

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕНЕЙ ЧЕРНЫХ ДЫР В РАСШИРЕННЫХ ТЕОРИЯХ ГРАВИТАЦИИ: УЧЕТ ВРАЩЕНИЯ И СВЯЗАННЫЕ ЭФФЕКТЫ

С. О. Алексеев^{a,b}, О. И. Зенин^b, А. О. Байдерин^b*

^a *Государственный астрономический институт им. П. К. Штернберга,
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
119234, Москва, Россия*

^b *Кафедра квантовой теории и физики высоких энергий, физический факультет,
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
119234, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 16 октября 2024 г.,
после переработки 3 декабря 2024 г.
Принята к публикации 3 декабря 2024 г.

С помощью улучшенной версии алгоритма Ньюмена–Яниса получены метрики для вращающихся черных дыр для выборки из теорий, расширяющих ОТО разными способами: модели Хорндески и бамбелби, скалярная гравитация Гаусса–Бонне, петлевая квантовая гравитация, конформная гравитация и $f(Q)$ -гравитация (симметричная телепараллельная гравитация). Полученные метрики используются для моделирования теней черных дыр. Показано, что для части моделей учет дополнительных параметров теорий ведет к появлению критических значений a_{crit} углового момента a . Когда a становится равно a_{crit} , тень перестает существовать. Подтверждается сделанный ранее вывод, что расширенная теория гравитации может как усиливать эффект вращения, так и ослаблять его. Это важно для дальнейшего моделирования профилей теней с учетом постоянно увеличивающейся точности фотографирования черных дыр. Таким образом, при учете вращения фотографии теней черных дыр, наравне с тестом GW170817 или постньютоновским формализмом, могут использоваться для проверки и ограничения расширенных теорий гравитации.

DOI: 10.31857/S0044451025040030

1. ВВЕДЕНИЕ

Постоянное появление новых данных проекта Event Horizon Telescope (ЕНТ) с увеличивающимся разрешением [1] приводит к необходимости повышения точности теоретического моделирования профилей теней черных дыр (ЧД). Первые модели строились на основе сферически-симметричных метрик [2], на следующем шаге стали учитывать второй параметр метрики Рейсснера–Нордстрема в расширенном понимании — приливной заряд [3], позволяющий «измерить» вклад «новой физики» [4]. В ходе дальнейших исследований было показано, что учет приливного заряда и членов следующих порядков разложения позволяет улучшить качество модели-

рования теней для достижения наилучшего соответствия результатам, полученным в рамках проекта ЕНТ (в том числе, и в расчете на будущее) [5, 6].

С самого начала было известно, что обе черные дыры — Sgr A* и M87* — вращающиеся [7, 8], хотя их угловые скорости были измерены совсем недавно [9]. Поэтому для дальнейшего улучшения моделирования теней ЧД необходимо учитывать их вращение, используя метрику, являющуюся аналогом метрики Керра–Ньюмена [10]. Идея измерения параметров вращающейся ЧД обсуждалась и ранее в применении к проекту «Радиоастрон» [11]. Заметим, что (по аналогии с ОТО) в любой модели гравитации первым найденным локальным решением, как правило, оказывается сферически-симметричное, будучи наиболее простым с математической точки зрения. Прямое решение уравнений Эйнштейна–Гильберта в аксиально-симметричном случае — задача весьма

* E-mail: alexeyev@physics.msu.ru

непростая [12], поэтому Ньюменом и Янисом был предложен альтернативный метод получения решения для случая вращающейся ЧД [13]. Интерес к алгоритму Ньюмена и Яниса значительно вырос в последние годы, благодаря чему его удалось представить именно в форме классического алгоритма [14]. С помощью этого алгоритма для ЧД были выявлены новые соотношения между приливным зарядом и моментом вращения в рамках ОТО [15], для модели бамбелби [16] и для нелокальных моделей гравитации [17]. Кроме того, был обнаружен эффект компенсации или ускорения вращения, а также дополнительные изменения формы тени при учете приливного заряда и/или других параметров исследуемой теории. То есть, если после увеличения точности ЕНТ будут получены результаты, не полностью соответствующие керровским, это будет означать возможность оценить вклад «новой физики». Поэтому была поставлена задача изучить, как изменятся характеристики тени ЧД при учете ее вращения в различных современных расширенных теориях гравитации. Нами была предложена выборка из теорий, расширяющих ОТО разными способами. Эта выборка включает модель Хорндески (наиболее общий случай скалярно-тензорной гравитации с уравнениями поля второго порядка), модель бамбелби (гравитация с векторным полем), скалярную гравитацию Гаусса – Бонне, петлевую квантовую гравитацию, конформную гравитацию и $f(Q)$ -гравитацию (частный случай симметричной телепараллельной гравитации, STEGR). Для такой выборки теорий нами было проведено моделирование теней для случая невращающихся ЧД [18]. Предварительные результаты по получению метрик для случая вращающихся ЧД и моделированию профилей теней ЧД для моделей Хорндески и бамбелби были получены ранее в работе [19], однако для более наглядного сравнения результатов моделирования мы считаем необходимым представить их полные версии.

