частот индуктивность (30) ни нулей, ни полюсов не имеет. При $\omega \to \omega_{Le}$ индуктивность (30) стремится к индуктивности соленоида без плазменного заполнения Λ_0. В случае $\omega < \omega_{Le}$ формулу (30) удобно записать следующим образом:

$$\Lambda_S(\omega) = \Lambda_0 \frac{2I_1\left(\sqrt{\omega_{Le}^2-\omega^2}R_S/c\right)}{\left(\sqrt{\omega_{Le}^2-\omega^2}R_S/c\right)I_0\left(\sqrt{\omega_{Le}^2-\omega^2}R_S/c\right)}. \quad (31)$$

Индуктивность (31) меньше, чем Λ_0, что связано с экранированием низкочастотного поперечного поля в плазме. При $\omega_{Le}R_S/c \gg 1$ и $\omega \ll \omega_{Le}$ (случай плотной плазмы) из (31) имеем $\Lambda_S(\omega) = 2c\Lambda_0/(\omega_{Le}R_S) \ll \Lambda_0$. В пределе сильного внешнего магнитного поля ($\Omega_e \to \infty$) из (29) имеем $\Lambda_S(\omega) = \Lambda_0$. Последнее понятно: в сильном магнитном поле поперечные движения электронов запрещены, что для азимутального электрического поля эквивалентно отсутствию плазмы. Таким образом, в предельных случаях нулевого и очень сильного внешнего магнитного поля в квазистационарной области частот индуктивность плазменного соленоида каких-либо резонансных особенностей не имеет.

При промежуточных значениях циклотронной и ленгмюровской частот, нули и полюса индуктивности (29) и импеданса (28) могут попадать в низкочастотную (квазистационарную) область. Из формулы (28) следует, что при отсутствии столкновений нули и полюса импеданса плазменного соленоида совпадают с корнями уравнения

$$\frac{(\omega^2-\omega_{Le}^2)^2 - \omega^2\Omega_e^2}{\omega^2 - \Omega_g^2} = \mu_n^2\frac{c^2}{R_S^2}, \quad \mu_n = \begin{cases} \mu_{1n}, \\ \mu_{0n}. \end{cases} \quad (32)$$

При $\mu_n = \mu_{1n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ из (32) определяются нули $\omega = \omega_n^{(0)}$, а при $\mu_n = \mu_{0n}$ уравнение (32) дает полюса $\omega = \omega_n^{(\infty)}$ импеданса (28). Здесь μ_{1n} — корни уравнения $J_1(x) = 0$, а μ_{0n} — корни уравнения $J_0(x) = 0$. Несложно видеть, что в интересующую нас квазистационарную область частот корни уравнения (32) попадают только при $\Omega_e R_S/c < 1$ и $\omega_{Le}R_S/c < 1$. В противном случае резонансных точек у импеданса (28) в квазистационарной области частот нет.

Используя первое неравенство (11), легко показать, что в интересующей нас области частот и параметров плазмы корни уравнения (32) определяются следующей приближенной формулой:

$$\omega_n^{(0,\infty)} \approx \Omega_g \sqrt{\left(1+\frac{\Omega_e^2}{\Omega_g^2}\frac{\Omega_e^2 R_S^2}{c^2\mu_n^2}\right)\left(1+\frac{\Omega_e^2 R_S^2}{c^2\mu_n^2}\right)^{-1}} \le \Omega_g. \tag{33}$$

При получении (33) использован тот факт, что μ_n^2 являются достаточно большими величинами (не менее $\mu_{01}^2 \approx 5.8$). При $\Omega_e \to 0$ все корни (33) становятся равными ω_{Le}.

Точки, определяемые формулами (33), расположены достаточно близко друг к другу. Поэтому даже при небольшой диссипации соседние нули $\omega_n^{(0)}$ и полюса $\omega_n^{(\infty)}$ становятся неразличимыми. Резонансное поглощение энергии внешнего источника в плазме все же имеется (несмотря на слияние резонансов), причем на частоте ω, близкой к верхней гибридной частоте Ω_g. То, что резонансное поглощение должно происходить именно вблизи Ω_g видно уже из формулы (33), поскольку для всех больших n имеем $\omega_n^{(0,\infty)} \approx \Omega_g$.

На рис. 2 показаны вещественная (сплошная линия) и мнимая (штриховая линия) части импеданса однородного плазменного соленоида без кожуха в зависимости от частоты внешнего источника при $\omega_{Le}R_S/c = 0.5$, $\Omega_e R_S/c = 0.7$ и $\nu_e = 0.03\omega_{Le}$. Значительное поглощение и возмущение мнимой части импеданса наблюдаются вблизи частот (33), т.е. около Ω_g, что связано с резонансным возбуждением в плазме электромагнитных колебаний B-типа. Штриховая кривая фактически представляет собой индуктивность плазменного соленоида и за исключением узкой области, вблизи частот (33) индуктивность плазменного соленоида близка к вакуумному значению Λ_0. Заметим, что параметр $\omega R_S/c$ принимает на рис. 2 довольно большие значения, а поэтому рис. 2 находится на грани применимости квазистационарного приближения. Мы привели здесь такой «не вполне надежный» рисунок только для того, чтобы сделать более заметными характерные особенности импеданса и индуктивности плазменного соленоида. При уменьшении параметра $\Omega_g R_S/c$ структура зависимостей, представленных на рис. 2 сохраняется, но особенности кривых становятся менее выраженными. Кроме того, как показывают расчеты, вещественная часть импеданса с хорошей точностью совпадает с эффективным сопротивлением, вычисленным исходя из выражения для объемной плотности энергии (22), и за пределами квазистационарного приближения. Поэтому в дальнейшем для обозначения эффективного сопротивления будем использовать обозначение Z'_S, такое же, как и для вещественной части импеданса.

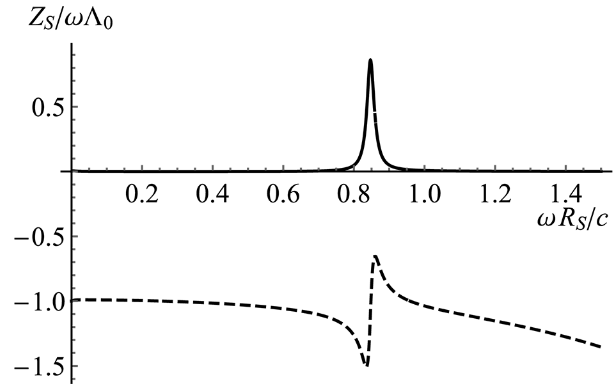

Рис. 2. Комплексный импеданс однородного плазменного соленоида без кожуха: сплошная линия — вещественная часть, штриховая — мнимая часть

Согласно «каноническим» формулам (17) и (18) в точке $\omega = \omega^{(\infty)}$ (при резонансе токов) мнимая часть импеданса обращается в ноль, а вещественная часть достигает максимума, а в точке $\omega = \omega^{(0)}$ (при резонансе напряжений) обращается в ноль мнимая часть импеданса. Как видно из рис. 2, мнимая часть импеданса в ноль не обращается вообще. Такое не совсем обычное поведение импеданса в резонансной точке обусловлено слиянием близко расположенных друг к другу полюсов $\omega_n^{(\infty)}$ и нулей $\omega_n^{(0)}$. Поскольку действительная часть импеданса на рис. 2 имеет достаточно резкий максимум, соответствующий резонанс следует однозначно классифицировать как резонанс токов. Заметим, что различие между резонансами токов и напряжений в плазменном соленоиде определяется величиной компоненты поля $E_\varphi(r)$ на обмотке соленоида (см. формулу (27)): когда $E_\varphi(R_S)$ достигает максимального значения, имеет место резонанс токов, а когда $E_\varphi(R_S) \approx 0$ падение напряжения на соленоиде мало и реализуется резонанс напряжений. Расчеты показывают (см. рис. 2 и далее), что для плазменного соленоида резонанс напряжений является нетипичным явлением.

