

КОГЕРЕНТНОЕ РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПОЛУЦИКЛОВОГО СВЕТОВОГО ИМПУЛЬСА В ТРЕХУРОВНЕВОЙ СРЕДЕ

Р. М. Архипов^{a,b}, А. В. Пахомов^a, М. В. Архипов^{a,b}, Н. Н. Розанов^{a,b}*

^a *Санкт-Петербургский государственный университет
199034, Санкт-Петербург, Россия*

^b *Физико-технический институт им. А. Ф. Иоффе Российской академии наук
194021, Санкт-Петербург, Россия*

Поступила в редакцию 4 марта 2024 г.,
после переработки 23 марта 2024 г.
Принята к публикации 29 марта 2024 г.

На основании численного решения системы уравнений Максвелла–Блоха изучается динамика когерентного распространения униполярного, полуциклового, светового импульса аттосекундной длительности в трехуровневой резонансно-поглощающей среде. Проведено сравнение с распространением такого импульса в двухуровневой среде. Показано, что импульс, который ведет себя подобно 4π -импульсу в двухуровневой среде, в трехуровневой среде подобен 6π -импульсу и расщепляется на три подимпульса, распространяющихся с разной скоростью в среде. Исследованное явление позволяет более детально понять до сих пор недостаточно изученную динамику когерентного распространения полуциклового импульсов в резонансной среде.

DOI: 10.31857/S0044451024080030

1. ВВЕДЕНИЕ

В последнее время активно изучается вопрос получения униполярных полуциклового импульсов, содержащих полуволну поля одной полярности и обладающих большой электрической площадью, определяемой как [1–3]

$$S_E(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{+\infty} E(\mathbf{r}, t) dt. \quad (1)$$

Здесь $E(\mathbf{r}, t)$ — напряженность электрического поля, t — время, \mathbf{r} — радиус-вектор. Интерес к таким импульсам связан с возможностью однонаправленного воздействия на заряды, что дает возможность быстро передавать механический импульс заряженной частице, и, следовательно, такие импульсы могут быть использованы для сверхбыстрого возбуждения квантовых систем, ускорения зарядов и других приложений [4, 5].

Электрическая площадь таких импульсов является их важной характеристикой, так как она удо-

влетворяет правилу сохранения в диссипативных средах в одномерном случае плосковолнового распространения вдоль оси z : $dS_E/dz = 0$ [3, 6]. И с другой стороны, именно она определяет степень воздействия на квантовые системы, если длительность импульса менее характерного времени, связанного с энергией основного состояния (орбитального периода электрона в атоме) [7–14]. На сегодняшний день предложено ряд способов получения импульсов, по форме близких к униполярным, имеющих выраженную полуволну поля одной полярности [15–23]. Обзор недавних исследований в области получения таких импульсов и степени их применения можно найти в обзорах [4–6] и цитируемой литературе.

Несмотря на то, что вопрос существования и получения таких импульсов сравнительно подробно проанализирован (см. обзоры [4–6] и главу в монографии [24]), когерентное распространение одноциклового и субциклового предельно коротких импульсов в резонансных средах недостаточно изучено. Большинство предыдущих исследований данного вопроса были выполнены в двухуровневом приближении [25–33]. Учет большего числа уровней может, однако, влиять на динамику импульсов в ряде случаев [34] и приводить к формированию слож-

* E-mail: arhipovrostislav@gmail.com

ной картины фотонного эха [35, 36]. Тем не менее многие исследования показывают, что двухуровневая модель в ряде случаев способна адекватно описывать взаимодействие предельно короткого импульса с многоуровневыми средами [37, 38].

В работе [39] было найдено аналитическое решение уравнений Максвелла–Блоха в форме униполярного солитона самоиндуцированной прозрачности (СИП) в виде гиперболического секанса. Впоследствии данный солитон был обнаружен в численных расчетах, при когерентном распространении исходно биполярного импульса в двухуровневой поглощающей среде [27] и трехуровневой среде, состоящей из смеси поглощающих и усиливающих частиц [40]. Существование солитонов СИП было показано в многоуровневой среде в работе [41] при аналитическом решении уравнения синус-Гордона, см. также обзоры [42–45]. В ряде работ при анализе когерентного распространения униполярных импульсов в среде использовались приближенные аналитические модели [46–50], приводившие, однако, к физически некорректным результатам, так как используемые уравнения не удовлетворяли правилу сохранения электрической площади. Подробный анализ предела применимости этих приближений и их сопоставление с правилом сохранения площади приведены в обзоре [51].

В работах [52, 53] изучена динамика когерентного распространения униполярного полужиклового импульса в двухуровневой поглощающей среде. Показано, что динамика напряженности поля существенно зависит от начальной электрической площади импульса. Так, если начальная электрическая площадь импульса такова, что он ведет себя подобно 4π -импульсу, то в процессе распространения такой импульс расщепляется на пару 2π -подобных импульсов СИП — за время действия импульса среда возбуждается, затем возвращается в исходное состояние. Подобное поведение аналогично длинным импульсам, когда выполняется теорема площадей Мак Кола и Хана [54–57].