Прежде всего, следует отметить важную особенность алгоритма Ньюмена – Яниса, а именно, то, что этот алгоритм реализует простое однопараметрическое вращение. При этом в общем случае группа симметрий аксиально-симметричного решения может быть более широкой. Значит при использовании этого алгоритма, в зависимости от вида базового сферически-симметричного решения, полученное аксиально-симметричное решение будет частным (например, аналогично керро-подобному решению в случае $D > 4$ с одним моментом). Поскольку нашей целью является оценка изменений в про-

филе тени ЧД с учетом ее вращения, а в литературе обсуждаются именно эти версии сферически-симметричных решений, мы считаем, что использование алгоритма Ньюмена – Яниса для получения решения для случая вращающейся ЧД (хотя бы и вырожденного) представляет собой важный шаг в этом направлении. Кроме того, заметим, что для модели Хорндески мы рассматриваем частное сферически-симметричное решение. При этом число метрик вида «черная дыра», являющихся решениями для модели Хорндески, значительно шире. К сожалению, найти общий вид решения в этой теории ни нам, ни другим исследователям пока не удалось.

Статья построена следующим образом. В разд. 2 обсуждаются особенности получения аксиально-симметричных решений, а также приведены эти решения для перечисленных выше моделей. В разд. 3 представлены результаты моделирования профилей теней ЧД для каждой из рассматриваемых теорий, а разд. 4 содержит обсуждение и выводы.

2. ПОЛУЧЕНИЕ РЕШЕНИЙ С УЧЕТОМ ВРАЩЕНИЯ ЧД

Следуя [14], мы рассматриваем параметризованные с помощью метрических функций $G(r)$, $F(r)$ и $H(r)$ сферически-симметричные метрики вида

$$ds^2 = -G(r)dt^2 + \frac{1}{F(r)}dr^2 + H(r)d\Omega^2. \quad (1)$$

Такая переопределенная параметризация позволяет рассмотреть максимально широкий класс сферически-симметричных решений. Дальнейшее развитие алгоритма Ньюмена – Яниса сводит получение аксиально-симметричного решения к вычислению новой метрики с компонентами

$$\begin{aligned} g_{tt} &= -\frac{FH + a^2 \cos^2 \theta}{(K + a^2 \cos^2 \theta)^2} \Psi, \\ g_{t\phi} &= -a \sin^2 \theta \frac{K - FH}{(K + a^2 \cos^2 \theta)^2} \Psi, \\ g_{\theta\theta} &= \Psi, \\ g_{rr} &= \frac{\Psi}{FH + a^2}, \\ g_{\phi\phi} &= \Psi \sin^2 \theta \left(1 + a^2 \sin^2 \theta \frac{2K - FH + a^2 \cos^2 \theta}{(K + a^2 \cos^2 \theta)^2} \right). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $K = H(r)\sqrt{F(r)/G(r)}$, а все компоненты определены с точностью до функции $\Psi(r, y^2, a)$, где $y \equiv \cos \theta$, θ — угол наклона плоскости вращения. Эта дополнительная функция $\Psi(r, y^2, a)$ должна удовлетворять условиям

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow 0} \Psi(r, y^2, a) &= H(r), \\ (K + a^2 y^2)^2 (3\Psi_r \Psi_{y^2} - 2\Psi \Psi_{r, y^2}) &= 3a^2 K_r \Psi^2, \quad (3) \\ \Psi [K_r^2 + K(2 - K_{rr}) - a^2 y^2 (2 + K_{rr})] + \\ &+ (K + a^2 y^2)(4y^2 \Psi_{y^2} - K_r \Psi_r) = 0. \end{aligned}$$

Первое из условий (3) означает, что при $a \rightarrow 0$ решение переходит в метрику для невращающейся ЧД, имеющую два представления, Ψ_n и Ψ_c . Представления связаны конформным преобразованием, поэтому начальную метрику можно представить в виде

$$ds_c^2 = \frac{\Psi_c}{\Psi_n} ds_n^2. \quad (4)$$

Таким образом, решение (3) ищется в виде

$$\begin{aligned} \Psi_c &= H(r) \exp [a^2 f(r, a^2 y^2, a)] \approx \\ &\approx H(r) + a^2 X(y^2, r) + o(a^2), \quad (5) \end{aligned}$$

где использовано разложение в ряд Тейлора и

$$\begin{aligned} K H_r K_r + H K_r^2 + H K (K_{rr} - 2) &= 0, \\ X(y^2, r) &= \frac{H^2 (8K - K_r^2) y^2}{K^2 (8H - H_r K_r)}, \quad (6) \\ K_r (8K - K_r^2) K_{rrr} + K_r^2 (K_{rr} - 2)^2 - \\ - 4K K_{rr} (K_{rr} + 4) + 48K &= 0. \end{aligned}$$

