ЖЭТФ, 2025, том 167, вып. 1, стр. 115–128

СТАЦИОНАРНЫЙ И НЕСТАЦИОНАРНЫЙ ТОК В КОНЕЧНЫХ ЦЕПОЧКАХ КИТАЕВА

Ю. М. Билинский [a], *П. И. Арсеев* [a*], *Н. С. Маслова* [b]

[a] *Физический институт им. П. Н. Лебедева Российской академии наук*
119991, Москва, Россия

[b] *Московский государственный университет им. М. В. Ломонрсова, физический факультет*
119991, Москва, Россия

Поступила в редакцию 8 ноября 2024 г.,
после переработки 18 ноября 2024 г.
Принята к публикации 18 ноября 2024 г.

Исследована роль внутрищелевых состояний в процессах переноса заряда вдоль сверхпроводящей цепи Китаева конечной длины. При рассмотрении этой задачи мы используем формализм нестационарных функций Грина, которые содержат полную информацию о неравновесных и нестационарных свойствах системы. Мы обсудим туннельный ток и нестационарный перенос заряда в конечной цепи Китаева во внутрищелевом режиме. В предположении, что конечная цепь Китаева соединена на каждом крае со своим собственным внешним контактом (нормальным резервуаром), получим зависящее от времени поведение туннельного тока после внезапного изменения напряжения смещения на одном из контактов. Полученные результаты покажут, насколько быстро «майорановская мода» на одном краю цепи реагирует после того, как внешнее возмущение действует на «майорановскую моду» на другом краю. Представлены полностью аналитические прямые вычисления тока, в отличие от многих других методов.

DOI: 10.31857/S0044451025010109

1. ВВЕДЕНИЕ

В последние десятилетия большое внимание уделяется системам, в которых появляются состояния с «топологически необычными» свойствами. Однако для практического использования мы должны уметь оценивать конкретные физические характеристики рассматриваемой системы в дополнение к математической интерпретации свойств основного состояния системы. Одной из простейших моделей, демонстрирующих свойства, которые допускают топологическую интерпретацию, является атомная цепочка с p-волновой сверхпроводимостью бесспиновых частиц, предложенная А. Китаевым [1]. Основной интерес к модели в последующие годы был вызван нетривиальной топологической интерпретацией свойств ее основного состояния. Было показано, что в силу «топологических причин» внутри сверхпроводящей щели возникают квантовые состояния, локализованные на краях цепочки. Эти состояния, часто называемые «майорановскими модами», обычно связывают с существованием квазичастиц [2], имеющих родство с майорановскими фермионами [3].

Возможные экспериментальные реализации этой модели обычно основаны на эффекте близости в полупроводниковых проводах с сильным спин-орбитальным взаимодействием, размещенных на сверхпроводниковой подложке [4–6]. Последние достижения в эксперименте и обсуждение возникающих трудностей можно найти в обзоре [7].

Принято считать, что дальнейшее развитие в этой области может быть связано с рассмотрением моделей с эффективным действием Джозефсона, учитывающим эффекты типа кулоновской блокады [8–13]. Есть надежда, что дальнодействующее кулоновское взаимодействие может помочь передавать сигнал в системе конечных цепочек Китаева с использованием «состояний Майораны». Но эффекты перезарядки неизбежно включают процессы переноса заряда, поэтому мы должны быть уверены, что правильно описываем туннельный транспорт и эффекты переноса заряда сначала в самой простой туннельной схеме. Теоретические результаты мож-

* E-mail: ars@lpi.ru

но сравнить с экспериментами по туннелированию в различных условиях [14, 15].

Некоторые теоретические исследования предполагают, что «майорановские состояния» могут быть использованы в качестве защищенного от ошибок способа хранения и передачи информации в квантовой технологии [16, 17]. Однако если состояние защищено от произвольных изменений из-за внешнего шума, та же защита может сделать столь же сложным и целенаправленное изменение состояния системы, что, в свою очередь, может сделать невозможным использование системы для каких-либо практических приложений. Один из возможных способов изучить, насколько хорошо система реагирует на сигнал, — это исследовать ее нестационарные транспортные свойства.

В работе [18] нестационарные эффекты, связанные с модуляцией прозрачности туннельных барьеров, рассматривались в квазиклассическом подходе. В этой работе рассматривалась трехтерминальная система, в которой один из контактов фактически использовался для фиксации химического потенциала сверхпроводника. Мы будем рассматривать двухтерминальную геометрию, в которой сверхпроводник связан только с двумя внешними контактами и для исследования роли локализованных состояний в нестационарных транспортных свойствах воспользуемся формализмом нестационарных функций Грина для электронов.

Ниже будет показано, что этот подход позволяет нам получать аналитически явные выражения для туннельного тока и нестационарного переноса заряда в отличие от более сложных методов, основанных на уравнении для матрицы плотности, обсуждаемых, например, в [19]. Также мы получаем возможность сравнить результаты квазиклассических расчетов с микроскопическими и найти связь параметров, использующихся в этих разных подходов.

Точные электронные функции Грина для бесконечной цепи Китаева в равновесии могут быть найдены аналитически [20]. Их можно использовать для нахождения нестационарных функций Грина конечной цепи, которые позволяют нам увидеть, как система развивается во времени, если мы применим к ней некоторое возмущение. Идея нашего рассмотрения состоит в том, чтобы рассматривать конечную цепь Китаева как разрезанную бесконечную цепь или цепь с сильными дефектами (для цепи с одним разрезом см., например, [21]). Этот трюк позволяет нам использовать функции Грина бесконечной цепочки для исследования всех одночастичных состояний в системе. Наши вычисления не требуют какой-либо интерпретации особенностей в одночастичной функции Грина как некоторых особых «состояний». Заметим здесь, что полюса одночастичных функций Грина, которые появляются в щели сверхпроводника в этой модели, вряд ли можно интерпретировать как одночастичные возбуждения. Настоящие майорановские частицы, обсуждаемые в пионерских работах [3], являются хорошо определенными частицами (квазичастицами) с обычной алгеброй операторов рождения и уничтожения. В любой физической задаче такие реальные частицы вносят вклад в одночастичную функцию Грина с вычетом, равным единице. Известно, что связанные состояния, локализованные вокруг дефектов, таких как парамагнитные [22] или резонансные [23] примеси с энергиями, лежащими внутри щели, часто возникают в обычных сверхпроводниках. Такие состояния являются истинными одночастичными состояниями. В рассматриваемой задаче мы видим, что появление полюсов в электронной функции Грина в щели с вычетами, равными $1/2$, является скорее артефактом модели, имеющей вырожденное (в высокосимметричном случае) основное состояние, чем появлением новых квазичастиц.

В настоящей работе мы применяем подход, основанный на неравновесных электронных функциях Грина конечной цепочки Китаева. Мы начинаем с гамильтониана, выраженного через электронные операторы, который полностью описывает систему. Используя определение электронного тока, мы делаем точные вычисления без каких-либо приближений. В рамках этого подхода нет необходимости во введении операторов Майораны и усложнении диаграммных правил. Полученные выражения для функций Грина цепочки конечной длины используются для вычисления стационарного и зависящего от времени туннельного тока. Из этих выражений видно, что туннельный ток через «майорановские состояния» внутри щели всегда экспоненциально мал для длинных цепочек.

2. СВОЙСТВА ИЗОЛИРОВАННОЙ ЦЕПОЧКИ КИТАЕВА

В этом разделе мы кратко воспроизведем некоторые результаты, касающиеся спектральных свойств конечной цепи, используя формализм функций Грина, который мы будем использовать в дальнейших разделах.

Начнем со свободной идеальной цепочки Китаева, полностью изолированной от любых внешних систем. Можно записать модельный гамильтониан такой системы как

$$\hat{\tilde{H}} = -\mu \sum_{n=1}^{N} \psi_n^\dagger \psi_n - t \sum_{n=1}^{N-1} \left(\psi_n^\dagger \psi_{n+1} + \psi_{n+1}^\dagger \psi_n \right) + \\ + \sum_{n=1}^{N-1} \left(\Delta \psi_n^\dagger \psi_{n+1}^\dagger + \Delta^* \psi_{n+1} \psi_n \right). \tag{1}$$

Здесь $\psi_n^\dagger$ и ψ_n — операторы рождения и уничтожения частиц на узле n; μ — химический потенциал; t — параметр перескока между двумя соседними узлами; Δ — параметр порядка сверхпроводимости, который в данной задаче мы считаем заданным параметром; N — общее число узлов в решетке.