На рис. 3 в зависимости от безразмерной циклотронной частоты $\Omega_e R_S/c$ представлены вещественные части импеданса (28), рассчитанные при различных плазменных частотах $\omega_{Le}R_S/c = 0.1$; 0.2; 0.25; 0.285; 0.3, постоянной частоте источника $\omega R_S/c = 0.3$ и $\nu_e = 0.03\omega_{Le}$. Резонансные циклотронные частоты определяются из уравнений

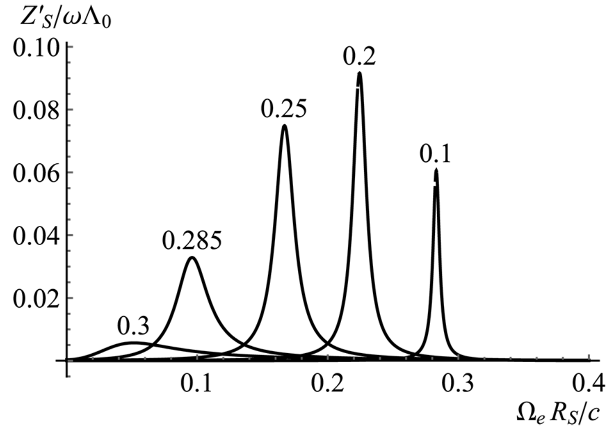

Рис. 3. Вещественная часть импеданса однородного плазменного соленоида. Числа около кривых соответствуют значению $\omega_{Le}R_S/c$

$\omega = \omega_n^{(\infty)}$, решая которые с хорошей точностью имеем $\Omega_e \approx \sqrt{\omega^2 - \omega_{Le}^2}$, что полностью согласуется с рис. 3. При увеличении ω_{Le} резонансы смещаются в область меньших циклотронных частот, а при $\omega_{Le} > \omega$ вообще пропадают. В соответствии с формулой (19) кривые, представленные на рис. 3, определяют в относительных единицах мощности источника, выделяемые в плазменном соленоиде, когда активное сопротивление цепи велико.

При повышении частот Ω_e и ω_{Le} резонансная частота выходит за пределы квазистационарного частотного диапазона. При этом для исследования резонанса в плазменном соленоиде следует использовать формулу (22), которая в рассматриваемом сейчас случае записывается в виде

$$W(r) = \frac{\omega}{8\pi} q |E_\varphi(r)|^2, \\ q = \varepsilon''_\perp \left(1 + |g|^2/|\varepsilon_\perp|^2\right) - 2g''\mathrm{Re}\left(g/\varepsilon_\perp\right). \tag{34}$$

Здесь было учтено первое уравнение системы (4) при $\partial/\partial z = 0$. Подставляя в (34) поле (26) и выполняя интегрирование по объему соленоида, можно получить выражение для полной мощности внешнего источника, выделяемой в плазме, которое из-за громоздкости мы здесь не приводим, а результат расчета для плазменного соленоида с параметрами $\omega_{Le}R_S/c = 5$, $\Omega_e R_S/c = 7$, $\nu_e = 0.03\omega_{Le}$ представлен на рис. 4а. Как видно, пики эффективного сопротивления оказываются широкими и размытыми. Все это свидетельствует о том, что мощность источника расходуется не на возбуждение собственных волн в плазме, а идет на излучение из соленоида. Это обстоятельство следует принимать во внимание при интерпретации экспериментов по индуктивным разрядам в области частот, сопоставимых с величинами c/R_S и c/L_S.

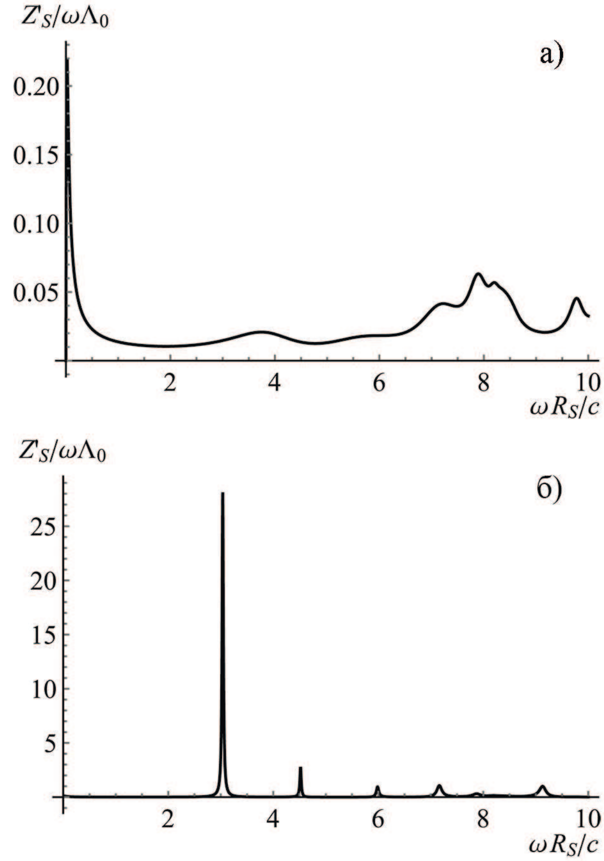

Рис. 4. Эффективное сопротивление однородного плазменного соленоида при учете выноса излучения (а) и при наличии ограничивающего кожуха (б)

Ранее уже говорилось, что избежать излучения из соленоида можно при помощи экранирующего кожуха, окружающего соленоид. На рис. 4б представлен результат расчета мощности источника для соленоида с кожухом при $\mathcal{R}/R_S = 1.6$. Расчет был проведен по формуле (34) с полем (26), в котором функции Ганкеля заменены на функции $X_{0,1}[(\omega/c)R_S]$. Как видим, результат кардинально отличается от представленного на рис. 4а.