В данной работе на основании численного решения системы уравнений Максвелла–Блоха изучается динамика когерентного распространения полужиклового аттосекундного импульса в трехуровневой резонансно-поглощающей среде. Показано, что импульс, который для двухуровневой среды действует как 4π -импульс, в случае трехуровневой среды ведет себя подобно 6π -импульсу и расщепляется на три подимпульса. Каждый подимпульс ведет себя подобно 2π -импульсу СИП для каждого резонансного перехода.

2. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И РАССМАТРИВАЕМАЯ СИСТЕМА

Анализ проводился на основе известной системы уравнений Максвелла–Блоха для трехуровневой среды, которая имеет вид [58]

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho_{21} = -\rho_{21}/T_{21} - i\omega_{12}\rho_{21} - i\frac{d_{12}E}{\hbar}(\rho_{22} - \rho_{11}) - i\frac{d_{13}E}{\hbar}\rho_{23} + i\frac{d_{23}E}{\hbar}\rho_{31}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho_{32} = -\rho_{32}/T_{32} - i\omega_{23}\rho_{32} - i\frac{d_{23}E}{\hbar}(\rho_{33} - \rho_{22}) - i\frac{d_{12}E}{\hbar}\rho_{31} + i\frac{d_{13}E}{\hbar}\rho_{21}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho_{31} = -\rho_{31}/T_{31} - i\omega_{13}\rho_{31} - i\frac{d_{13}E}{\hbar}(\rho_{33} - \rho_{11}) - i\frac{d_{12}E}{\hbar}\rho_{32} + i\frac{d_{23}E}{\hbar}\rho_{21}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho_{11} = (1 - \rho_{11})/T_{11} + i\frac{d_{12}E}{\hbar}(\rho_{21} - \rho_{21}^*) - i\frac{d_{13}E}{\hbar}(\rho_{13} - \rho_{13}^*), \quad (5)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho_{22} = -\rho_{22}/T_{22} - i\frac{d_{12}E}{\hbar}(\rho_{21} - \rho_{21}^*) - i\frac{d_{23}E}{\hbar}(\rho_{23} - \rho_{23}^*), \quad (6)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho_{33} = -\rho_{33}/T_{33} + i\frac{d_{13}E}{\hbar}(\rho_{13} - \rho_{13}^*) + i\frac{d_{23}E}{\hbar}(\rho_{23} - \rho_{23}^*), \quad (7)$$

$$P(z, t) = 2N_0d_{12} \operatorname{Re} \rho_{12} + 2N_0d_{13} \operatorname{Re} \rho_{13} + 2N_0d_{23} \operatorname{Re} \rho_{32}, \quad (8)$$

$$\frac{\partial^2 E(z, t)}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E(z, t)}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 P(z, t)}{\partial t^2}. \quad (9)$$

В этой системе уравнений ρ_{11} , ρ_{22} , ρ_{33} — диагональные элементы матрицы плотности, имеющие смысл населенностей первого, второго и третьего уровней среды соответственно, ρ_{21} , ρ_{32} , ρ_{31} — недиагональные элементы матрицы плотности, определяющие динамику поляризации среды, ω_{12} , ω_{23} , ω_{13} — частоты резонансных переходов, d_{12} , d_{13} , d_{23} — дипольные моменты этих переходов, $P(z, t)$ — поляризация

Таблица. Параметры импульсов возбуждения и среды

Амплитуда импульса	$E_0 = 2.7 \cdot 10^5$ ESU
Длительность импульсов возбуждения	$\tau = 380$ ас
Частота перехода 1-2 (длина волны перехода)	$\omega_{12} = 2.69 \cdot 10^{15}$ рад/с ($\lambda_{12} = \lambda_0 = 700$ нм)
Дипольный момент перехода 1-2	$d_{12} = 20$ Д
Частота перехода 1-3	$\omega_{13} = 1.5\omega_{12}$
Дипольный момент перехода 1-3	$d_{13} = 1.5d_{12}$
Частота перехода 2-3 в атоме водорода (длина волны перехода)	$\omega_{23} = \omega_{13} - \omega_{12}$
Дипольный момент перехода 2-3	$d_{23} = 0$
Концентрация атомов	$N_0 = 2 \cdot 10^{20}$ см ⁻³
Времена релаксации	$T_{1k} = 100$ фс, $T_{2k} = 30$ фс