Для нахождения точных решений функций Грина для гамильтониана (1) удобно использовать функции Грина бесконечной цепочки Китаева. Действительно, можно смоделировать поведение конечной цепочки, используя бесконечную цепочку с бесконечно сильными точечными дефектами $U \to +\infty$, добавленными в узлах 0 и $N+1$ (см. рис. 1). В результате частицы, находящиеся между этими двумя узлами, будут полностью изолированы от внешних частей цепочки, а функции Грина будут идентичны функциям Грина конечной цепочки длины N, пока аргументы — номера узлов — лежат между 0 и $N+1$. Таким образом, поведение системы описывается следующим гамильтонианом, соответствующим системе на рисунке:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}, \tag{2}$$

где

$$\hat{H}_0 = -\mu \sum_n \psi_n^\dagger \psi_n - t \sum_n \left(\psi_n^\dagger \psi_{n+1} + \psi_{n+1}^\dagger \psi_n \right) + \\ + \sum_n \left(\Delta \psi_n^\dagger \psi_{n+1}^\dagger + \Delta^* \psi_{n+1} \psi_n \right), \\ \hat{V} = U \left(\psi_0^\dagger \psi_0 + \psi_{N+1}^\dagger \psi_{N+1} \right).$$

Этот гамильтониан идентичен гамильтониану (1) при $U \to \infty$. Чтобы найти физические свойства цепочки, мы воспользуемся формализмом нормальных и аномальных функций Грина, обозначенных как $G_{nm}(t,t')$, $F_{nm}(t,t')$ соответственно. В этой работе мы будем использовать следующие определения функций Грина:

$$\Gamma_{nm}^R(t,t') = \begin{pmatrix} G_{nm}^R(t,t') & F_{nm}^R(t,t') \\ F_{nm}^{R\dagger}(t,t') & G_{nm}^{R\dagger}(t,t') \end{pmatrix} = -i \left\langle \begin{pmatrix} \{\psi_n(t), \psi_m^\dagger(t')\} & \{\psi_n(t), \psi_m(t')\} \\ \{\psi_n^\dagger(t), \psi_m^\dagger(t')\} & \{\psi_n^\dagger(t), \psi_m(t')\} \end{pmatrix} \right\rangle \theta(t-t'), \tag{3}$$

$$\Gamma_{nm}^A(t,t') = \begin{pmatrix} G_{nm}^A(t,t') & F_{nm}^A(t,t') \\ F_{nm}^{A\dagger}(t,t') & G_{nm}^{A\dagger}(t,t') \end{pmatrix} = i \left\langle \begin{pmatrix} \{\psi_n(t), \psi_m^\dagger(t')\} & \{\psi_n(t), \psi_m(t')\} \\ \{\psi_n^\dagger(t), \psi_m^\dagger(t')\} & \{\psi_n^\dagger(t), \psi_m(t')\} \end{pmatrix} \right\rangle \theta(t'-t), \tag{4}$$

$$\Gamma_{nm}^<(t,t') = \begin{pmatrix} G_{nm}^<(t,t') & F_{nm}^<(t,t') \\ F_{nm}^{<\dagger}(t,t') & G_{nm}^{<\dagger}(t,t') \end{pmatrix} = -i \left\langle \begin{pmatrix} \psi_m^\dagger(t')\psi_n(t) & \psi_m(t')\psi_n(t) \\ \psi_m^\dagger(t')\psi_n^\dagger(t) & \psi_m(t')\psi_n^\dagger(t) \end{pmatrix} \right\rangle, \tag{5}$$

Здесь $\left\{\hat{a}, \hat{b}\right\} = \hat{a}\hat{b} + \hat{b}\hat{a}$, $\langle \hat{a} \rangle = \mathrm{Tr}(\hat{\rho}\hat{a})$. Индексы R и A обозначают запаздывающие и опережающие функции Грина.

Используя уравнение Дайсона для гамильтониана (2), мы можем выразить запаздывающие функции Грина $\Gamma_{nm}^R(t,t')$ конечной цепочки в терминах функций Грина $\Gamma_{nm}^{0R}(t,t')$ бесконечной цепочки. В Приложении показано,что функции $\Gamma_{nm}^R(\omega)$ имеют полюсы в точках $\omega = \pm\omega_0$, где

$$\omega_0 = \frac{|\Delta|\,(4t^2 - \mu^2)}{it\sqrt{4(t^2 - |\Delta|^2) - \mu^2}} \left(\chi_+^{N+1} - \chi_-^{N+1} \right). \tag{6}$$

Здесь

$$\chi_\pm = \frac{-\mu \pm i\sqrt{4t^2 - (\mu^2 + 4|\Delta|^2)}}{2(t + |\Delta|)}. \tag{7}$$

Поскольку $|\chi_\pm| < 1$ (см. 52), выражение (6) записано для случая $|\chi_\pm|^N \ll 1$. Для достаточно больших N ω_0 мало по сравнению с другими параметрами системы и убывает экспоненциально при увеличении длины цепочки N.

Для случаев $|\Delta| << t$ и $|\Delta| < t, |\Delta| \to t$ «экспоненциальная малость» выражения (6) по N может быть показана явно:

$$\omega_0 = \begin{cases} 4\,|\Delta|\,e^{-N(|\Delta|/t)}, & |\Delta| << t, \\ 2te^{-N\ln\left(\sqrt{2t/(t-|\Delta|)}\right)}, & (t - |\Delta|) \ll t. \end{cases} \tag{8}$$

Экспоненциальное убывание ω_0 при увеличении длины цепочки объясняется экспоненциально слабым перекрытием двух связанных состояний на противоположных краях цепочки. Используя (8), мы можем оценить длину локализации связанных состояний как

$$l_{loc} \simeq \begin{cases} a(t/|\Delta|), & |\Delta| << t, \\ a/\ln\left(\sqrt{2t/(t-|\Delta|)}\right), & (t-|\Delta|) \ll t, \end{cases} \tag{9}$$

где a — постоянная решетки.

Такая экспоненциальная зависимость наблюдалась в эксперименте по туннелированию с использованием методов кулоновской блокады, описанном в [15].

В пределе $N \to \infty$ состояния вокруг каждого края цепи начинают вести себя так, как будто цепь полубесконечна. При этом эти два полюса с вычетами, равными $1/2$, вместе соответствуют одному возбуждению Ферми, которое разделено между двумя краями цепи. Таким образом, вычет в терминах соответствующих возбуждений Боголюбова равен 1, как и должно быть. Но глядя только на один конец цепи, мы «видим» только половину этого возбуждения. Это возбуждение Ферми очень специфично, потому что это возбуждение, которое связывает два основных состояния с разной четностью (числом электронов), но с вырожденными энергиями.

Это утверждение можно легко проиллюстрировать на простом примере двухузельной цепи. Гамильтониан (1) для двух сайтов можно легко диагонализировать с помощью преобразования Боголюбова. В терминах операторов Боголюбова гамильтониан принимает вид

$$\hat{H}_2 = E_0 + \varepsilon_1 c_1^\dagger c_1 + \varepsilon_2 c_2^\dagger c_2, \tag{10}$$

где

$$c_{1,2} = u\frac{(\psi_1+\psi_2)}{\sqrt{2}} \pm v\frac{(\psi_1^\dagger - \psi_2^\dagger)}{\sqrt{2}},$$
$$v^2, u^2 = \frac{1}{2}\left(1 \pm \frac{\mu}{t}\right),$$
$$\varepsilon_{1,2} = t\left(1 \mp \frac{\Delta}{\sqrt{t^2-\mu^2}}\right).$$

Для $\Delta = \sqrt{t^2-\mu^2}$ (что в случае $\mu = 0$ дает $\Delta = t$) мы получаем $\varepsilon_1 = 0$ (решение (53) для случая $N = 2$, $\omega = 0$). Тогда $|\Phi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1^\dagger - \psi_2^\dagger)|0\rangle$ соответствует основному состоянию и удовлетворяет $c_{1,2}|\Phi_0\rangle = 0$. В то же время, состояние $|\Phi_1\rangle = c_1^\dagger|\Phi_0\rangle = (v + u\psi_1^\dagger\psi_2^\dagger)|0\rangle$ тоже имеет нулевую энергию, что означает, что основное состояние вырождено. Для матричных элементов между этими основными состояний мы имеем

$$\langle\Phi_0|\psi_1|\Phi_1\rangle = u/\sqrt{2}, \qquad \langle\Phi_1|\psi_1|\Phi_0\rangle = v/\sqrt{2}.$$

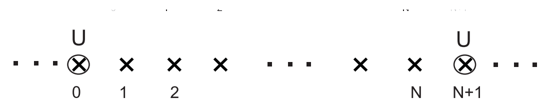

Рис. 1. Бесконечная цепочка Китаева с двумя дефектами

Это означает, что в одночастичной функции G_{11} при $\omega = 0$ появляется полюс с вычетом, равным $1/2$.