4. ОГРАНИЧЕННЫЙ ПЛАЗМЕННЫЙ СОЛЕНОИД БЕЗ ВНЕШНЕГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Теория плазменного соленоида существенно усложняется в случае, когда электромагнитное поле в соленоиде зависит от продольной координаты z. Такая зависимость естественным образом возникает в соленоиде с переменной плотностью числа витков обмотки, если число витков не велико или в ограниченном соленоиде, у которого на границах $z = 0$ и $z = L_S$ расположены проводящие плоскости. Рассмотрим случай ограниченного соленоида. На проводящих плоскостях равны нулю тангенциальные составляющие напряженности электрического поля. Поэтому имеют место следующие граничные условия:

$$E_r|_{z=0} = E_r|_{z=L_S} = 0, \quad E_\varphi|_{z=0} = E_\varphi|_{z=L_S} = 0. \tag{35}$$

Учитывая граничные условия (35), будем искать решение уравнений (4) в виде

$$\begin{aligned} E_r(z,r) &= \sum_{n=1} E_{rn}(r)\sin(k_{zn}z), \\ E_\varphi(z,r) &= \sum_{n=1} E_{\varphi n}(r)\sin(k_{zn}z), \\ E_z(z,r) &= \sum_{n=1} E_{zn}(r)\cos(k_{zn}z), \end{aligned} \tag{36}$$

где $k_{zn} = \pi n/L_S$ — продольные волновые числа, возбуждаемых в соленоиде электромагнитных колебаний. Подстановка разложений (36) в уравнения (4) приводит к следующим уравнениям для функций $E_{rn}(r)$, $E_{\varphi n}(r)$ и $E_{zn}(r)$:

$$\begin{gathered} \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}rE_{\varphi n}\right) - k_{zn}^2 E_{\varphi n} + \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_\perp E_{\varphi n} - \\ -i\frac{\omega^2}{c^2} g E_{rn} = 0, \\ k_{zn}\left(k_{zn}E_{rn} - \frac{dE_{zn}}{dr}\right) - \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_\perp E_{rn} - \\ -i\frac{\omega^2}{c^2} g E_{\varphi n} = 0, \\ \frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\left(\frac{dE_{zn}}{dr} - k_{zn}E_{rn}\right) + \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{||}E_{zn} = 0. \end{gathered} \tag{37}$$

Здесь компоненты тензора диэлектрической проницаемости являются функциями координаты r, поэтому уравнения (37) справедливы как в плазме, так и вне плазмы. Подставляя второе выражение (36) в (14) и учитывая (12), преобразуем уравнение внешней цепи к виду

$$U_0 = IR_0 - \pi R_S N_S \sum_{n=1} P_n E_{\varphi n}(R_S), \tag{38}$$

где

$$P_n = \int_0^\pi \sin nx dx \Big/ \int_0^\pi \sin^2 nx dx = 2\frac{1-\cos\pi n}{\pi n}. \tag{39}$$

Наконец, подставляя второе выражение (36) в граничное условие (6), получаем

$$\begin{gathered} \frac{dE_{\varphi n}}{dr}(R_S+0) - \frac{dE_{\varphi n}}{dr}(R_S-0) = \\ = -i\frac{\omega}{c}\frac{4\pi}{c}\frac{2}{L_S}\int_0^{L_S} J(z)\sin(k_{zn}z)dz. \end{gathered} \tag{40}$$

Если плотность обмотки соленоида постоянна по длине соленоида и число витков достаточно велико, то граничное условие (40) упрощается. Тогда, с учетом непрерывности тангенциальных составляющих электрического поля (7), имеем следующие граничные условия для уравнений (37):

$$\begin{gathered} E_{\varphi n}(R_S+0) - E_{\varphi n}(R_S-0) = 0, \\ E_{zn}(R_S+0) - E_{zn}(R_S-0) = 0, \\ \frac{dE_{\varphi n}}{dr}(R_S+0) - \frac{dE_{\varphi n}}{dr}(R_S-0) = \\ = -i\frac{\omega}{c}\frac{4\pi}{c}\frac{N_S}{L_S}IP_n. \end{gathered} \tag{41}$$

Заметим, что коэффициенты P_n зависят от конструкции катушки, охватывающей плазму, и от условий на продольных границах плазмы, т.е. в принципе P_n могут определяться какими-то другими формулами. Мы будем использовать формулы (39).

Исключая функции E_{rn}, запишем уравнения поля (37) в виде

$$\begin{gathered} \frac{d}{dr}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rE_{\varphi n}) - \left(\chi_n^2 - \frac{\omega^4}{c^4\chi_n^2}g^2\right)E_{\varphi n} = \\ = i\frac{\omega^2}{c^2}\frac{k_{zn}}{\chi_n^2}g\frac{dE_{zn}}{dr}, \\ \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{\varepsilon_\perp}{\chi_n^2}\frac{dE_{zn}}{dr}\right) - \varepsilon_{||}E_{zn} = \\ = -ik_{zn}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{g}{\chi_n^2}E_{\varphi n}\right), \end{gathered} \tag{42}$$

где

$$\chi_n^2 = k_{zn}^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_\perp. \tag{43}$$

Уравнения (42) справедливы как в объеме плазмы (при $r < R_S$), так и во внешнем пространстве (при $r > R_S$).

Анализ системы (42) начнем со случая отсутствия внешнего магнитного поля, когда $g = 0$, $\varepsilon_\perp = \varepsilon_{||}$. В этом случае второе уравнение системы (42) отцеплено от первого уравнения, и компоненту E_z, поскольку она не возбуждается азимутальным током, можно положить равной нулю. При этом первое уравнение упрощается:

$$\frac{d}{dr}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}rE_{\varphi n} - \chi_n^2 E_{\varphi n} = 0. \tag{44}$$

Если предположить, что выполнено неравенство

$$\omega < \pi c/L_S, \tag{45}$$

которое согласуется с общим условием квазистационарности, то ограниченное в нуле и на бесконечности решение уравнения (44) имеет вид

$$E_{\varphi n}(r) = \begin{cases} A_n I_1(\chi_n r), & r < R_S, \\ B_n K_1(\chi_{0n} r), & r > R_S, \end{cases} \tag{46}$$

где A_n и B_n — постоянные, а χ_{0n}^2 — величины (43), взятые при $\varepsilon_\perp = 1$.

При большой длине соленоида, или в высокочастотной области, неравенство (45) является слишком жестким. Если не использовать неравенство (45), то возникает трудность при записи ограниченного на бесконечности решения уравнения (44). В этом случае решение можно выразить через функцию Ганкеля $H_1^{(1)}(\sqrt{\omega^2/c^2 - k_{zn}^2}r)$ (см. вывод формулы (26)), а можно предположить, что соленоид заключен в проводящий цилиндрический кожух радиуса $r = \mathcal{R} > R_S$. При наличии кожуха вместо (46) имеем следующее решение:

$$E_{\varphi n}(r) = \begin{cases} A_n I_1(\chi_n r), & r < R_S, \\ B_n[K_1(\chi_{0n} r) I_1(\chi_{0n}\mathcal{R}) - I_1(\chi_{0n} r) K_1(\chi_{0n}\mathcal{R})] \equiv B_n X_1(\chi_{0n} r), & R_S < r < \mathcal{R}. \end{cases} \tag{47}$$

Для определения постоянных A_n и B_n решение (46) сшивается в точке $r = R_S$ при помощи первого и третьего условий (41). В результате для азимутальной составляющей напряженности электрического поля соленоида без проводящего кожуха получаем следующее выражение (при $r \le R_S$):

$$E_{\varphi n}(r) = i\frac{\omega}{c}\frac{4\pi}{c}\frac{N_S}{L_S}P_n \frac{I_1(\chi_n r) K_1(\chi_{0n} R_S)}{\chi_n I_0(\chi_n R_S) K_1(\chi_{0n} R_S) + \chi_{0n} I_1(\chi_n R_S) K_0(\chi_{0n} R_S)} I. \tag{48}$$