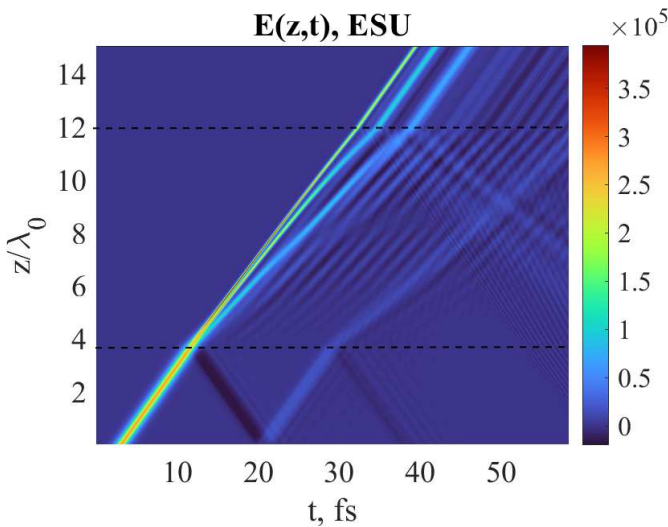


Рис. 1. Пространственно-временная динамика электрического поля $E(z, t)$ в трехуровневой среде, границы которой обозначены штриховыми линиями. Среда располагалась в центре области интегрирования между точками $z_1 = 4\lambda_0$ и $z_2 = 12\lambda_0$

среды, $E(z, t)$ — электрическое поле, динамика которого описывается волновым уравнением (9). Уравнения также содержат релаксационные члены T_{ik} .

В качестве начальных условий в среду слева направо из вакуума запускался импульс, имевший форму гиперболического секанса:

$$E(z = 0, t) = E_0 \operatorname{sech}\left(\frac{t - 6\tau}{\tau}\right). \quad (10)$$

Чтобы импульс вел себя подобно 2π -импульсу СИП на основном переходе 1-2 (если среда двухуровневая), его амплитуда должна удовлетворять соотношению [39]

$$E_{02} = \hbar/(d_{12}\tau). \quad (11)$$

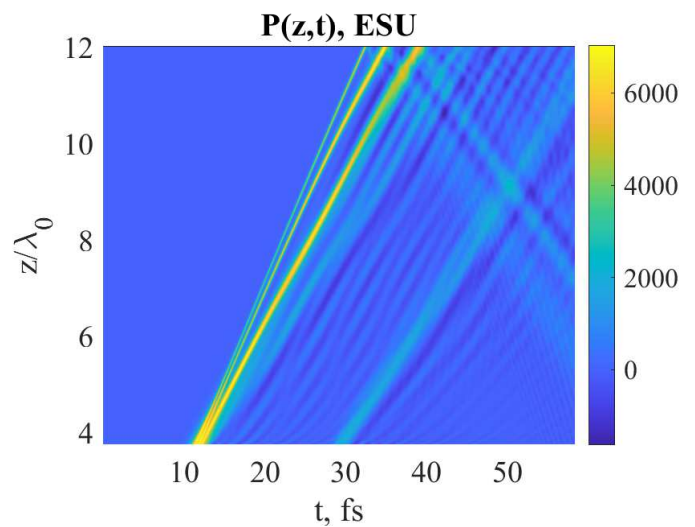


Рис. 2. Пространственно-временная динамика поляризации трехуровневой среды $P(z, t)$. Среда располагалась в центре области интегрирования между точками $z_1 = 4\lambda_0$ и $z_2 = 12\lambda_0$

Область интегрирования имела длину $L = 15\lambda_0$. Среда располагалась в центре области интегрирования между точками $z_1 = 4\lambda_0$ и $z_2 = 12\lambda_0$. Проводилось численное решение системы уравнений (2)–(9) с начальным условием (10). Параметры среды и поля импульса указаны в таблице. Отметим, что в рассматриваемом примере трехуровневая среда имеет так называемую V-схему энергетических уровней, т.е. разрешенными в дипольном приближении являются резонансные переходы $1 \rightarrow 2$ и $1 \rightarrow 3$, в то время как переход $2 \rightarrow 3$ является дипольно-запрещенным. Значение амплитуды поля выбрано так, чтобы импульс действовал, как 4π -импульс для перехода 1-2 двухуровневой среды, $E_0 = 2E_{02}$.

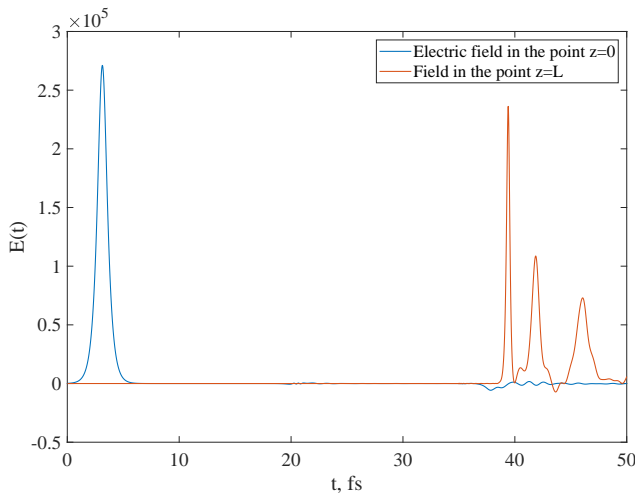


Рис. 3. Временная зависимость электрического поля $E(t)$ в левой части области интегрирования $z = 0$ (синяя кривая слева) и в правой части $z = L$ (оранжевая линия справа)

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ И ОБСУЖДЕНИЕ

Рисунки 1 и 2 иллюстрируют пространственно-временную динамику электрического поля импульса $E(z, t)$ и поляризации трехуровневой среды $P(z, t)$ соответственно. Границы среды обозначены штриховыми линиями на рис. 1. Видно, что исходный импульс расщепляется на три подимпульса, каждый из которых распространяется с разной скоростью, так что подимпульсы постепенно удаляются друг от друга. Таким образом, исходный импульс, который для двухуровневой среды действовал бы как 4π -импульс, при добавлении третьего уровня начинает вести себя подобно 6π -импульсу. После прохождения импульсов в среде остается волна поляризации, которая излучает вдогонку прошедшим импульсам в течение времени релаксации T_2 , см. рис. 2.