3. ТУННЕЛЬНЫЙ ТОК

Сначала рассмотрим стационарные туннельные свойства цепи Китаева. Для этого мы предположим, что в узлах 1 и N цепь присоединена к двум внешними резервуарам с большим числом степеней свободы, обозначенными индексами l и r соответственно. Тогда полный гамильтониан можно записать как

$$\begin{aligned}\hat{\hat{H}} = \hat{H} &+ \sum_p \tau_p^l\left(h_p^{l\dagger}\psi_1 + \psi_1^\dagger h_p^l\right) + \\ &+ \sum_p \tau_p^r\left(h_p^{r\dagger}\psi_N + \psi_N^\dagger h_p^r\right) + \\ &+ \sum_p E_p^l h_p^{l\dagger}h_p^l + \sum_p E_p^r h_p^{r\dagger}h_p^r.\end{aligned} \tag{11}$$

Ток, текущий в цепь через узел 1, определяется обычным способом ([24]) как

$$I_l(t) = i\sum_p \tau_p^l\left\langle h_p^{l\dagger}\psi_1 - \psi_1^\dagger h_p^l\right\rangle. \tag{12}$$

Используя формализм нестационарной диаграммной техники, это выражение можно переписать как

$$I_l(t) = -\sum_p \tau_p^l\left(\tilde{G}^<_{lp,1}(t,t) - \tilde{G}^<_{1,lp}(t,t)\right), \tag{13}$$

где

$$\begin{aligned}\tilde{G}^<_{lp,1}(t,t) &= \int dt_1 g^<_{lp}(t,t_1)\tau_p^l\tilde{G}^A_{1,1}(t_1,t) + \\ &+ \int dt_1 g^R_{lp}(t,t_1)\tau_p^l\tilde{G}^<_{1,1}(t_1,t), \\ \tilde{G}^<_{1,lp}(t,t) &= \int dt_1 \tilde{G}^<_{1,1}(t,t_1)\tau_p^l g^A_{lp}(t_1,t) + \\ &+ \int dt_1 \tilde{G}^R_{1,1}(t,t_1)\tau_p^l g^<_{lp}(t_1,t).\end{aligned}$$

Параметр p соответствует состояниям внутри обоих резервуаров; $g_{\alpha p}(\omega)$ — функция Грина в резервуаре α, когда он отсоединен от цепочки, где α принимает значения l и r; $\tilde{G}^R_{n,m}(t,t_1)$ — точные функции Грина цепи, учитывающие переходы в резервуары.

Существенно, что туннельный гамильтониан (11) и туннельный ток (12) выражены в терминах настоящих электронных операторов, и заведомо дают ответ для реального электрического тока в системе.

Отметим, что попытки использовать эффективные гамильтонианы в терминах операторов майорановских квазичастиц часто приводят, на наш взгляд, к сомнительным ответам, так как обращение с майорановскими операторами требует большой осторожности и внимания. Из-за клиффордовских перестановочных соотношений непосредственно для майорановских операторов нет теоремы Вика и парные корреляторы не имеют смысла функций Грина, составляющих основу обычной диаграммной техники. В расчетах, представленных в статье, мы не сталкиваемся с какими-либо сложностями, с которыми мы столкнулись бы, если бы работали с операторами Майораны. Для задачи о конечной цепочке Китаева произвольной длины, вставленной между двумя проводами и описываемой гамильтонианом (11), мы вычислили точно электронный ток (12). Неудивительно, что могут появляться некоторые расхождения между нашими результатами и результатами [25–27] и других авторов, поскольку последние были получены с использованием ряда приближений в представлении операторов Майораны.

В дальнейшем мы, как обычно, предполагаем, что из-за большого числа частиц и степеней свободы в каждом резервуаре функция распределения частиц существенно не меняется на протяжении всего эксперимента и, следовательно, каждый резервуар остается практически в равновесном состоянии. Однако система в целом не находится в равновесии, хотя в этом разделе мы считаем ее стационарной, а величина тока не меняется со временем. Таким образом, выражение (13) можно переписать с использованием частотно-зависимых функций Грина следующим образом:

$$I_l = -\sum_p \tau_p^l \int \frac{d\omega}{2\pi} \left(\tilde{G}^<_{lp,1}(\omega) - \tilde{G}^<_{1,lp}(\omega)\right). \tag{14}$$

Здесь

$$\begin{aligned}\tilde{G}^<_{lp,1}(\omega) &= g^<_{lp}(\omega)\tau_p^l \tilde{G}^A_{1,1}(\omega) + g^R_{lp}(\omega)\tau_p^l \tilde{G}^<_{1,1}(\omega),\\ \tilde{G}^<_{1,lp}(t,t) &= \tilde{G}^<_{1,1}(\omega)\tau_p^l g^A_{lp}(\omega) + \tilde{G}^R_{1,1}(\omega)\tau_p^l g^<_{lp}(\omega).\end{aligned} \tag{15}$$

Иы можем упростить это выражение, если введем неприводимую часть

$$\Sigma_\alpha^{R(A,<)}(\omega) = \sum_p \left(\tau_p^\alpha\right)^2 g_{\alpha p}^{R(A,<)}(\omega). \tag{16}$$

Тогда мы можем использовать, что

$$\Sigma^<_\alpha(\omega) = n_\alpha(\omega)\left(\Sigma^A_\alpha(\omega) - \Sigma^R_\alpha(\omega)\right),$$

где $n_\alpha(\omega)$ — функции распределения Ферми–Дирака для резервуаров l и r. Тогда уравнение (14) может быть переписано как

$$\begin{aligned}\hat{I}_l = -\int \frac{d\omega}{2\pi}\left(\Sigma^A_l(\omega) - \Sigma^R_l(\omega)\right) \times \\ \times \left(n_l(\omega)\left(\tilde{\Gamma}^A_{1,1}(\omega) - \tilde{\Gamma}^R_{1,1}(\omega)\right) - \tilde{\Gamma}^<_{1,1}(\omega)\right).\end{aligned} \tag{17}$$

Здесь ток I_l задается верхним левым элементом матрицы $\hat{I}_l$ ($\hat{I}_l^{11}$). Выражение этого типа в терминах неравновесных функций Грина было впервые выведено в [24] и позже применено в [28]. Это выражение кажется асимметричным относительно левого и правого контакта. Но для стационарного случая правильно рассчитанный ток (17) всегда можно записать в явно симметричной форме.

В нашем случае уравнение (17) упрощается дальше с помощью соотношений

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma}^<_{1,1}(\omega) =&\tilde{\Gamma}^R_{1,1}(\omega)\Sigma^<_l(\omega)\tilde{\Gamma}^A_{1,1}(\omega) + \\ &+\tilde{\Gamma}^R_{1,N}(\omega)\Sigma^<_r(\omega)\tilde{\Gamma}^A_{N,1}(\omega),\end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma}^\delta_{1,1}(\omega) =&\tilde{\Gamma}^R_{1,1}(\omega)\Sigma^\delta_l(\omega)\tilde{\Gamma}^A_{1,1}(\omega) + \\ &+\tilde{\Gamma}^R_{1,N}(\omega)\Sigma^\delta_r(\omega)\tilde{\Gamma}^A_{N,1}(\omega).\end{aligned} \tag{19}$$

Здесь

$$\tilde{\Gamma}^\delta_{1,1}(\omega) = \tilde{\Gamma}^A_{1,1}(\omega) - \tilde{\Gamma}^R_{1,1}(\omega),$$
$$\Sigma^\delta_\alpha(\omega) = \Sigma^A_\alpha(\omega) - \Sigma^R_\alpha(\omega).$$

Используя широзонное приближение для резервуаров, будем считать, что для рассматриваемых значений ω выполняется $\Sigma^A_{l(r)}(\omega) \approx i\gamma_{l(r)}$, $\Sigma^R_{l(r)}(\omega) \approx -i\gamma_{l(r)}$, где $\gamma_{l(r)} = \pi\nu^{l(r)}(\tau_p^{l(r)})^2$ и $\nu^{l(r)}$ — плотность состояний в резервуаре $l(r)$.

Прямая подстановка дает

$$\hat{I}_l = 4\gamma_l\gamma_r \int \frac{d\omega}{2\pi}\tilde{\Gamma}^R_{1,N}(\omega)\tilde{\Gamma}^A_{N,1}(\omega)(n_l(\omega) - n_r(\omega)). \tag{20}$$

Формула такого типа была выведена в [24]. Следует отметить, что полученное уравнение для тока через систему симметрично относительно двух ее краев. Это, естественно, означает, что в стационарном случае ток, втекающий в систему, равен току, вытекающему из нее. Сохранение полного тока не может быть нарушено ни в одной системе и не требует дополнительных условий, таких как равные скорости туннелирования или симметрично приложенное напряжение на разных краях. Таким образом, появление асимметричных выражений для стационарного туннельного тока, полученных в некоторых работах, касающихся систем типа цепочки Китаева (например, [29]), является сигналом к проверке применяемого приближения. Это утверждение не меняется для систем со взаимодействием, но вывод явно симметричного выражения в этом случае более сложен. Примеры такого расчета для систем с электрон-фононным взаимодействием приведены, например, в [30,31]. Подчеркнем, что уравнение (20) является точным и явно симметричным для левого и правого контактов.