Подставляя (48) в уравнение цепи (38) и учитывая формулу (15), получим следующее выражение для импеданса ограниченного плазменного соленоида без кожуха в отсутствие внешнего магнитного поля

$$Z_S(\omega) = -i\omega\Lambda_0 \sum_{n=1} P_n^2 \frac{I_1(\chi_n R_S) K_1(\chi_{0n} R_S)}{\chi_n R_S I_0(\chi_n R_S) K_1(\chi_{0n} R_S) + \chi_{0n} R_S I_1(\chi_n R_S) K_0(\chi_{0n} R_S)}. \tag{49}$$

В случае плазменного соленоида с проводящим кожухом (в этом случае вместо (46) берется решение (47)) комплексный импеданс имеет вид

$$Z_S(\omega) = -i\omega\Lambda_0 \sum_{n=1} P_n^2 \frac{I_1(\chi_n R_S) X_1(\chi_{0n} R_S)}{\chi_n R_S I_0(\chi_n R_S) X_1(\chi_{0n} R_S) + \chi_{0n} R_S I_1(\chi_n R_S) X_0(\chi_{0n} R_S)}, \tag{49a}$$

где $X_0(\chi_{0n} r) = K_0(\chi_{0n} r) I_1(\chi_{0n}\mathcal{R}) + I_0(\chi_{0n} r) K_1(\chi_{0n}\mathcal{R})$. Формулой (49) можно пользоваться только в частотном диапазоне (45). В случае формулы (49a) подобное ограничение отсутствует.

Знаменатели в выражении (49)

$$D_{Bn}(\chi_n R_S) \equiv \chi_n I_0(\chi_n R_S) K_1(\chi_{0n} R_S) + \\ + \chi_{0n} I_1(\chi_n R_S) K_0(\chi_{0n} R_S) \tag{50}$$

являются дисперсионными функциями для волн B-типа плазменного цилиндра со свободной поверхностью. Таких волн в плазменном цилиндре без внешнего магнитного поля нет, поскольку дисперсионные уравнения $D_{Bn} = 0$ при $\nu_e = 0$ вещественных решений относительно частоты ω не имеют[6]. Таким образом, у импеданса (49) резонансные особенности — нули и полюса — отсутствуют. Следовательно, отсутствует и резонансное поглощение мощности внешнего источника в ограниченном плазменном соленоиде без кожуха и внешнего магнитного поля. Ранее тот же результат был получен для однородного соленоида, при расчете которого полагалось $\partial/\partial z = 0$ (см. формулы (30) и (31)). У импеданса, определяемого формулой (49a), резонансные особенности имеются, но только в высокочастотной обла-

[6] Комплексные решения соответствуют затухающим возмущениям поля. Затухание обусловлено свободным излучением в окружающее плазменный цилиндр пространство. Плазменный цилиндр со свободной поверхностью для полей B-типа волноводом не является.

сти, где квазистационарное приближение, а значит и само понятие импеданса, неприменимы.

На рис. 5 представлен комплексный импеданс (49) ограниченного плазменного соленоида с однородной плотностью обмотки в отсутствие внешнего магнитного поля при $\omega_{Le}R_S/c = 0.5$, $\nu_e = 0.03\omega_{Le}$, $L_S/R_S = 2$. Монотонный характер представленных зависимостей свидетельствует об отсутствии резонансов, связанных с возбуждением собственных волн B-типа в плазменном цилиндре со свободной поверхностью. Приведенная на рис. 5 зависимость мнимой части импеданса свидетельствует об отсутствии зависимости индуктивности от частоты. Примерно такой же вид имеет импеданс соленоида, рассчитанный по формуле (49а).

Импеданс и индуктивность ограниченного соленоида зависят от его длины L_S. От длины зависит и индуктивность вакуумного соленоида Λ_0, но в случае ограниченного плазменного соленоида эта зависимость существенно более сильная. На рис. 6 в зависимости от длины L_S показана относительная индуктивность плазменного соленоида Λ_S/Λ_0, вычисленная по импедансу (49а). При больших значениях L_S она стремится к относительной индуктивности плазменного соленоида большой длины, вычисленной по импедансу (28а). Интуитивно ясно, что чем длиннее соленоид, тем меньше влияние его границ $z = 0, L_S$. Рис. 6 свидетельствует, что это именно так.

При нарушении условия квазистационарности формулы (49) и (49а) непригодны, непригодна и формула (48) для гармоник азимутальной составляющей напряженности электрического поля, поскольку не учитывает излучения через боковую поверхность соленоида. Вместо учета излучения предположим наличие проводящего кожуха радиуса $\mathcal{R}$, охватывающего соленоид. Поле в плазме в этом случае дается формулой (48), в которой функции $K_{0,1}(\chi_{0n}R_S)$ заменены на $X_{0,1}(\chi_{0n}R_S)$. Подставляя $E_{\varphi n}(r)$ во вторую формулу (36), а затем в формулу (22), после интегрирования по объему соленоида получим следующее выражение для мощности источника, выделяемой в плазменном соленоиде с кожухом в отсутствие внешнего магнитного поля:

$$W(\omega) = \omega\frac{\Lambda_0 I^2}{2}\varepsilon''_\perp\sum_n\left|\frac{(\omega/c)X_1(\chi_{0n}R_S)}{\chi_n I_0(\chi_n R_S)X_1(\chi_{0n}R_S)+\chi_{0n}I_1(\chi_n R_S)X_0(\chi_{0n}R_S)}\right|^2\frac{P_n^2}{R_S^2}\int\limits_0^{R_S} I_1(\chi_n r)I_1(\chi_n^* r)r\,dr \qquad (51)$$

Для плазменного соленоида с параметрами $\omega_{Le}R_S/c = 5$, $\nu_e = 0.03\omega_{Le}$, $L_S/R_S = 2$ и $\mathcal{R}/R_S = 1.6$ мощность (51) приведена на рис. 7. Видно, что за пределами квазистационарной области частот появились максимумы мощности. Они обусловлены резонансным возбуждением источником собственных волн B-типа волновода радиуса $\mathcal{R}$ с плазменным цилиндром радиуса R_S. Можно показать, что в знаменателе выражения под знаком модуля в (51) находится дисперсионная функция именно этих волн (эта же функция находится в знаменателе выражения (49а)).