Временная зависимость электрического поля в точках $z = 0$ и $z = L$ для случая рис. 1 приведена на рис. 3. Рисунок 4 иллюстрирует зависимость населенностей трех уровней среды от времени в начале и в конце среды. Видно, что напряженность поля на выходе из среды представляет собой три подимпульса. Также из рис. 4 видно, что населенности каждого из состояний возвращаются практически к исходному значению после каждого подимпульса, т. е. каждый подимпульс действует подобно 2π -импульсу СИП.

Как показывают расчеты для случая на рис. 3, электрическая площадь (1) каждого из трех образо-

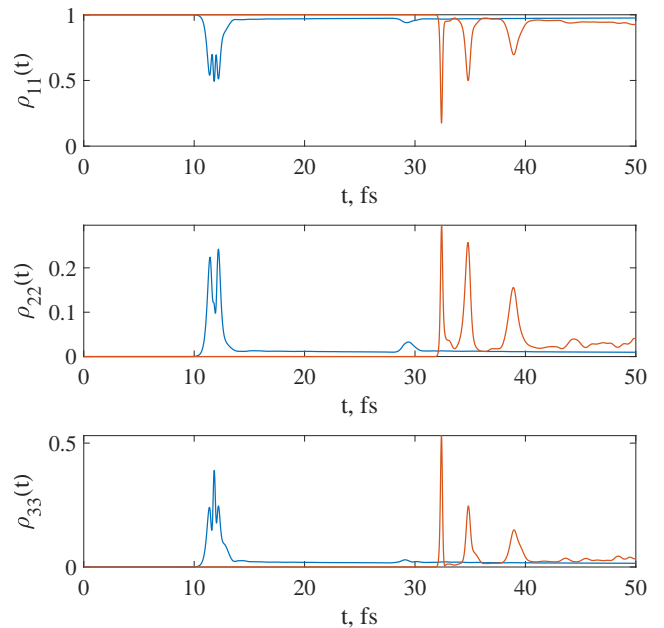


Рис. 4. Временные зависимости населенностей среды, синие линии — в начале среды (левые кривые), оранжевые линии — в конце среды (правые кривые)

вавшихся подимпульсов, рассчитанная с безразмерным коэффициентом $2d_{12}/\hbar$, оказывается приблизительно одинаковой и равной $\approx 1.3\pi$. Таким образом, исходный 4π -импульс распадается на подимпульсы таким образом, что, с учетом прочих остаточных осцилляций поля после трех основных подимпульсов на выходе из среды, обеспечивается точное выполнение правила сохранения электрической площади.

Интересно отметить, что похожая картина с расщеплением исходного импульса на подимпульсы и близкими значениями электрической площади каждого из них наблюдается и при других значениях электрической площади исходного падающего импульса. Так, например, если исходный импульс имеет площадь 6π (вновь рассчитанную с безразмерным коэффициентом $2d_{12}/\hbar$), то после прохождения слоя среды он расщепляется на пять полуциклового подимпульсов разной амплитуды и длительности, но с приблизительно одинаковой электрической площадью $\approx 1.2\pi$. Если же исходный импульс имеет площадь 2π , то на выходе из среды образуется один подимпульс с электрической площадью $\approx 1.3\pi$, за которым следуют сильно выраженные медленно затухающие знакопеременные осцилляции поля, которые в то же время имеют суммарную электрическую площадь $\approx 0.7\pi$.

Описанная картина качественно сохраняется и при других значениях дипольных моментов разре-

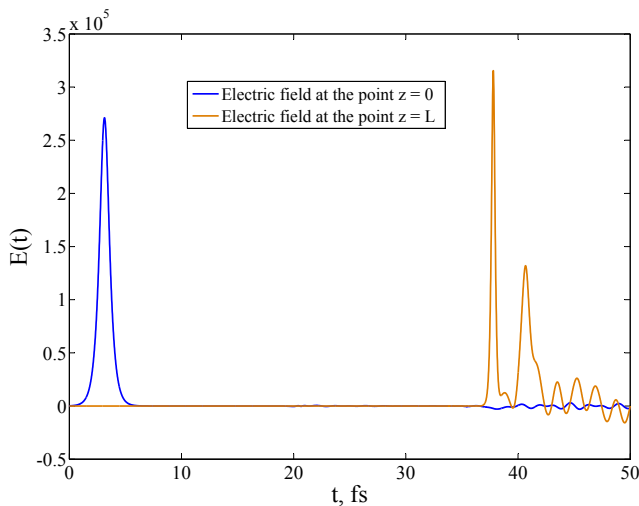


Рис. 5. Временная зависимость электрического поля $E(t)$ в левой части области интегрирования $z = 0$ (синяя кривая слева) и в правой части $z = L$ (оранжевая линия справа); параметры те же, что и в таблице, за исключением дипольного момента $d_{13} = d_{12}/1.5$