Поскольку мы стремимся исследовать свойства низкоэнергетического связанного состояния, соответствующего «майорановской моде», мы рассмотрим случай, когда приложенное напряжение меньше величины сверхпроводящей щели. В этом случае мы исключаем влияние квазичастичных состояний непрерывного спектра. Чтобы выразить $\widetilde{\Gamma}^R_{1,N}(\omega)$ через функции Грина изолированной цепочки $\Gamma^R_{n,m}(\omega)$, мы используем уравнение Дайсона

$$\begin{aligned}\widetilde{\Gamma}^R_{n,m}(\omega) =& \Gamma^R_{n,m}(\omega) + \Gamma^R_{n,1}(\omega)\Sigma^R_l(\omega)\widetilde{\Gamma}^R_{1,m}(\omega) \\ &+ \Gamma^R_{n,N}(\omega)\Sigma^R_r(\omega)\widetilde{\Gamma}^R_{N,m}(\omega).\end{aligned} \tag{21}$$

Простые алгебраические преобразования дают

$$\begin{aligned}\widetilde{\Gamma}^R_{1,N}(\omega) = &\left[\hat{\mathrm{I}} + \gamma_l\gamma_r\left(\hat{\mathrm{I}} + i\gamma_l\Gamma^R_{1,1}(\omega)\right)\Gamma^R_{1,N}(\omega)\times\right. \\ &\left.\times\left(\hat{\mathrm{I}} + i\gamma_r\Gamma^R_{N,N}(\omega)\right)\Gamma^R_{N,1}(\omega)\right]^{-1}\times \\ &\times\left(\hat{\mathrm{I}} + i\gamma_l\Gamma^R_{1,1}(\omega)\right)\Gamma^R_{1,N}(\omega)\left(\hat{\mathrm{I}} + i\gamma_r\Gamma^R_{N,N}(\omega)\right).\end{aligned}$$

где $\hat{\mathrm{I}}$ — единичная матрица. Явная форма функций Грина $\Gamma^R_{n,m}(\omega)$ для $|\omega| \ll |\Delta|, t$ выводится в Приложении. Простую форму можно получить, если $\Delta^2/(t\gamma) \gg 1$. Сохраняя ведущие члены в (55) по этому параметру, получаем

$$\widetilde{\Gamma}^R_{1,N}(\omega) = \frac{C\omega_0}{\omega^2 - \omega_0^2 + 2i(\gamma_l+\gamma_r)C\omega - 4\gamma_l\gamma_r C^2}\begin{pmatrix} 1 & -\frac{\Delta}{|\Delta|} \\ \frac{\Delta^*}{|\Delta|} & -1\end{pmatrix}, \tag{22}$$

$$C \equiv -\frac{|\Delta|\,(4t^2-\mu^2)}{2t(4(t^2-|\Delta|^2)-\mu^2)}(\chi_+ - \chi_-)^2 = \frac{|\Delta|\,(4t^2-\mu^2)}{2t(t+|\Delta|)^2}. \tag{23}$$

Подставляя этот ответ в (20), мы получаем

$$I_l = \int\frac{d\omega}{2\pi}\frac{8\gamma_l\gamma_r C^2\omega_0^2}{\left|\omega^2-\omega_0^2+2i(\gamma_l+\gamma_r)C\omega - 4\gamma_l\gamma_r C^2\right|^2}(n_l(\omega)-n_r(\omega)). \tag{24}$$

Эти и дальнейшие вычисления производятся для следующей иерархии параметров: $t > \Delta > \gamma_{l,r}$. В случае $\gamma_{l,r} > \Delta$ мы не можем исключить влияние непрерывной части спектра на проводимость, а информация о низкоэнергетических резонансах теряется, поэтому этот случай мы рассматривать не будем.

Мы видим, что величина тока (25) прямо пропорциональна ω_0^2, поэтому ток экспоненциально уменьшается с увеличением длины цепи. Более того, если $\omega_0 = 0$, что обычно ассоциируется с частицами Майораны, ток через систему вообще не течет. Обратим внимание, что уравнение (25) симметрично по параметрам контактов l и r, как и должно быть. Аналогичное выражение для нормальной компоненты тока было получено в квазиклассическом подходе в работе [18], где также было отмечено, что пик при нулевом напряжении в туннельной проводимости вряд ли может быть замечен при реальном соотношении между ω_0 и $\gamma_{l,r}$.

Пик в туннельной проводимости, связанный с майорановскими состояниями, также исследовался в работе [32]. В данной работе рассматривался один NS-контакт, в котором предполагалось, что химический потенциал сверхпроводника каким-то образом фиксирован. Задача решалась методом эффективного коэффициента прохождения для квазичастиц, что при наличии связанного состояния всегда приводит к формулам типа (25). Однако амплитуду пика для двух разных систем: одиночный NS-контакт и сверхпроводник между двумя нормальными контактами, напрямую сравнивать нельзя из-за проблемы фиксации химического потенциала сверхпроводника. Заметим, что результаты, аналогичные работе [32], для тока в NS-контакте при учете майорановских состояний, могут быть получены также методами работы [33].

Если в формуле (25) приложенное напряжение больше ширины локализованных состояний, но меньше значения сверхпроводящей щели, что дает

$n_l(\omega) - n_r(\omega) = 1$ для $|\omega| \lesssim \gamma_l, \gamma_r$, то мы получаем простое окончательное выражение для туннельного тока, связанного с майорановскими модами:

$$I_l = \frac{2\gamma_l\gamma_r C\omega_0^2}{\gamma_l + \gamma_r}\,\frac{1}{4\gamma_l\gamma_r C^2 + \omega_0^2}. \tag{25}$$

Таким образом, величина тока всегда определяется наименьшей из тех скоростей переноса, которые есть в системе (слабым звеном системы); в нашем случае эти скорости определяются параметрами $\omega_0^2/(\gamma_l + \gamma_r), \gamma_l, \gamma_r$. Если $\omega_0^2 \geq C^2\gamma_l\gamma_r$, то общее уравнение (25) приводит к значению тока, пропорциональному $\gamma_l\gamma_r/(\gamma_l + \gamma_r)$, что является обычным выражением для туннелирования через промежуточное состояние. Для рассматриваемой системы физически обоснованным выглядит соотношение $\omega_0 \ll \gamma_l, \gamma_r$. Используя его, получаем

$$I_l = \frac{\omega_0^2}{2C(\gamma_l + \gamma_r)}. \tag{26}$$

Если мы используем уравнения (8) и (23), то эта формула дает

$$I = \begin{cases} \dfrac{2\Delta t}{(\gamma_l + \gamma_r)} e^{-2N(\Delta/t)}, & \Delta \ll t, \\ \dfrac{2t^2}{(\gamma_l + \gamma_r)} e^{-N\ln(2t/(t-\Delta))}, & (t - \Delta) \ll t. \end{cases} \tag{27}$$

Для произвольных параметров $\mu < \Delta < t$ ток всегда мал в длинных цепочках. В случае $\omega_0 = 0$, который считается наиболее благоприятным случаем для наблюдения необычных топологических свойств, мы вообще не сможем увидеть пик туннельной проводимости при нулевом напряжении. Это наблюдение справедливо для модели, рассмотренной в статье, с двумя контактами на краях цепочки. Для измерения стационарного тока в любом эксперименте необходимо иметь по крайней мере два внешних провода, подключенных, скажем, к «левому» и «правому» краям системы. Конечно, существуют и более сложные многоконтактные схемы, но их рассмотрение выходит за рамки данной статьи. Реальные гибридные структуры полупроводник-сверхпроводник, имитирующие цепочку Китаева, требуют рассмотрения модельного гамильтониана, описывающего полупроводниковую проволоку с сильным спин-орбитальным взаимодействием, связанную эффектами близости с нижним слоем из сверхпроводника. В этом случае можно рассматривать сверхпроводник как резервуар с фиксированным химическим потенциалом, а «второй контакт» как контакт между полупроводником и сверхпроводником. В качестве альтернативы соединению на краях мы могли бы также рассмотреть модель цепи Китаева, лежащей на подложке, где все атомы цепи слабо связаны с соответствующими атомами подложки. В этом случае «второй контакт» с резервуаром становится распределенным в пространстве. Эта проблема может быть решена, но она отличается от проблемы, рассмотренной в нашей статье. Тем не менее, если перекрытие локализованного состояния с состояниями резервуара мало, пик тока вблизи нулевого смещения также должен быть малым. Его значение в случае распределенного в пространстве «второго контакта» не будет экспоненциально зависеть от длины цепи, но все равно будет намного меньше, чем ожидается из наивных формул. Это может быть возможной причиной того, что пик нулевого смещения часто плохо наблюдается в обычных туннельных экспериментах [14].

Мы хотели бы подчеркнуть, что наивно используемые общие формулы для туннельного тока между двумя контактами часто вводят в заблуждение, когда их используют для низкоразмерных систем и таких объектов, как цепочка Китаева [21], из-за возможного появления локализованных состояний в области контакта.

Ответ низшего порядка (второго порядка по туннельной связи) квантово-механической теории возмущений описывает ток только в начальный момент времени после «включения» связи, но стационарное значение туннельного тока можно вычислить только с помощью полной системы кинетических уравнений или, что то же самое по сути, полной системы уравнений для нестационарных функций Келдыша – Грина. Только в простых системах с непрерывным спектром и неявно предполагаемой быстрой релаксацией электронов к равновесному распределению эта формула, апеллирующая к равновесной локальной плотности состояний выводов, заведомо справедлива.

Поясним эту идею на примере туннельного контакта с локализованным состоянием на краю одного из контактов. Это локализованное состояние дает резкий пик в локальной плотности состояний, и вносит вклад в простейшую формулу для туннельного тока. Предположим, что это состояние пусто в первый момент (лежит выше уровня Ферми). Затем сразу после того, как мы «включили» положительное напряжение смещения на другой провод, ток начинает течь в это пустое локализованное состояние. Но после некоторого времени релаксации, определяемого скоростью туннелирования, это состояние становится заполненным, и после этого ни один электрон не может туннелировать в это состояние. Стационарный туннельный ток обращается в ноль, хотя самая простая формула все еще дает вам что-то вроде «нулевого пика» в туннельной проводимости. Чтобы это локализованное состояние повлияло на стационарный ток, нужно включить некоторые неупругие процессы, ответственные за удаление (или добавление) электронов из этого локализованного состояния. Для системы конечного размера также возможно, что это локализованное на одном краю системы состояние имеет некоторое перекрытие со вторым контактом. (И это наш случай и случай с распределенным «заземленным контактом» в реальной системе.)