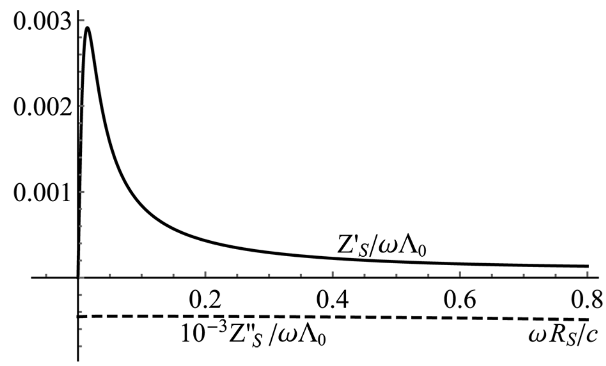

Рис. 5. Комплексный импеданс ограниченного плазменного соленоида без кожуха в отсутствие внешнего магнитного поля

5. ОГРАНИЧЕННЫЙ ПЛАЗМЕННЫЙ СОЛЕНОИД С МАГНИТОАКТИВНОЙ ПЛАЗМОЙ

Перейдем теперь к общему случаю магнитоактивной плазмы. В области $r < R_S$ решение уравнений (42) ищем в виде

$$\begin{aligned} E_{\varphi n} &= A_n J_1(\kappa_n r), \\ E_{zn} &= B_n J_0(\kappa_n r), \end{aligned} \qquad (52)$$

где A_n, B_n — постоянные, а κ_n — неизвестные собственные значения. Подстановка (52) в уравнения

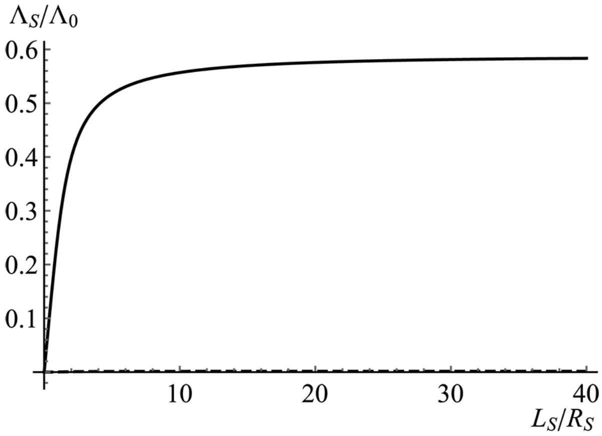

Рис. 6. Индуктивность ограниченного плазменного соленоида в зависимости от его длины

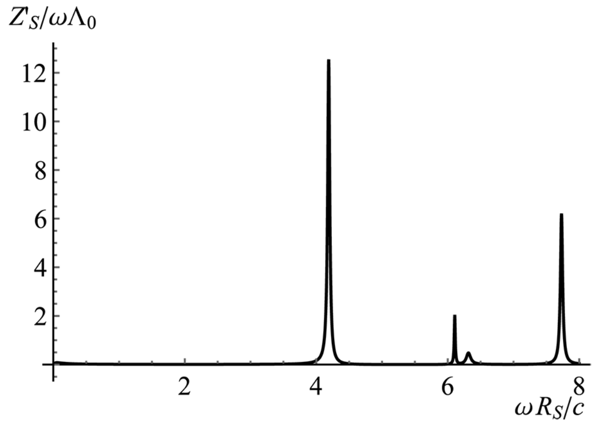

Рис. 7. Эффективное сопротивление ограниченного плазменного соленоида с кожухом в отсутствие внешнего магнитного поля

(42) приводит к однородной системе двух уравнений для A_n, B_n

$$\left[\kappa_n^2+\left(\chi_n^2-\frac{\omega^4}{c^4\chi_n^2}g^2\right)\right]A_n=i\frac{\omega^2}{c^2}\frac{k_{zn}\kappa_n}{\chi_n^2}gB_n,$$
$$\left(\kappa_n^2+\frac{\varepsilon_{||}}{\varepsilon_\perp}\chi_n^2\right)B_n=ik_{zn}\kappa_n\frac{g}{\varepsilon_\perp}A_n. \qquad (53)$$

Откуда получается уравнение для определения собственных значений κ_n

$$\varepsilon_\perp\kappa_n^4+\left[\chi_n^2(\varepsilon_\perp+\varepsilon_{||})+\frac{\omega^2}{c^2}g^2\right]\kappa_n^2+ +\left(\chi_n^4-\frac{\omega^4}{c^4}g^2\right)\varepsilon_{||}=0 \qquad (54)$$

и соотношение между постоянными в решении (52)

$$B_n=i\frac{k_{zn}\kappa_n g}{\varepsilon_{||}\chi_n^2+\varepsilon_\perp\kappa_n^2}A_n\equiv i\beta(\kappa_n)A_n. \qquad (55)$$

Корни биквадратного уравнения (54) запишем в виде κ_{n1}, $-\kappa_{n1}$, κ_{n2}, $-\kappa_{n2}$, где

$$\kappa_{n1,2}^2=\frac{1}{2\varepsilon_\perp}\left\{-\left(\varepsilon_\perp+\varepsilon_{||}\right)\chi_n^2-g^2\frac{\omega^2}{c^2}\pm \pm\sqrt{\left[\left(\varepsilon_\perp-\varepsilon_{||}\right)\chi_n^2+g^2\frac{\omega^2}{c^2}\right]^2+4\varepsilon_{||}g^2k_{zn}^2\frac{\omega^2}{c^2}}\right\}. \qquad (56)$$

Поскольку $J_1(-z) = -J_1(z)$, $J_0(-z) = J_0(z)$, $\beta(-z)=-\beta(z)$, то с учетом (52) общее решение первых двух уравнений системы (42) оказывается следующим:

$$E_{\varphi n}=A_{n1}J_1(\kappa_{n1}r)+A_{n2}J_1(\kappa_{n2}r),$$
$$E_{zn}=i\beta(\kappa_{n1})A_{n1}J_0(\kappa_{n1}r)+i\beta(\kappa_{n2})A_{n2}J_0(\kappa_{n2}r), \qquad (57)$$

где $A_{n1,2}$ — постоянные.

В вакуумной области $r>R_S$ ограниченные решения первых двух уравнений (42) имеют вид

$$E_{\varphi n}=C_nK_1(\chi_{0n}r),$$
$$E_{zn}=D_nK_0(\chi_{0n}r), \qquad (58)$$

где C_n и D_n — постоянные. Если плазменный соленоид имеет проводящий цилиндрический кожух, то при $\mathcal{R}>r>R_S$ записывается следующее решение:

$$E_{\varphi n}=C_nX_1(\chi_{0n}r),$$
$$E_{zn}=D_n[K_0(\chi_{0n}r)I_0(\chi_{0n}\mathcal{R})- -I_0(\chi_{0n}r)K_0(\chi_{0n}\mathcal{R})]\equiv D_nZ_0(\chi_{0n}r), \qquad (59)$$

где функция $X_1(\chi_{0n}r)$ приведена в (47).

Для определения постоянных $A_{n1,2}$, C_n и D_n решения (57) и (58) следует сшить в точке $r=R_S$. Однако, трех условий сшивки — граничных условий (41) — недостаточно для определения четырех постоянных в решениях (57) и (58). Недостающее, четвертое условие получается интегрированием второго уравнения системы (42) в окрестности точки $r=R_S$, что дает

$$\left\{\frac{\varepsilon_\perp}{\chi_n^2}\frac{dE_{zn}}{dr}+ik_{zn}\frac{g}{\chi_n^2}E_{\varphi n}\right\}_{r=R_S}=0. \qquad (60)$$

Используя систему (3), можно показать, что (60) эквивалентно условию непрерывности на границе плазмы тангенциальной составляющей индукции магнитного поля B_φ, или нормальной составляющей индукции электрического поля $D_r=\varepsilon_\perp E_r+igE_\varphi$.