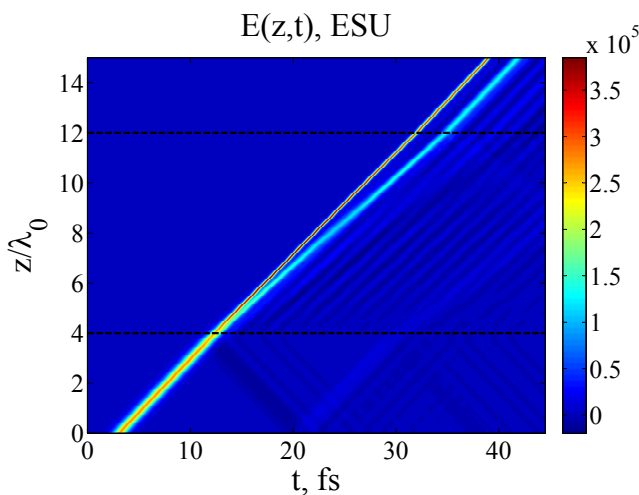


Рис. 6. Пространственно-временная динамика электрического поля $E(z, t)$ в трехуровневой среде, границы которой обозначены штриховыми линиями. Среда располагалась в центре области интегрирования между точками $z_1 = 4\lambda_0$ и $z_2 = 12\lambda_0$; параметры те же, что и в таблице, за исключением дипольного момента $d_{13} = d_{12}/1.5$

шенных переходов в трехуровневой среде. Например, для тех же значений параметров среды из таблицы, но при условии $d_{12} = 1.5d_{13}$, при численном моделировании наблюдалось расщепление исходного 4π -импульса уже на два полуволновых подимпульса с разными амплитудой и длительностью, но примерно одинаковыми значениями электрической площади $\approx 1.8\pi$ (остаточные затухающие ос-

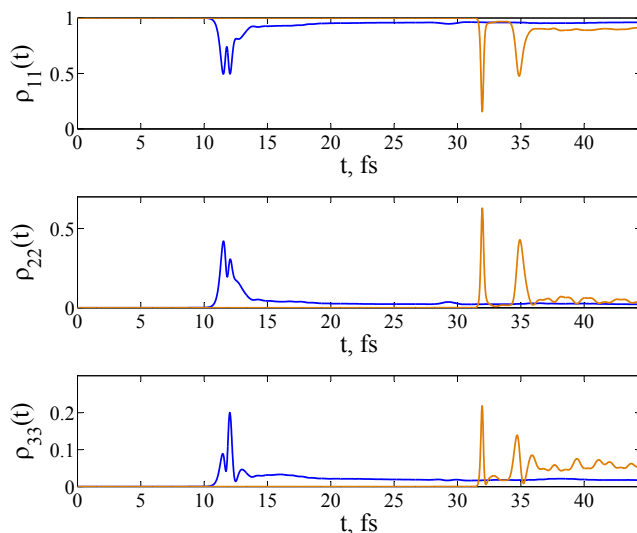


Рис. 7. Временные зависимости населенностей среды, синие линии — в начале среды (левые кривые), оранжевые линии — в конце среды (правые кривые); параметры те же, что и в таблице, за исключением дипольного момента $d_{13} = d_{12}/1.5$

циляции поля, следующие после второго подимпульса, имели суммарную электрическую площадь $\approx 0.4\pi$). Соответствующие пространственные и временные зависимости электрического поля и населенностей уровней среды показаны на рис. 5–7.

Нетрудно установить физическую причину наблюдаемого расщепления исходного полуволнового импульса. Оно аналогично расщеплению многоцикловых импульсов СИП в двухуровневой среде. При добавлении третьего уровня исходный импульс, который являлся 4π -импульсом для основного перехода 1–2 двухуровневой среды, для перехода 1–3 начинает действовать подобно 2π -импульсу. В итоге для «всей» среды импульс ведет себя подобно 6π -импульсу. При распространении такого импульса в среде, как только разность населенностей для каждого перехода возвращается в основное состояние, происходит полное поглощение соответствующей части импульса, что ведет к его расщеплению. Подобный механизм приводит к расщеплению длинных многоцикловых импульсов СИП в двухуровневой среде [54–57].