В обычной формуле для туннельного тока, которая использует локальную плотность состояний контактов, неявно предполагается, что в любой момент мы фиксируем химические потенциалы для всех состояний контактов. Для поддержания постоянного химического потенциала система должна быть соединена с некоторым резервуаром через контакт, обеспечивающий обмен частицами. Таким образом, если мы говорим, что мы фиксируем химический потенциал локализованных состояний, то мы имеем в виду, что неявным образом учитываем некоторые неупругие релаксационные процессы или прямую связь с резервуаром для этих состояний.

4. НЕСТАЦИОНАРНЫЙ ТОК

Теперь попытаемся ответить на вопрос о том, каковы типичные временные масштабы для тока или переноса заряда с одного края цепи на другой. Мы поставим вопрос по другому, чем это было сделано в статье [18], где исследовалось влияние периодического изменения туннельной прозрачности барьеров на туннельную проводимость при нулевом напряжении на системе. Для такой постановки задачи интересным результатом стало обнаружение и исследование резонанса между частотой внешнего воздействия и расщеплением ω_0 майорановских состояний. Нас же будут интересовать характерные скорости переходных процессов. Для этого предположим, что система в целом находится в равновесии при $t < 0$, а затем при $t = 0$ к одному из выводов прикладывается напряжение. Это дополнительное напряжение вызывает нестационарный ток, который при $t \to +\infty$ достигает стационарного значения (25).

Приложенное напряжение смещает уровни энергии в резервуарах на V_α, где индекс α обозначает резервуар. Таким образом, гамильтониан резервуаров теперь можно записать как

$$\begin{aligned}\hat{H}_\alpha(t) = &\sum_p \tau_p^\alpha \left(h_p^{\alpha\dagger}\psi_1 + \psi_1^\dagger h_p^\alpha\right) + \\ &+ \sum_p \left(E_p^\alpha + V_\alpha\theta(t)\right) h_p^{\alpha\dagger} h_p^\alpha.\end{aligned} \tag{28}$$

Ток, текущий из левого резервуара в систему, определяется как (для «правого» контакта r все формулы можно записать так же)

$$\begin{aligned}I_l(t) = -\int dt' \Big(&\Sigma_l^<(t,t')\widetilde{G}_{1,1}^A(t',t) + \\ &+\Sigma_l^R(t,t_1)\widetilde{G}_{1,1}^<(t',t) - \\ &-\widetilde{G}_{1,1}^<(t,t')\Sigma_l^A(t',t) - \\ &-\widetilde{G}_{1,1}^R(t,t')\Sigma_l^<(t',t)\Big).\end{aligned} \tag{29}$$

Здесь неприводимая часть имеет вид

$$\begin{aligned}\Sigma_\alpha^R(t,t') = -i&\sum_p (\tau_p^\alpha)^2 \theta(t-t') \times \\ &\times \exp\left(-iE_p^\alpha(t-t') - iV_\alpha \int_{t'}^t dt_1 \theta(t_1)\right),\end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned}\Sigma_\alpha^<(t,t') = i&\sum_p (\tau_p^\alpha)^2 n_p^\alpha \times \\ &\times \exp\left(-iE_p^\alpha(t-t') - iV_\alpha \int_{t'}^t dt_1 \theta(t_1)\right).\end{aligned} \tag{31}$$

В частотном представлении эти выражения соответствуют формулам

$$\begin{aligned}\Sigma_\alpha^R(\omega,\omega') = -i(\tau^\alpha)^2 \int d\varepsilon \nu^\alpha(\varepsilon) \Bigg[&-\frac{1}{\omega - \varepsilon - V_\alpha + 2i\delta}\left(-\frac{1}{\omega' - \omega - 2i\delta} + \frac{1}{\omega' - \omega + V_\alpha}\right) + \\ &+ \frac{1}{\omega' - \varepsilon + 2i\delta}\left(-\frac{1}{\omega - \omega' - V_\alpha} + \frac{1}{\omega - \omega' - 2i\delta}\right)\Bigg],\end{aligned} \tag{32}$$

$$\Sigma_\alpha^<(\omega,\omega') = i(\tau^\alpha)^2 \int d\varepsilon \nu^\alpha(\varepsilon) n^\alpha(\varepsilon) \left(\frac{1}{\omega - \varepsilon - V_\alpha + i\delta} - \frac{1}{\omega - \varepsilon - i\delta}\right)\left(\frac{1}{\omega' - \varepsilon - V_\alpha - i\delta} - \frac{1}{\omega' - \varepsilon + i\delta}\right). \tag{33}$$

Здесь $\nu^\alpha(\varepsilon)$ — плотность состояний в резервуаре α, $\delta \to +0$. Для простоты предположим, что τ^α не зависит от p. Для широкозонного приближения, когда мы предполагаем, что $\nu(\varepsilon)$ существенно не меняется для $\varepsilon \sim \omega, \omega', V_{l,r}$, эти выражения упрощаются до

$$\begin{aligned}
\Sigma_l^R(\omega,\omega') =& - i\gamma_l 2\pi\delta(\omega'-\omega),\\
\Sigma_l^<(\omega,\omega') =& \frac{i\gamma_l}{\pi}\int d\varepsilon n^l(\varepsilon)\times\\
&\times\left(\frac{1}{\omega-\varepsilon-V_l+i\delta}-\frac{1}{\omega-\varepsilon-i\delta}\right)\times\\
&\times\left(\frac{1}{\omega'-\varepsilon-V_l-i\delta}-\frac{1}{\omega'-\varepsilon+i\delta}\right).
\end{aligned}$$

В результате в частотном представлении (29) упрощается до

$$\begin{aligned}
\hat I_l(\omega) = -\int\frac{d\Omega}{2\pi}\Big(&\Sigma_l^<(\Omega,\Omega-\omega)\widetilde\Gamma^\delta_{1,1}(\Omega-\omega)-\\
&-2i\gamma_l\widetilde\Gamma^<_{1,1}(\Omega,\Omega-\omega)\Big).
\end{aligned}\tag{34}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
\widetilde\Gamma^<_{1,1}(\Omega,\Omega-\omega) =& \widetilde\Gamma^R_{1,1}(\Omega)\Sigma_l^<(\Omega,\Omega-\omega)\widetilde\Gamma^A_{1,1}(\Omega-\omega)+\\
&+\widetilde\Gamma^R_{1,N}(\Omega)\Sigma_r^<(\Omega,\Omega-\omega)\widetilde\Gamma^A_{N,1}(\Omega-\omega),\\
\widetilde\Gamma^\delta_{1,1}(\Omega-\omega) =& \widetilde\Gamma^A_{1,1}(\Omega-\omega)-\widetilde\Gamma^R_{1,1}(\Omega).
\end{aligned}$$

Используя уравнения Дайсона для запаздывающих и опережающих функций Грина, мы можем показать, что

$$\begin{aligned}
\widetilde\Gamma^\delta_{1,1}(\Omega-\omega) =& \omega\sum_{n=1}^N\Gamma^R_{1,n}(\Omega)\Gamma^A_{n,1}(\Omega-\omega)+\\
&+\widetilde\Gamma^R_{1,1}(\Omega)2i\gamma_l\widetilde\Gamma^A_{1,1}(\Omega-\omega)+\\
&+\widetilde\Gamma^R_{1,N}(\Omega)2i\gamma_r\widetilde\Gamma^A_{N,1}(\Omega-\omega).
\end{aligned}$$

Подставляя два последних выражения в (34), получим

$$\begin{aligned}
\hat I_l(\omega) = -\int\frac{d\Omega}{2\pi}\Bigg(&\omega\sum_{n=1}^N\widetilde\Gamma^R_{1,n}(\Omega)\widetilde\Gamma^A_{n,1}(\Omega-\omega)\times\\
&\times\Sigma_l^<(\Omega,\Omega-\omega)+\\
&+2i\left(\gamma_r\Sigma_l^<(\Omega,\Omega-\omega)-\gamma_l\Sigma_r^<(\Omega,\Omega-\omega)\times\right)\\
&\times\widetilde\Gamma^R_{1,N}(\Omega)\widetilde\Gamma^A_{N,1}(\Omega-\omega)\Bigg).
\end{aligned}\tag{35}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
\Sigma_r^<(\omega,\omega') =& \frac{i\gamma_r}{\pi}\int d\varepsilon n^l(\varepsilon)\times\\
&\times\left(\frac{1}{\omega-\varepsilon-V_r+i\delta}-\frac{1}{\omega-\varepsilon-i\delta}\right)\times\\
&\times\left(\frac{1}{\omega'-\varepsilon-V_r-i\delta}-\frac{1}{\omega'-\varepsilon+i\delta}\right).
\end{aligned}\tag{36}$$