Сшивая при помощи полученных условий решения (57) и (58), выразим постоянные $A_{n1,2}$, C_n, D_n и найдем следующее выражение:

$$E_{\varphi n}(r) = i\frac{\omega}{c}\frac{4\pi}{c}I\frac{N_S}{L_S}P_n K_1(\chi_{0n}R_S)\times \\ \times\left(\frac{D_{En}(\kappa_{n2}R_S)}{D_n}J_1(\kappa_{n1}r) - \frac{D_{En}(\kappa_{n1}R_S)}{D_n}J_1(\kappa_{n2}r)\right), \tag{61}$$

где

$$D_n = D_{En}(\kappa_{n2}R_S)D_{Bn}(\kappa_{n1}R_S) - \\ - D_{En}(\kappa_{n1}R_S)D_{Bn}(\kappa_{n2}R_S), \tag{62}$$

$$D_{Bn}(\kappa_{n1,2}R_S) = \chi_{0n}J_1(\kappa_{n1,2}R_S)K_0(\chi_{0n}R_S) + \\ +\kappa_{n1,2}J_0(\kappa_{n1,2}R_S)K_1(\chi_{0n}R_S), \\ D_{En}(\kappa_{n1,2}R_S) = (J_0(\kappa_{n1,2}R_S)K_1(\chi_{0n}R_S)\chi_{0n}^{-1} - \\ \varepsilon_\perp\kappa_{n1,2}J_1(\kappa_{n1,2}R_S)K_0(\chi_{0n}R_S)\chi_n^{-2})\beta(\kappa_{n1,2}) + \\ +k_{zn}g\chi_n^{-2}J_1(\kappa_{n1,2}R_S)K_0(\chi_{0n}R_S). \tag{63}$$

Выражения D_n являются дисперсионными функциями смешанных, т.е. B- и E-типов, электромагнитных волн магнитоактивного плазменного цилиндра со свободной поверхностью. Имея в виду предельный переход к нулевому внешнему магнитному полю, можно условно назвать функции $D_{Bn}(\kappa_{n1,2}R_S)$ дисперсионными функциями волн B-типа, а $D_{En}(\kappa_{n1,2}R_S)$ — дисперсионными функциями волн E-типа (см. формулу (50)).

Подставляя (61) в уравнение внешней цепи (38), стандартным образом получаем следующее выражение для комплексного импеданса соленоида, заполненного однородной магнитоактивной плазмой:

$$Z_S(\omega) = -i\omega\Lambda_0\sum_{n=1}P_n^2\frac{\left(D_{En}(\kappa_{n2}R_S)J_1(\kappa_{n1}R_S) - D_{En}(\kappa_{n1}R_S)J_1(\kappa_{n2}R_S)\right)K_1(\chi_{0n}R_S)}{R_S\left(D_{En}(\kappa_{n2}R_S)D_{Bn}(\kappa_{n1}R_S) - D_{En}(\kappa_{n1}R_S)D_{Bn}(\kappa_{n2}R_S)\right)}. \tag{64}$$

В нулевом магнитном поле формула (64) переходит в формулу (49).

При получении формулы (64) мы полагали, что проводящий кожух у соленоида отсутствует. Если проводящий кожух имеется, то следует использовать решение (59). Тогда, почти полностью повторяя вывод формулы (64), получим следующее выражение для импеданса ограниченного плазменного соленоида с проводящим кожухом во внешнем магнитном поле:

$$Z_S(\omega) = -i\omega\Lambda_0\sum_{n=1}P_n^2\frac{\left(D_{En}(\kappa_{n2}R_S)J_1(\kappa_{n1}R_S) - D_{En}(\kappa_{n1}R_S)J_1(\kappa_{n2}R_S)\right)X_1(\chi_{0n}R_S)}{R_S\left(D_{En}(\kappa_{n2}R_S)D_{Bn}(\kappa_{n1}R_S) - D_{En}(\kappa_{n1}R_S)D_{Bn}(\kappa_{n2}R_S)\right)}, \tag{64a}$$

а дисперсионные функции определяются формулами

$$D_{Bn}(\kappa_{n1,2}R_S) = \chi_{0n}J_1(\kappa_{n1,2}R_S)X_0(\chi_{0n}R_S) + \kappa_{n1,2}J_0(\kappa_{n1,2}R_S)X_1(\chi_{0n}R_S), \\ D_{En}(\kappa_{n1,2}R_S) = \beta(\kappa_{n1,2})\left(J_0(\kappa_{n1,2}R_S)Z_1(\chi_{0n}R_S)\chi_{0n}^{-1} - \varepsilon_\perp\kappa_{n1,2}J_1(\kappa_{n1,2}R_S)Z_0(\chi_{0n}R_S)\chi_n^{-2}\right) + \\ +k_{zn}g\chi_n^{-2}J_1(\kappa_{n1,2}R_S)Z_0(\chi_{0n}R_S), \tag{65}$$

где $Z_1(\chi_{0n}r) = K_1(\chi_{0n}r)I_0(\chi_{0n}\mathcal{R}) + I_1(\chi_{0n}r)K_0(\chi_{0n}\mathcal{R})$.

Решение (59) имеет смысл при любом знаке величин χ_{0n}^2 (в отличие от решения (58), полученного при $\chi_{0n}^2 > 0$), и применимость формулы (64a) не ограничивается условием (45). Поэтому в (64a) оказывается возможным предельный переход к соленоиду бесконечной длины $L_S \to \infty$, или $k_{zn} \to 0$. В этом пределе из формул (56) и (55) имеем $\kappa_{n1}^2 \to (\omega^2/c^2)\varepsilon_{||}$, $\kappa_{n2}^2 \to (\omega^2/c^2)\tilde{\varepsilon}_\perp \equiv \kappa_2^2$ ($\tilde{\varepsilon}_\perp$ см. в (24)), $\beta(\kappa_{n1}) \to \mathrm{const} \neq 0$, $\beta(\kappa_{n2}) \to 0$. Тогда, с учетом (65), формула (64a) преобразуется к виду

$$Z_S(\omega) = -i\omega\Lambda_0\frac{J_1(\kappa_2R_S)X_1(i\omega R_S/c)}{R_S\left(\chi_{0n}J_1(\kappa_2R_S)X_0(i\omega R_S/c) + \kappa_2J_0(\kappa_2R_S)X_1(i\omega R_S/c)\right)}\sum_{n=1}P_n^2. \tag{66}$$

Принимая во внимание соотношение

$$\sum_{n=1}P_n^2 = \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}\left(\frac{1-(-1)^n}{n}\right)^2 = 2, \tag{67}$$

видим, что формула (66) в точности переходит в формулу (28a) индуктивности однородного соленоида. Таким образом, однородным может считаться соленоид очень большой длины. Но это и понятно, поскольку при большой длине соленоида условия на его торцах существенной роли не играют.

Уравнение

$$D_n \equiv D(\omega, k_{zn}) = D_{En}(\kappa_{n2}R_S)D_{Bn}(\kappa_{n1}R_S) - D_{En}(\kappa_{n1}R_S)D_{Bn}(\kappa_{n2}R_S) = 0 \quad (68)$$

определяет частоты $\omega_s(k_{zn})$ собственных волн плазменного цилиндра радиуса R_S (со свободной поверхностью, или в волноводе радиуса $\mathcal{R}$) во внешнем магнитном поле. При этом индекс s обозначает номер ветви плазменных волн, а n совпадает с индексом суммирования в (64) и (64a). Эти же частоты определяют полюса $\omega_{sn}^{(\infty)} = \omega_s(k_{zn})$ импедансов (64) и (64a). Достаточно сложное уравнение (68) в различных предельных случаях исследовалось в теории плазменных волноводов [35]. Точное уравнение для нулей импеданса, из-за наличия в (64) и (64a) бесконечной суммы, вообще нельзя записать в явном виде. Поэтому нельзя в общем виде определить имеются ли у импедансов (64) и (64a) нули. При расчетах, проводившихся для конкретных случаев, нули импедансов обнаружены не были. Напомним, что в полюсах импеданса реализуется резонанс токов, а в нулях — резонанс напряжений. Таким образом, в ограниченном плазменном соленоиде во внешнем магнитном поле резонансы токов возможны, а резонансы напряжений, скорее всего, отсутствуют. То же самое, исходя из предыдущих результатов, можно сказать и об однородном плазменном соленоиде.