4. СРАВНЕНИЕ С ДИНАМИКОЙ В ДВУХУРОВНЕВОЙ СРЕДЕ

Для сравнения аналогичные зависимости электрического поля и населенности состояний, полученные в результате численного решения системы урав-

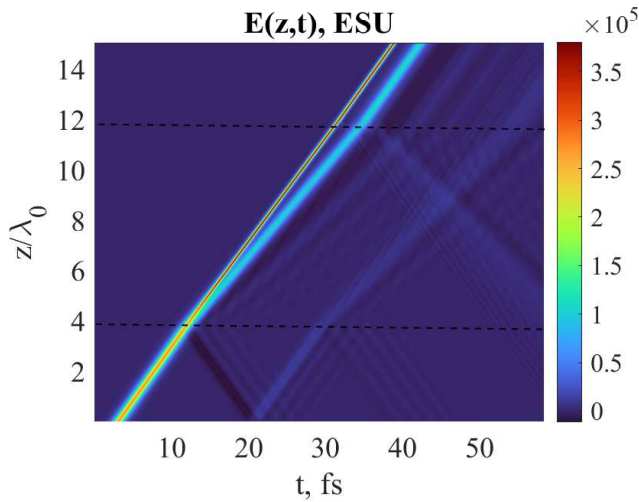


Рис. 8. Пространственно-временная динамика электрического поля $E(z, t)$ в двухуровневой среде, границы которой обозначены штриховыми линиями. Среда располагалась в центре области интегрирования между точками $z_1 = 4\lambda_0$ и $z_2 = 12\lambda_0$

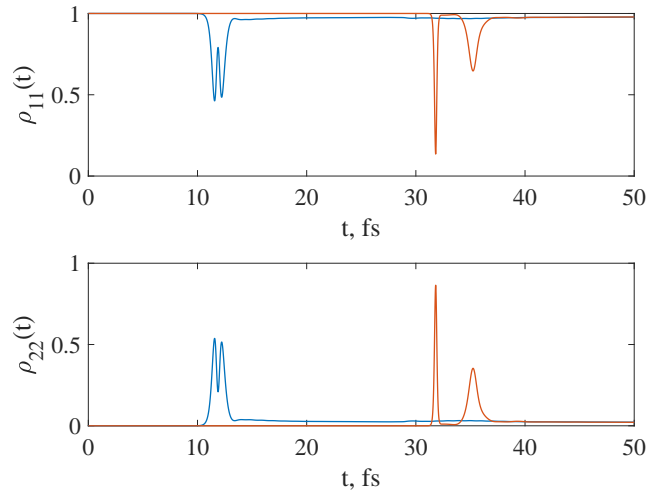


Рис. 10. Временные зависимости населенностей двухуровневой среды, синие линии слева — в начале среды, оранжевые линии справа — в конце среды

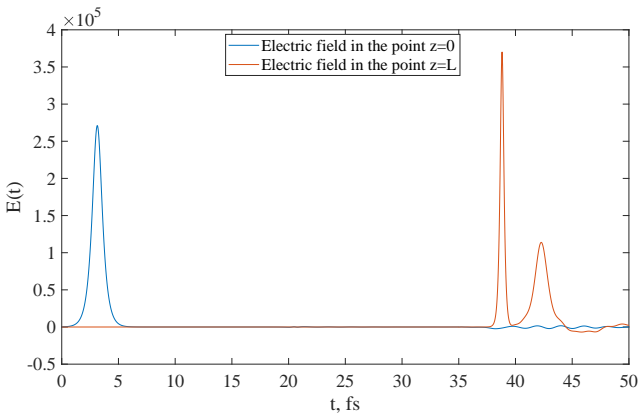


Рис. 9. Временная зависимость электрического поля $E(t)$ в левой части области интегрирования $z = 0$ (синяя кривая слева) и в правой части $z = L$ (оранжевая линия справа)

нений Максвелла–Блоха для двухуровневой среды [58], приведены на рис. 8–10. В этом случае исходный импульс ведет себя, как 4π -импульс, и расщепляется на пару 2π -подобных импульсов СИП (см. рис. 8, 9). Остальные параметры такие же, как в таблице.

Таким образом, на основании представленных результатов численных расчетов можно сделать вывод, что добавление третьего уровня приводит к дополнительному расщеплению импульса. Однако сам эффект расщепления исходного импульса на подимпульсы, наблюдавшийся ранее в расчетах для двухуровневой среды [52, 53], сохраняется и в многоуровневой среде.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе на основании численного решения системы уравнений Максвелла–Блоха для трехуровневой среды изучена динамика когерентного распространения полуциклового аттосекундного импульса. Амплитуда и длительность исходного импульса подобраны таким образом, чтобы импульс действовал подобно 4π -импульсу для основного перехода 1–2 двухуровневой среды. Показано, что в трехуровневой среде импульс ведет себя подобно 6π -импульсу и расщепляется на три 2π -подобных импульсов СИП, каждый из которых распространяется с разной скоростью в среде. Таким образом, расщепление полуциклового импульса, исходно обнаруженное в двухуровневой среде, сохраняется и в трехуровневой среде, однако имеет более сложную динамику — вместо расщепления на пару подимпульсов, возникает три подимпульса. Приведенные результаты позволяют прояснить динамику когерентного распространения униполярных предельно коротких импульсов в многоуровневых резонансных средах, которая еще недостаточно изучена на сегодняшний день. Исследованный эффект может применяться для компрессии полуциклового импульсов.