Мы видим, что первый член в (35) существует только если $V_l \neq 0$ и не зависит напрямую от свойств резервуара r. Это означает, что этот член соответствует заполнению состояний на левом краю цепи из-за изменения ее химического потенциала. Следовательно, второй член представляет собой ток, который течет из одного резервуара в другой через всю цепочку. Если рассмотреть только второй член, то получим

$$\begin{aligned}
\hat I_l(t) =& \frac{2\gamma_l\gamma_r}{\pi}\int d\varepsilon dV\hat M_{1,N}(t,\varepsilon,V)\left(\hat M_{1,N}(t,\varepsilon,V)\right)^\dagger\times\\
&\times\left[n^l(\varepsilon)\delta(V-V_l)-n^r(\varepsilon)\delta(V-V_r)\right],\\
\hat M_{1,N}(t,\varepsilon,V) =& \int\frac{d\Omega}{2\pi}e^{-i\Omega t}\widetilde\Gamma^R_{1,N}(\Omega)\times\\
&\times\left(\frac{1}{\Omega-\varepsilon-V+i\delta}-\frac{1}{\Omega-\varepsilon-i\delta}\right).
\end{aligned}$$

Поскольку нашей задачей является изучить перенос возмущения через цепочку, будем считать, что в момент времени $t=0$ напряжение меняется только на правом контакте, и будем смотреть на зависящий от времени ток в левый контакт при условии $V_l = 0$. Тогда прямыми вычислениями можем получить, что

$$\begin{aligned}
\hat M_{1,N}(t,\varepsilon,V) =& -i\theta(-t)\frac{e^{-i\varepsilon t}C\omega_0}{(\varepsilon+iC(\gamma_l+\gamma_r))^2-\overline\omega^2}\begin{pmatrix}1 & -\frac{\Delta}{|\Delta|}\\ \frac{\Delta^*}{|\Delta|} & -1\end{pmatrix} - i\theta(t)\frac{e^{-i(\varepsilon+V_r)t}C\omega_0}{(\varepsilon+V+iC(\gamma_l+\gamma_r))^2-\overline\omega^2}\begin{pmatrix}1 & -\frac{\Delta}{|\Delta|}\\ \frac{\Delta^*}{|\Delta|} & -1\end{pmatrix}-\\
&-\frac{iC\omega_0\theta(t)}{2\overline\omega}e^{-C(\gamma_l+\gamma_r)t-i\overline\omega t}\begin{pmatrix}1 & -\frac{\Delta}{|\Delta|}\\ \frac{\Delta^*}{|\Delta|} & -1\end{pmatrix}\left(-\frac{1}{\varepsilon+V+iC(\gamma_l+\gamma_r)-\overline\omega}+\frac{1}{\varepsilon+iC(\gamma_l+\gamma_r)-\overline\omega}\right)-\\
&-\frac{iC\omega_0\theta(t)}{-2\overline\omega}e^{-C(\gamma_l+\gamma_r)t+i\overline\omega t}\begin{pmatrix}1 & -\frac{\Delta}{|\Delta|}\\ \frac{\Delta^*}{|\Delta|} & -1\end{pmatrix}\left(-\frac{1}{\varepsilon+V+iC(\gamma_l+\gamma_r)+\overline\omega}+\frac{1}{\varepsilon+iC(\gamma_l+\gamma_r)+\overline\omega}\right).
\end{aligned}$$

$$I_l(t) = \frac{4\gamma_l\gamma_r C^2\omega_0^2}{\pi}\theta(t)\int d\varepsilon n^l(\varepsilon)\left|\frac{1}{(\varepsilon+iC(\gamma_l+\gamma_r))^2-\overline{\omega}^2}\right|^2 -$$
$$- \frac{4\gamma_l\gamma_r C^2\omega_0^2}{\pi}\theta(t)\int d\varepsilon n^r(\varepsilon - V_r)\times$$
$$\times\left|-\frac{e^{-i\varepsilon t}}{(\varepsilon+iC(\gamma_l+\gamma_r))^2-\overline{\omega}^2} - \frac{1}{2\overline{\omega}}e^{-C(\gamma_l+\gamma_r)t-i\overline{\omega}t}\left(-\frac{1}{\varepsilon+iC(\gamma_l+\gamma_r)-\overline{\omega}}+\frac{1}{\varepsilon-V_r+iC(\gamma_l+\gamma_r)-\overline{\omega}}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2\overline{\omega}}e^{-C(\gamma_l+\gamma_r)t+i\overline{\omega}t}\left(-\frac{1}{\varepsilon+iC(\gamma_l+\gamma_r)+\overline{\omega}}+\frac{1}{\varepsilon-V_r+iC(\gamma_l+\gamma_r)+\overline{\omega}}\right)\right|^2.$$

Здесь

$$\overline{\omega} = \sqrt{\omega_0^2 - C^2(\gamma_l-\gamma_r)^2}. \qquad (37)$$

Как и ожидалось, если $t\to\infty$, то ток приближается к своему стационарному значению (25):

$$I_l(t\to\infty) = \frac{4\gamma_l\gamma_r C^2\omega_0^2}{\pi}\theta(t)\times \times\int d\varepsilon(n^l(\varepsilon)-n^r(\varepsilon-V_r))\times \times\left|\frac{1}{(\varepsilon+iC(\gamma_l+\gamma_r))^2-\overline{\omega}^2}\right|^2.$$

Если $t\to+0$, ток на противоположном краю цепи не наблюдается, что иллюстрирует непрерывность изменения тока при проходе через $t=0$:

$$I_l(t\to+0) = \frac{4\gamma_l\gamma_r C^2\omega_0^2}{\pi}\theta(t)\times \times\int d\varepsilon(n^l(\varepsilon)-n^r(\varepsilon))\times \times\left|\frac{1}{(\varepsilon+iC(\gamma_l+\gamma_r))^2-\overline{\omega}^2}\right|^2 = 0.$$

Если теперь, как и в предыдущем разделе, нас интересует роль «майорановских состояний», то мы прикладываем к правому контакту дополнительное напряжение, которое больше ширины локализованных состояний, но меньше значения сверхпроводящей щели. Это означает, что для $\varepsilon\lesssim\gamma_l,\gamma_r$ выполняются условия

$$n^l(\varepsilon)=n^r(\varepsilon)=0,\quad n^r(\varepsilon-V_r)=1.$$

Ток определяется как

$$I_l(t) = -\frac{2\gamma_l\gamma_r C\omega_0^2}{\gamma_l+\gamma_r}\frac{1}{\omega_0^2+4C^2\gamma_l\gamma_r}\theta(t)+ +\frac{2\gamma_l\gamma_r C\omega_0^2}{(\gamma_l+\gamma_r)\overline{\omega}^2}e^{-2C(\gamma_l+\gamma_r)t}\theta(t)- -i\gamma_l\gamma_r\frac{C^2\omega_0^2}{\overline{\omega}^2}\frac{e^{-2C(\gamma_l+\gamma_r)t+2i\overline{\omega}t}\theta(t)}{\overline{\omega}+iC(\gamma_l+\gamma_r)}+ +i\gamma_l\gamma_r\frac{C^2\omega_0^2}{\overline{\omega}^2}\frac{e^{-2C(\gamma_l+\gamma_r)t-2i\overline{\omega}t}\theta(t)}{\overline{\omega}-iC(\gamma_l+\gamma_r)}. \qquad (38)$$

Мы рассматриваем случай $\gamma_r,\gamma_l\gg\omega_0$ в предположении что ω_0 всегда мало. Но для очень симметричной туннельной связи с выводами мы могли бы иметь $\omega_0^2\gg(\gamma_r-\gamma_l)^2$. Этот случай выглядит нереалистичным, тем не менее, он демонстрирует осциллирующий токовый сигнал на левом краю:

$$I_l(t) = -\frac{\omega_0^2}{2C(\gamma_l+\gamma_r)}\times \times\left[1-e^{-2C(\gamma_l+\gamma_r)t}\right]- -\left[\frac{\omega_0}{2}\sin(2\omega_0 t)-\frac{C(\gamma_l+\gamma_r)}{2}(1-\cos(2\omega_0 t))\right] \times e^{-2C(\gamma_l+\gamma_r)t}. \qquad (39)$$

Если $\omega_0\ll|\gamma_r-\gamma_l|$ и $t>0$, уравнение (38) упрощается

$$I_l(t) = -\frac{\omega_0^2}{2C(\gamma_l+\gamma_r)}\times \times\left[1+\frac{4\gamma_l\gamma_r}{(\gamma_l-\gamma_r)^2}e^{-2C(\gamma_l+\gamma_r)t} -\frac{(\gamma_l+\gamma_r)}{(\gamma_l-\gamma_r)^2}\left(\gamma_l e^{-4C\gamma_r t}+\gamma_r e^{-4C\gamma_l t}\right)\right]. \qquad (40)$$

(Заметим, что знак минуса означает, что ток течет из r в l.) Для существенно различных скоростей туннелирования, например, $\gamma_r \gg \gamma_l$, временная эволюция ведущего вклада в ток определяется самой медленной скоростью:

$$I_l(t) = -\frac{\omega_0^2}{2C\gamma_r}\left[1 - e^{-4C\gamma_l t}\right]. \qquad (41)$$

Последняя формула показывает, что если $\gamma_l \to 0$, то токовый сигнал на другом конце цепочки нарастает очень медленно.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье показано, что транспортные свойства цепочки Китаева конечной длины можно полностью исследовать с помощью обычной техники электронных функций Грина. Для любой нестационарной задачи этот язык, по-видимому, гораздо удобнее языка майорановских фермионов и других методов и позволяет получать точные аналитические результаты. Наши вычисления позволяют связать феноменологические параметры для квазичастиц при квазиклассических расчетах с микроскопическим описанием квазиодномерных сверхпроводников.