Рассмотрим механизмы передачи энергии внешнего источника магнитоактивной плазме, находящейся в соленоиде. Все эти механизмы учтены в формулах (64) и (64a). Высокочастотное электромагнитное поле соленоида имеет структуру B-типа. Вынужденные колебания этого типа и будут возбуждаться в плазме. Но при наличии в плазме конечного внешнего магнитного поля колебания B-типа и E-типа оказываются зацепленными между собой. Таким образом, в соленоиде с магнитоактивной плазмой на частоте внешнего источника ω возбуждаются вынужденные смешанные электромагнитные колебания обоих типов. Наиболее интенсивное возбуждение колебаний в плазме происходит при совпадении частоты источника с частотами собственных волн плазменной системы, т.е при $\omega \approx \omega_{sn}^{(\infty)} = \omega_s(k_{zn})$, где $\omega_s(k_{zn})$ определяются из уравнений (68). Естественно, что наиболее сильное поглощение энергии внешнего источника в плазме происходит на тех же частотах. Именно зацеплением электромагнитных волн B-типа и E-типа случай магнитоактивной плазмы в соленоиде отличается от

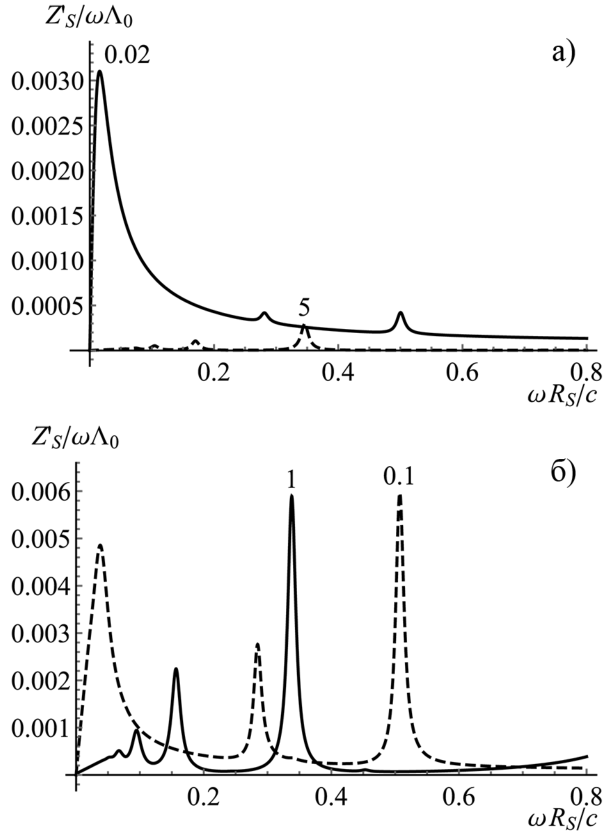

Рис. 8. Вещественная часть импеданса ограниченного плазменного соленоида без кожуха во внешнем магнитном поле для $\omega_{Le}R_S/c = 0.5$, $\nu_e = 0.03\omega_{Le}$, $L_S/R_S = 2$. Числа около кривых соответствуют значению $\Omega_e R_S/c$

случая плазменного соленоида без магнитного поля (возбуждаются только колебания B-типа) и от случая плазмы в конденсаторе (возбуждаются только колебания E-типа) [18]. Следовательно, применение магнитоактивной плазмы позволяет задействовать плазменные волны всех типов в качестве индуктивных каналов резонансной перекачки энергии источника в плазму. Особый интерес представляют волны E-типа из-за их низкой частоты. Более того, в плазменном цилиндре собственных электромагнитных волн B-типа в низкочастотной области вообще нет (кроме волн (33) с частотами, близкими к верхней гибридной частоте).

Известно [35], что в плазменном волноводе в случае слабого внешнего магнитного поля, когда $\Omega_e < \omega_{Le}$, имеются три группы волн E-типа. В низкочастотной области $\omega < \Omega_e$ располагаются частоты объемных косых циклотронных волн. В промежуточной области частот $\Omega_e < \omega < \omega_{Le}$ лежит частота поверхностной ленгмюровской волны. В высокочастотной области $\omega_{Le} < \omega < \Omega_g$ расположены частоты косых ленгмюровских волн. В случае сильного внешнего магнитного поля, когда $\Omega_e > \omega_{Le}$, поверхностной волны нет, частоты косых ленгмюровских волн расположены в области $\omega < \omega_{Le}$, а частоты косых циклотронных волн принадлежат диапазону $\Omega_e < \omega < \Omega_g$.

На рис. 8 представлены результаты расчета вещественной части импеданса ограниченного плазменного соленоида, выполненные по формуле (64) для $\omega_{Le}R_S/c = 0.5$, $\nu_e = 0.03\omega_{Le}$, $L_S/R_S = 2$ и различных значений $\Omega_e R_S/c = 0.02, 0.1, 1, 5$. При малом значении магнитного поля кривая аналогична кривой на рис. 5, построенной для случая нулевого магнитного поля. В отсутствие внешнего магнитного поля имеются только волны E-типа, возбуждение которых азимутальным током не происходит и резонансного поглощения энергии в плазме нет. При ненулевом значении магнитного поля волны E-типа и B-типа оказываются связанными и возбуждение такой волны азимутальным током становится возможным. Это и проявляется появлением пиков резонансного поглощения на рис. 8 для кривой, соответствующей $\Omega_e R_S/c = 0.02$. Правый из этих пиков соответствует возбуждению объемной ленгмюровской волны с частотой близкой к ленгмюровской, а левый — поверхностной волне с частотой порядка $\omega_{Le}/\sqrt{2}$. При увеличении магнитного поля до значений $\Omega_e R_S/c = 0.1$ связь между волнами усиливается и пики поглощения возрастают, в том числе формируется и низкочастотный пик циклотронного поглощения. В сильном магнитном поле ($\Omega_e > \omega_{Le}$), при $\Omega_e R_S/c = 1$, на рис. 8 в квазистационарной области частот, проявляются только пики низкочастотных ленгмюровских волн. Они же сохраняются и в случае $\Omega_e R_S/c = 5$, но их величина заметно уменьшается, в соответствии с тем, что в сильном магнитном поле волны трансформируются в волны E-типа, которые не возбуждаются азимутальным током. Во всех рассмотренных случаях мнимая часть импеданса практически не зависит от величины внешнего магнитного поля и совпадает с зависимостью, изображенной на рис. 5.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе системы уравнений Максвелла в холодной столкновительной магнитоактивной плазме рассмотрены электродинамические свойства плазменного столба и динамика возбуждения электромагнитных полей азимутальным током на его поверхности при произвольных соотношениях между частотой возбуждающего генератора, электронной циклотронной частотой и плазменной частотой. Рассмотрены случаи безграничного и продольно ограниченного плазменного соленоида. Вычислялись комплексный импеданс системы и эффективное сопротивление как величина, характеризующая поглощаемую в плазме мощность. Несмотря на ограниченность понятия комплексного импеданса квазистационарным случаем, тем не менее вещественная часть импеданса оказывается совпадающей с эффективным сопротивлением, понятие которого имеет более широкую область применимости не ограниченную условием квазистационарности. Резонансные свойства комплексного импеданса и эффективного сопротивления плазмы связаны с возможностью возбуждения в системе собственных электромагнитных волн с последующей их столкновительной диссипацией. Уширение резонансных линий определяется как частотой электронных столкновений, так и возможностью радиального выноса энергии в открытой системе. В системе без кожуха в достаточно слабом или, наоборот, достаточно сильном внешнем магнитном поле доминирующими оказываются только волны E-типа, возбуждение которых азимутальным током не происходит и резонансный характер поглощения энергии в плазме не проявляется. При промежуточном значении магнитного поля волны E-типа и B-типа оказываются связанными и возбуждение такой волны азимутальным током становится возможным. Это и проявляется появлением пиков резонансного поглощения, связанных с возбуждением объемных или поверхностных ленгмюровских волн, а также циклотронных волн.

Финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 22-29-00642).

ЛИТЕРАТУРА

1. S. Shinohara, Adv. in Phys.: X **3**, 1420424 (2018); doi:10.1080/23746149.2017.1420424.
2. S. Isayama, S. Shinohara, and T. Hada, Plasma and Fusion Research **13**, 1101014 (2018); doi:10.1585/pfr.13.1101014.
3. F. F. Chen, Plasma Sources Sci. Technol. **24**, 014001 (2015); doi:10.1088/0963-0252/24/1/014001.
4. Е. А. Кралькина, УФН **178**, 519 (2008); [E. A. Kral'kina, Phys. Usp. **51**, 493 (2008); doi:10.1070/PU2008v051n05ABEH006422].

5. S. Shinohara et al., IEEE Trans. on Plasma Science **42**, 1245 (2014).

6. F. F. Chen, Phys. Plasmas **21**, 093511 (2014); doi:10.1063/1.4896238.

7. F. F. Chen, IEEE Trans. on Plasma Science **43**, 195 (2015).

8. S. Shinohara et al., IEEE Trans. on Plasma Science **46**, 252 (2018).

9. S. Samukawa et al., J. Phys. D: Appl. Phys. **45**, 253001 (2012); doi:10.1088/0022-3727/45/25/253001.

10. В. Л. Вдовин, Физика плазмы **39**, 115 (2013) [V.L.Vdovin, Plas. Phys. Rep. **39**, 95 (2013); doi:10.1134/S1063780X13020037].

11. C. Lau et al., Nucl. Fusion **58**, 066004 (2018); doi:10.1088/1741-4326/aab96d.

12. R. W. Boswell, Phys. Lett. A **33**, 457 (1970); doi:10.1016/0375-9601(70)90606-7.

13. R. W. Boswell, Plasma Physics and Controlled Fusion **26**, 1147 (1984).

14. R. W. Boswell, Australian J. Phys. **25**, 403 (1972); doi:10.1071/PH720403.

15. R.W. Boswell, J. Plas. Phys. **31** (2), 197-208 (1984); doi:10.1017/S0022377800001550.

16. F. F. Chen, Plasma Physics and Controlled Fusion **33**, 339 (1991); doi:10.1088/0741-3335/33/4/006.

17. K. P. Shamrai and V. B. Taranov, Plasma Physics and Controlled Fusion **36**, 1719 (1994).

18. И.Н. Карташов, М.В. Кузелев, ЖЭТФ, **158**, 738 (2020) [I. N. Kartashov, M. V. Kuzelev, J. Exp. Theor. Phys. **131**, 645 (2020); doi:10.1134/S1063776120090162].

19. H. Tamura et al., IEEE Trans. on Plasma Science **46**, 3662 (2018).

20. Д. С. Степанов, А. В. Чеботарев, Э. Я. Школьников, ТВТ **57**, 347 (2019) [D. S. Stepanov, A. V. Chebotarev, and E. Y. Shkol'nikov, High Temp. **57**, 316 (2019); doi:10.1134/S0018151X19030155].

21. И. Н. Карташов, М. В. Кузелев, ТВТ **56**, 346 (2018) [I. N. Kartashov and M. V. Kuzelev, High Temp. **56**, 334 (2018); doi:10.1134/S0018151X18030100].

22. И. Н. Карташов, М. В. Кузелев, ЖЭТФ **156**, 355 (2019) [I. N. Kartashov and M. V. Kuzelev, J. Exp. Theor. Phys. **129**, 2981 (2019); doi:10.1134/S106377611907015X].

23. И. С. Абрамов, Е. Д. Господчиков, А. Г. Шалашов, ЖЭТФ **156**, 528 (2019) [I. S. Abramov, E. D. Gospodchikov, and A. G. Shalashov, J. Exp. Theor. Phys. **129**, 444 (2019); doi:10.1134/S106377611907001X].

24. E. A. Kralkina et al., AIP Advances **8**, 035217 (2018); doi:10.1063/1.5023631.

25. E. A. Kralkina et al., Plasma Sources Sci. Technol. **26**, 055006 (2017); doi:10.1088/1361-6595/aa61e6.

26. E. A. Kralkina et al., Plasma Sources Sci. Technol. **25**, 015016 (2016); doi:10.1088/0963-0252/25/1/015016.

27. А. Ф. Александров, М. В. Кузелев, *Теоретическая плазменная электротехника*, Изд. физического ф-та МГУ, Москва (2011).

28. В. Л. Гинзбург, А. А. Рухадзе, *Волны в магнитоактивной плазме*, URSS, Москва (2013).

29. И. Н. Карташов, М. В. Кузелев, Радиотехника и электроника **68**, 1165 (2023) [I. N. Kartashov and M. V. Kuzelev, J. Comm. Tech. Electr. **68**, 1394 (2023); doi:10.1134/S1064226923120094].

30. А. А. Самарский, Ю. П. Попов, *Разностные методы решения задач газовой динамики*, Наука, Москва (1975).

31. Д. В. Сивухин, *Общий курс физики. Т.3. Электричество*, ФИЗМАТЛИТ, Москва (2004).

32. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, ФИЗМАТЛИТ, Москва (2005).

33. А. Ф. Александров, Л. С. Богданкевич, А. А. Рухадзе, *Основы электродинамики плазмы*, Высшая школа, Москва (1988) [A. F. Alexandrov, L. S. Bogdankevich, and A. A. Rukhadze, *Principles of Plasma Electrodynamics*, Springer Verlag, Heidelberg (1984)].

34. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, *Уравнения математической физики*, Изд. Московского университета, Москва (1999).

35. М. В. Кузелев, А. А. Рухадзе, П. С. Стрелков, *Плазменная релятивистская СВЧ-электроника*, ЛЕНАНД, Москва (2018).