Финансирование. Исследования выполнены при финансовой поддержке Российского научного фонда в рамках научных проектов 21-72-10028 (динамика импульса в трехуровневой среде) и 23-12-00012 (динамика импульса в двухуровневой среде).

ЛИТЕРАТУРА

1. Дж. Джексон, *Классическая электродинамика*, Мир, Москва (1965) [J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, Wiley, Hoboken, New York (1997)].
2. Е. Г. Бессонов, ЖЭТФ **80**, 852 (1981) [E. G. Besonov, Sov. Phys. JETP **53**, 433 (1981)].
3. Н. Н. Розанов, Опт. и спектр. **107**, 761 (2009) [N. N. Rosanov, Opt. Spectr. **107**, 721 (2009)].
4. Р. М. Архипов, М. В. Архипов, Н. Н. Розанов, КЭ **50**, 801 (2020) [R. M. Arkhipov, M. V. Arkhipov, and N. N. Rosanov, Quant. Electron. **50**, 801 (2020)].
5. Н. Н. Розанов, УФН **193**, 1127 (2023) [N. N. Rosanov, Phys. Usp. **66**, 1059 (2023)].
6. Н. Н. Розанов, Р. М. Архипов, М. В. Архипов, УФН **188**, 1347 (2018) [N. N. Romanov, R. M. Arkhipov, and M. V. Arkhipov, Phys. Usp. **61**, 1227 (2018)].
7. W. Pauli, *Handbuch der Physik*, Springer (1933).
8. А. Б. Мигдал, ЖЭТФ **9**, 1163 (1939).
9. L. Schiff, *Quantum Mechanics*, McGraw-Hill (1968).
10. А. М. Дыхне, Г. Л. Юдин, УФН **125**, 377 (1978) [A. M. Dykhne and G. L. Yudin, Sov. Phys. Usp. **21**, 549 (1978)].
11. D. Dimitrovski, E. A. Solov'ev, and J. S. Briggs, Phys. Rev. A **72**, 043411 (2005).
12. A. S. Moskalenko, Z.-G. Zhu, and J. Berakdar, Phys. Rep. **672**, 1 (2017).
13. N. Rosanov, D. Tumakov, M. Arkhipov, and R. Arkhipov, Phys. Rev. A **104**, 063101 (2021).
14. A. Pakhomov, N. Rosanov, M. Arkhipov, and R. Arkhipov, JOSA B **41**, 46 (2024).
15. В. Л. Гинзбург, С. И. Сыроватский, УФН **87**, 65 (1965) [V. L. Ginzburg and S. I. Syrovatskii, Sov. Phys. Usp. **8**, 674 (1966)].
16. M. T. Hassan, T. T. Luu, A. Moulet, O. Raskazovskaya, P. Zhokhov, M. Garg, N. Karpowicz, A. M. Zheltikov, V. Pervak, F. Krausz, and E. Goulielmakis, Nature **530**, 66 (2016).
17. H.-C. Wu and J. Meyer-ter Vehn, Nature Photon. **6**, 304 (2012).
18. J. Xu, B. Shen, X. Zhang, Y. Shi, L. Ji, L. Zhang, T. Xu, W. Wang, X. Zhao, and Z. Xu, Sci. Rep. **8**, 2669 (2018).
19. I. E. Ilyakov, B. V. Shishkin, E. S. Efimenko, S. B. Bodrov, and M. I. Bakunov, Opt. Express **30**, 14978 (2022).
20. S. Wei, Y. Wang, X. Yan, and B. Eliasson, Phys. Rev. E **106**, 025203 (2022).
21. Q. Xin, Y. Wang, X. Yan, and B. Eliasson, Phys. Rev. E **107**, 035201 (2023).
22. A. V. Bogatskaya, E. A. Volkova, and A. M. Popov, Phys. Rev. E **104**, 025202 (2021).
23. M. Arkhipov, A. Pakhomov, R. Arkhipov, and N. Rosanov, Opt. Lett. **47**, 4637 (2023).
24. Н. Н. Розанов, М. В. Архипов, Р. М. Архипов, А. В. Пахомов, *Коллективная монография «Терагерцовая фотоника»*, под ред. В. Я. Панченко, А. П. Шкуринова, Российская академия наук, Москва (2023), с. 360.
25. X. Song, W. Yang, Z. Zeng, R. Li, and Z. Xu, Phys. Rev. A **82**, 053821 (2010).
26. S. Hughes, Phys. Rev. Lett. **81**, 3363 (1998).
27. V. P. Kalosha and J. Herrmann, Phys. Rev. Lett. **83**, 544 (1999).
28. A. V. Tarasishin, S. A. Magnitskii, V. A. Shuvaev, and A. M. Zheltikov, Opt. Express **8**, 452 (2001).
29. V. P. Kalosha and J. Herrmann, Phys. Rev. Lett. **83**, 544 (1999).
30. D. V. Novitsky, Phys. Rev. A **84**, 013817 (2011).
31. D. V. Novitsky, Phys. Rev. A **85**, 043813 (2012).
32. D. V. Novitsky, J. Phys. B: Atom. Mol. Opt. Phys. **47**, 095401 (2014).
33. D. V. Novitsky, Opt. Commun. **358**, 202 (2016).
34. J. Cheng and J. Zhou, Phys. Rev. A **67**, 041404 (2003).
35. А. Ю. Пархоменко, С. В. Сазонов, Письма в ЖЭТФ **67**, 887 (1998) [A. Y. Parkhomenko and S. V. Sazonov, JETP Lett. **67**, 934 (1998)].
36. С. В. Сазонов, А. Ф. Соболевский, ЖЭТФ **123**, 919 (2003) [S. V. Sazonov and A. F. Sobolevskii, JETP **96**, 807 (2003)].
37. O. D. Mucke, T. Tritschler, M. Wegener, and U. Morgner, Phys. Rev. Lett. **87**, 057401 (2001).
38. A. Pakhomov, N. Rosanov, M. Arkhipov, and R. Arkhipov, JOSA B **41**, 46 (2024).
39. R. K. Bullough and F. Ahmad, Phys. Rev. Lett. **27**, 330 (1971).