Было показано, что стационарный туннельный ток через конечную цепочку всегда определяется наименьшей из скоростей переноса среди параметров $\omega_0^2/(\gamma_l + \gamma_r), \gamma_l, \gamma_r$, если приложенное напряжение меньше сверхпроводящей щели. Для произвольных параметров $\mu < |\Delta| < t$ стационарный ток всегда экспоненциально мал для длинных цепочек. Следует отметить, что для конечной цепочки Китаева, помещенной между двумя внешними контактами-термостатами, не может быть заметного пика при ω_0 в туннельной проводимости. А в случае $\omega_0 = 0$ стационарный ток полностью исчезает.

Также получено поведение туннельного тока, зависящее от времени, после внезапного изменения напряжения смещения в одном из выводов. Было показано, что типичные временные масштабы эволюции туннельного тока определяются в основном скоростями туннелирования γ_l, γ_r из левого и правого краевых участков цепи в соответствующие выводы. Хотя мы представили здесь результаты для идеальной системы, мы можем быть уверены на основе выводов статей [34, 35], что слабый беспорядок не меняет заметно свойства идеальной цепи Китаева. Поэтому только сильный беспорядок может полностью изменить наши результаты.

В заключение заметим, что при рассмотрении систем из набора китаевских цепочек часто строится эффективное описание на основе эффектов кулоновской блокады. Однако такое эффективное описание чувствительно к скоростям переноса заряда, это может быть важно для современных предложений по передаче сигнала или квантовому обмену информацией и ее хранению с использованием цепей Китаева.

Финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, грант № 23-22-00289.

ПРИЛОЖЕНИЕ. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ИЗОЛИРОВАННОЙ ЦЕПОЧКИ КИТАЕВА

В этом разделе мы приводим формулы для функций Грина изолированной цепочки Китаева.

Как показано в [20], точное решение для функций Грина бесконечной цепи можно найти как

$$\Gamma^{0R}_{nm}(\omega) = -\frac{1}{4(|\Delta|^2 - t^2)(A_+ - A_-)} \times \\ \times \left[\chi_+^{|n-m|}\hat{M}_1 - \chi_-^{|n-m|}\hat{M}_2\right]. \qquad (42)$$

Здесь

$$\hat{M}_1 = \begin{pmatrix} \frac{\omega-\mu-2tA_+}{\sqrt{A_+^2-1}} & 2\Delta \operatorname{sign}(n-m) \\ -2\Delta^* \operatorname{sign}(n-m) & \frac{\omega+\mu+2tA_+}{\sqrt{A_+^2-1}} \end{pmatrix},$$

$$\hat{M}_2 = \begin{pmatrix} \frac{\omega-\mu-2tA_-}{\sqrt{A_-^2-1}} & 2\Delta \operatorname{sign}(n-m) \\ -2\Delta^* \operatorname{sign}(n-m) & \frac{\omega+\mu+2tA_-}{\sqrt{A_-^2-1}} \end{pmatrix}.$$

Комплексное значение квадратного корня $\sqrt{A_\pm^2 - 1}$ определяется таким образом, что оно имеет разрез на отрезке $A_\pm \in (-1, 1)$ и имеет положительные значения при $A_\pm > 1$,

$$A_\pm = \frac{t\mu \pm |\Delta| \sqrt{\mu^2 + 4(|\Delta|^2 - t^2)\left(1 - \frac{(\omega + i\delta)^2}{4|\Delta|^2}\right)}}{2(|\Delta|^2 - t^2)}, \qquad (43)$$

$$\chi_\pm = A_\pm - \sqrt{A_\pm^2 - 1}. \qquad (44)$$

Подразумеваем $\delta \to +0$. Функцию Грина гамильтониана (2) можно записать через функцию Грина бесконечной цепи, используя уравнение Дайсона с возмущением $\hat{V}$,

$$\Gamma^R_{nm}(\omega) = \Gamma^{0R}_{nm}(\omega) + \Gamma^{0R}_{n0}(\omega)U\sigma_z\Gamma^R_{0m}(\omega) + \\ + \Gamma^{0R}_{n,N+1}(\omega)U\sigma_z\Gamma^R_{N+1,m}(\omega). \quad (45)$$

Если мы решим уравнение (45) для $\Gamma^R_{nm}(\omega)$ и учтем предел $U \to \infty$, то мы можем найти точное решение для функций Грина $\Gamma^R_{nm}(\omega)$:

$$\Gamma^R_{nm}(\omega) = \Gamma^{0R}_{nm}(\omega) - \Gamma^{0R}_{n0}\times \\ \times(\omega)\left(\Gamma^{0R}_{0,0}(\omega) - \Gamma^{0R}_{0,N+1}(\omega)(\Gamma^{0R}_{N+1,N+1}(\omega))^{-1}\Gamma^{0R}_{N+1,0}(\omega)\right)^{-1}\times \\ \times\left(\Gamma^{0R}_{0,m}(\omega) - \Gamma^{0R}_{0,N+1}(\omega)(\Gamma^{0R}_{N+1,N+1}(\omega))^{-1}\Gamma^{0R}_{N+1,m}(\omega)\right) - \\ - \Gamma^{0R}_{n,N+1}(\omega)\left(\Gamma^{0R}_{N+1,N+1}(\omega) - \Gamma^{0R}_{N+1,0}(\omega)(\Gamma^{0R}_{00}(\omega))^{-1}\Gamma^{0R}_{0,N+1}(\omega)\right)^{-1}\times \\ \times\left(\Gamma^{0R}_{N+1,m}(\omega) - \Gamma^{0R}_{N+1,0}(\omega)(\Gamma^{0R}_{00}(\omega))^{-1}\Gamma^{0R}_{0m}(\omega)\right). \quad (46)$$

Элементы матрицы $\Gamma^R_{nm}(\omega)$ описывают функции Грина конечной цепи, если аргументы удовлетворяют соотношению $0 < n, m < N+1$. Можно непосредственно проверить, что $\Gamma^R_{nm}(\omega) = 0$, если один из аргументов n и m положительный, а другой отрицательный, что дает нам прямое доказательство того, что наша процедура эффективно удаляет узел $n = 0$ из системы. То же самое верно для узла $n = N + 1$.

Можно видеть, что функция $\Gamma^R_{nm}(\omega)$ может иметь набор полюсов при значениях ω, заданных уравнением

$$\det\left(\Gamma^{0R}_{00}(\omega) - \Gamma^{0R}_{N+1,0}(\omega)(\Gamma^{0R}_{00}(\omega))^{-1}\Gamma^{0R}_{0,N+1}(\omega)\right) = 0. \quad (47)$$

Поскольку $\Gamma^{0R}_{nm}(\omega)$ не имеет полюсов внутри щели, можно предположить, что решения этого уравнения соответствуют энергиям состояний, локализованных на краях цепочки. Прямая подстановка функций Грина (42) позволяет найти решение для ω при произвольных значениях параметров.

Для полубесконечной цепи, если $N \to \infty$, ситуация значительно упрощается. Уравнение (47) упрощается до

$$\det\left(\Gamma^{0R}_{0,0}(\omega)\right) = 0, \quad (48)$$

и он имеет только одно решение в щели $\omega = 0$. это решение не возникает, если $|\mu| > 2t$. Этот полюс при $\omega = 0$ существует в функции $\Gamma^R_{nm}(\omega)$ только если оба n и m положительны или оба отрицательны, для любого набора параметров t, μ, Δ, удовлетворяющего соотношению

$$t^2 > (\mu/2)^2 + \Delta^2,$$

условию, которое разделяет топологически нетривиальную и тривиальную фазы. Это означает, что система, описываемая гамильтонианом (2), имеет два состояния с энергией $\omega = 0$, одно слева, а другое справа от дефекта, разрезающего цепочку на две подсистемы.

Если теперь рассмотреть длинную конечную цепочку длины N, то мы можем записать уравнение для локализованных состояний как

$$\det\left[\Gamma^{(X)R}_{N+1,N+1}(\omega)\right] = 0, \quad (49)$$

где $\Gamma^{(X)R}_{N+1,N+1}(\omega)$ — это функция Грина для полубесконечной цепочки,

$$\Gamma^{(X)R}_{nm}(\omega) \equiv \\ \equiv \Gamma^{0R}_{nm}(\omega) - \Gamma^{0R}_{n0}(\omega)\left(\Gamma^{0R}_{0,0}(\omega)\right)^{-1}\Gamma^{0R}_{0,m}(\omega). \quad (50)$$

Поскольку в дальнейшем нас будут интересовать связанные состояния в щели с энергиями, близкими к нулю, вычисления можно упростить за счет следующего факта. При $\omega \to 0$ значения χ удовлетворяют условию $|\chi_\pm| < 1$. Действительно, при $\omega = 0$ уравнение (44) дает

$$\chi_{\pm} = \frac{-\mu \pm i\sqrt{4t^2 - (\mu^2 + 4|\Delta|^2)}}{2(t + |\Delta|)}. \tag{51}$$

Как следствие,

$$|\chi|^2 = \left(\frac{t - |\Delta|}{t + |\Delta|}\right). \tag{52}$$

Это означает, что $|\chi| < 1$ для $t^2 > ((\mu/2)^2 + \Delta^2)$ и $\omega \ll |\Delta|$. Таким образом, величины типа $|\chi|^N$, появляющиеся в функциях Γ_{0N}, являются малыми параметрами для больших N, и в дальнейшем мы будем называть такие величины «экспоненциально малыми», имея в виду экспоненциальное убывание с длиной цепи (или числом узлов).