40. Н. В. Высотина, Н. Н. Розанов, В. Е. Семенов, Письма в ЖЭТФ **83**, 337 (2006) [N. V. Vysotina, N. N. Rozanov, and V. E. Semenov, JETP Lett. **83**, 279 (2006)].
41. А. Ю. Пархоменко, С. В. Сазонов, ЖЭТФ **114**, 1595 (1998) [A. Y. Parkhomenko and S. V. Sazonov, JETP **87**, 864 (1998)].
42. А. И. Маймистов, КЭ **30**, 287 (2000) [A. I. Maimistov, Quant. Electron. **30**, 287 (2000)].
43. А. И. Маймистов, КЭ **40**, 756 (2010) [A. I. Maimistov, Quant. Electron. **40**, 756 (2010)].
44. D. U. Mihalache, Roman. Rep. Phys. **69**, 403 (2017).
45. С. В. Сазонов, Опт. и спектр. **130**, 1846 (2022) [S. V. Sazonov, Opt. Spectr. **130**, 1573 (2022)].
46. Э. М. Беленов, П. Г. Крюков, А. В. Назаркин, А. Н. Ораевский, А. В. Усков, Письма в ЖЭТФ **47**, 442 (1988) [E. M. Belenov, P. G. Kryukov, A. V. Nazarkin, A. N. Oraevskii, and A. V. Uskov, JETP Lett. **47**, 523 (1988)].
47. Э. М. Беленов, А. В. Назаркин, Письма в ЖЭТФ **51**, 252 (1990) [E. M. Belenov and A. V. Nazarkin, JETP Lett. **51**, 288 (1990)].
48. Э. М. Беленов, А. В. Назаркин, В. А. Ущачовский, ЖЭТФ **100**, 762 (1991) [E. Belenov, A. Nazarkin, and V. Ushcharovskii, Sov. Phys. JETP **73**, 422 (1991)].
49. А. В. Богацкая, А. М. Попов, Письма в ЖЭТФ **188**, 291 (2023) [A. V. Bogatskaya and A. M. Popov, JETP Lett. **118**, 296 (2023)].
50. A. V. Bogatskaya, E. A. Volkova, and A. M. Popov, Laser Phys. Lett. **21**, 015401 (2024).
51. А. В. Пахомов, Н. Н. Розанов, М. В. Архипов, Р. М. Архипов, Письма в ЖЭТФ **119**, 100 (2024) [A. V. Pakhomov, N. N. Rosanov, M. V. Arkhipov, and R. M. Arkhipov, JETP Lett. **119** (2024)].
52. Р. М. Архипов, Н. Н. Розанов, Опт. и спектр. **124**, 691 (2018) [R. M. Arkhipov and N. N. Rosanov, Opt. Spectr. **124**, 726 (2018)].
53. R. Arkhipov, M. Arkhipov, I. Babushkin, A. Pakhomov, and N. Rosanov, JOSA B **38**, 2004 (2021).
54. S. L. McCall and E. L. Hahn, Phys. Rev. **183**, 457 (1969).
55. П. Г. Крюков, В. С. Легохов, УФН **99**, 169 (1969) [P. G. Kryukov and V. S. Letokhov, Sov. Phys. Usp. **12**, 641 (1970)].
56. И. А. Полуэктов, Ю. М. Попов, В. С. Ройтберг, УФН **114**, 97 (1974) [I. A. Poluektov, Yu. M. Popov, and V. S. Roitberg, Sov. Phys. Usp. **18**, 673 (1975)].
57. Л. Аллен, Дж. Эберли, *Оптический резонанс и двухуровневые атомы*, Мир, Москва (1978) [L. Allen and J. H. Eberly, *Optical Resonance and Two-Level Atoms*, Wiley, New York (1975)].
58. А. Ярив, *Квантовая электроника*, Сов. радио, Москва (1980) [A. Yariv, *Quantum Electronics*, Wiley, New York (1975)].