Расписывая (49) через ω и $\chi_{\pm}^N$, которые мы считаем малыми, как объяснено выше, получаем

$$0 = \det\left[-\hat{\mathrm{I}}\omega\frac{t}{|\Delta|\,(4t^2 - \mu^2)} - \right. \\ - \begin{pmatrix} 1 & \frac{\Delta}{|\Delta|} \\ \frac{\Delta^*}{|\Delta|} & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\omega} \frac{|\Delta|\,(4t^2 - \mu^2)}{2t(4(t^2 - |\Delta|^2) - \mu^2)} \times \\ \left. \times \left(\chi_+^{N+1} - \chi_-^{N+1}\right)^2\right], \tag{53}$$

где $\hat{\mathrm{I}}$ — единичная матрица. Решение $\omega = 0$ принадлежит полюсу функции Грина, который существует только на полубесконечных участках цепи. Другая пара решений имеет конечные, но малые энергии $\omega = \pm\omega_0$, где

$$\omega_0 = \frac{|\Delta|\,(4t^2 - \mu^2)}{it\sqrt{4(t^2 - |\Delta|^2) - \mu^2}} \times \\ \times \left(\chi_+^{N+1} - \chi_-^{N+1}\right). \tag{54}$$

Здесь мы видим, что это решение удовлетворяет приближениям, которые мы сделали, если $\left|\chi_{\pm}^{N+1}\right| \ll 1$. Принимая во внимание (51), условие $t^2 = ((\mu/2)^2 + \Delta^2)$ разделяет две области с осциллирующим и не осциллирующим ω_0. Если ω_0 пересекает ноль при изменении μ, это означает изменение фермионной четности, как обсуждалось в статье [36].

Главный член разложения функции Грина $\Gamma_{nm}^R(\omega)$ при $\omega \to \pm\omega_0$, который в квантовой механике описывал бы пространственную структуру волновых функций двух локализованных состояний, принимает следующий вид:

$$\Gamma_{nm}^R(\omega) = -\frac{\omega}{(\omega + i\delta)^2 - (\omega_0)^2} \frac{|\Delta|\,(4t^2 - \mu^2)}{2t(4(t^2 - |\Delta|^2) - \mu^2)} \times \\ \times \left((\chi_+^n - \chi_-^n)(\chi_+^m - \chi_-^m) \begin{pmatrix} 1 & \frac{\Delta}{|\Delta|} \\ \frac{\Delta^*}{|\Delta|} & 1 \end{pmatrix} + (\chi_+^{N+1-n} - \chi_-^{N+1-n})(\chi_+^{N+1-m} - \chi_-^{N+1-m}) \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\Delta}{|\Delta|} \\ -\frac{\Delta^*}{|\Delta|} & 1 \end{pmatrix}\right) - \\ - \frac{\omega_0}{(\omega + i\delta)^2 - (\omega_0)^2} \frac{|\Delta|\,(4t^2 - \mu^2)}{2t(4(t^2 - |\Delta|^2) - \mu^2)} \times \\ \times \left((\chi_+^n - \chi_-^n)(\chi_+^{N+1-m} - \chi_-^{N+1-m}) \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\Delta}{|\Delta|} \\ \frac{\Delta^*}{|\Delta|} & -1 \end{pmatrix} + (\chi_+^{N+1-n} - \chi_-^{N+1-n})(\chi_+^m - \chi_-^m) \begin{pmatrix} 1 & \frac{\Delta}{|\Delta|} \\ -\frac{\Delta^*}{|\Delta|} & -1 \end{pmatrix}\right). \tag{55}$$

Диагональные элементы Γ_{nn} показывают пространственное распределение плотности в локализованных состояниях. В пределе $\Delta = t$ только Γ_{11} и Γ_{NN} не равны нулю, поскольку (52)

$$\chi_+^n \propto \chi_-^n \propto |t - |\Delta||^{n/2}.$$

В высокосимметричном случае $\mu = 0$ и $|\Delta| \to t$ энергетические уровни равны

$$\omega_0 = \frac{4\,|\Delta|\,t}{t + |\Delta|}\left(\frac{t - |\Delta|}{t + |\Delta|}\right)^{\frac{N}{2}} \times \\ \times \sin\left(\frac{\pi(N+1)}{2}\right) \to 0. \tag{56}$$

Как было замечено ранее (см., например, [37]), при нечетном числе узлов ω_0 равняется нулю при произвольных значениях t и Δ.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. Yu. Kitaev, УФН **171**, 131 (2001) [Physics-Usp. **44**, 131 (2001)].
2. В. В. Вальков, М. С. Шустин, С. В. Аксенов и др., УФН **192**, 3 (2022) [Physics-Usp. **65**, 2 (2022)].
3. E. Majorana, Il Nuovo Cimento (1924-1942) **14**, 171 (1937).
4. V. Mourik, K. Zuo, S. M. Frolov et al. , Science **336**, 1003 (2012).
5. M. T. Deng et al., Science **354**, 1557 (2016).
6. H. J. Suominen, M. Kjaergaard, A. R. Hamilton et al., Phys. Rev. Lett. **119**, 176805 (2017).
7. E. Prada, P. San-Jose, M. W. A. de Moor et al., Nature Rev. Phys. **2**, 575 (2020).
8. D. Aasen, M. Hell, R. V. Mishmash et al., Phys. Rev. X **6**, 031016 (2016).
9. T. Karzig, Y. Oreg, G. Refael, and M. H. Freedman, Phys. Rev. X **6**, 031019 (2016).
10. F. Pientka, L. Jiang, D. Pekker et al., New J. Phys. **15**, 115001 (2013).
11. T. Hyart, B. van Heck, I. C. Fulga et al., Phys. Rev. B **88**, 035121 (2013).
12. L. Jiang, D. Pekker, J. Alicea et al. Phys. Rev. Lett. **107**, 236401 (2011).
13. B. Van Heck, A. R. Akhmerov, F. Hassler et al., New J. Phys. **14**, 035019 (2012).
14. M. Valentini, M. Borovkov, E. Prada et al., Nature **612**, 442 (2022).
15. S. M. Albrecht, A. P. Higginbotham, M. Madsen et al., Nature **531**, 206 (2016).
16. S.D. Sarma, M. Freedman, and C. Nayak, npj Quantum Inf. **1**, 15001 (2015).
17. C. Nayak, S.H. Simon, A. Stern et al., Rev. Mod Phys. **80**, 1083 (2008).
18. I. M. Khaymovich, J. P. Pekola, and A. S. Melnikov, New J. Phys. **19**, 123026 (2017).
19. J. Jin and X.Q. Li, New J. Phys. **24**, 093009 (2022).
20. L. Arrachea, G. S. Lozano, and A. A. Aligia, Phys. Rev. B **80**, 014425 (2009).
21. A. Zazunov, R. Egger, and A. Levy Yeyati, Phys. Rev. B **94**, 014502 (2016).
22. А. И. Русинов, ЖЭТФ **56**, 2047 (1969) [Sov. Phys. JETP **29**, 1101 (1969)].
23. P. I. Arseyev and B. A. Volkov, Sol. St. Comm. **78**, 373 (1991).
24. C. Caroli, R. Combescot, P. Nozieres, and D. Saint-James, J. Phys. C: Solid State Phys. **4**, 916 (1971).
25. K. Flensberg, Phys. Rev. B **82**, 180516 (2010).
26. S. Smirnov, Phys. Rev. B **105**, 205430 (2022).
27. L. Fu, Phys. Rev. Lett. **104**, 056402 (2010).
28. Y. Meir and N. S. Wingreen, Phys. Rev. Lett. **68**, 2512 (1992).
29. N. Leumer, M. Grifoni, B. Muralidharan, and M. Marganska, Phys. Rev. B. **103**, 165432 (2021).
30. C. Caroli, R. Combescot, P. Nozieres, and D. Saint-James, J. Phys. C: Solid State Phys. **5**, 21 (1972).
31. П. И. Арсеев, Н. С. Маслова, УФН **180**, 1197 (2010) [Physics-Usp. **53**, 1151 (2010)].
32. P. A. Ioselevich and M. V.Feigel'man, New J. Phys. **15**, 055011 (2013).
33. П. И. Арсеев, Н. С. Маслова, Б. М. Билинский, ЖЭТФ **166**, 38 (2024).
34. S. N. Thomas, S. D. Sarma, and J. D. Sau, Phys. Rev. B **106**, 174501 (2022).
35. Y. H. Lai, S. D. Sarma, and J. D. Sau Phys. Rev. B **106**, 094504 (2022).
36. S. Hegde et al., New J. Phys. **17**, 053036 (2015).
37. K. Kawabata, R. Kobayashi, N. Wu, and H. Katsura, Phys. Rev. B **95**, 195140 (2017).