2.1. Теория Хорндески

Ранее нами уже рассматривалась сферически-симметричная метрика ЧД, являющаяся одним из частных решений теории Хорндески [18–20]:

$$\begin{aligned} ds^2 &= - \left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{8\alpha_5 \eta}{5r^3} \right) dt^2 + \\ &+ \frac{1}{1 - \frac{2M}{r} - \frac{8\alpha_5 \eta}{5r^3}} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (7) \end{aligned}$$

где α_5 и η — параметры теории. После применения алгоритма Ньюмена–Яниса в виде, описанном в начале разд. 2, получаем метрику для случая вращающейся ЧД в виде

$$\begin{aligned} g_{tt} &= - \left(1 - \frac{2Mr}{\rho^2} - \frac{8\alpha_5 \eta}{5r} \right), \\ g_{t\phi} &= - \frac{2a \sin^2 \theta}{5r \rho^2} (4\alpha_5 \eta + 9Mr^2), \\ g_{rr} &= \rho^2 \left(- \frac{8\alpha_5 \eta}{5r} + a^2 - 2Mr + r^2 \right)^{-1}, \\ g_{\theta\theta} &= \rho^2, \quad (8) \\ g_{\phi\phi} &= \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2} \left(r^4 + 2ar^2 \cos^2 \theta + a^4 \cos^4 \theta + \right. \\ &+ \frac{8a^2 \alpha_5 \eta \sin^2 \theta}{5r} + 2aMr \sin^2 \theta + \\ &\left. + a^2 r^2 \sin^2 \theta + a^4 \cos^2 \theta \sin^2 \theta \right). \end{aligned}$$

Здесь $\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$, все остальные метрические компоненты равны нулю.

2.2. Модель бамбелби

Действие для поля бамбелби B_μ имеет вид [21]

$$\begin{aligned} S_B &= \int d^4x \mathcal{L}_B = \\ &= \int d^4x (\mathcal{L}_g + \mathcal{L}_{gB} + \mathcal{L}_K + \mathcal{L}_V + \mathcal{L}_M), \quad (9) \end{aligned}$$

где \mathcal{L}_g — лагранжиан ОТО (с космологической постоянной), \mathcal{L}_{gB} определяет взаимодействие между гравитацией и полем бамбелби, \mathcal{L}_K — кинетические члены поля бамбелби и другие члены самодействия, \mathcal{L}_V — потенциал, возникающий из-за спонтанного нарушения лоренцевой симметрии, \mathcal{L}_M — лагранжиан материи и ее взаимодействия с полем бамбелби. При отсутствии кручения и космологической постоянной ($\Lambda = 0$) имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_B &= \frac{e}{2\kappa} R + \frac{e}{2\kappa} \xi B^\mu B^\nu R_{\mu\nu} - \\ &- \frac{1}{4} e B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} - eV(B^\mu) + \mathcal{L}_M, \quad (10) \end{aligned}$$

где $e = \sqrt{-g}$ — постоянная неминимальной связи между гравитацией и полем бамбелби.

Начнем рассмотрение с метрики вида [18, 19, 21]

$$\begin{aligned} ds^2 &= - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) dt^2 + \\ &+ \frac{1+l}{1 - \frac{2M}{r}} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (11) \end{aligned}$$

где l — параметр бамбелби. После применения алгоритма Ньюмена–Яниса решение примет вид

$$\begin{aligned}
 g_{tt} &= \frac{r^{-1+\sqrt{1+l}}AB}{\sqrt{1+l}CD}, \\
 g_{t\phi} &= -\frac{ar^{-l+\sqrt{1+l}}EB \sin^2 \theta}{(1+l)CD}, \\
 g_{rr} &= \frac{(1+l)r^{-l+\sqrt{1+l}}B}{CG}, \\
 g_{\theta\theta} &= r^{1+\sqrt{1+l}} + \frac{a^2(-4+8\sqrt{1+l})r^{-l+\sqrt{1+l}} \cos^2 \theta}{8-2(1+\sqrt{1+l})}, \\
 g_{\phi\phi} &= \frac{r^{-l+\sqrt{1+l}} \sin^2 \theta(B+5a^2 \cos^2 \theta)}{(1+l)CD} \times \\
 &\quad \times \left(D(1+l) - Ka^2 \cos^2 \theta \right),
 \end{aligned} \tag{12}$$

где

$$\begin{aligned}
 A &= (2Mr^{1+l} - r^{1+\sqrt{1+l}} - a^2 \cos^2 \theta - a^2 l \cos^2 \theta), \\
 B &= -3r^2 + \sqrt{1+l}r^2 - 3a^2 \cos^2 \theta - 4a^2 \sqrt{1+l} \cos^2 \theta, \\
 C &= -3 + \sqrt{1+l}, \quad D = r^2 + a^2 \sqrt{1+l} \cos^2 \theta, \\
 E &= -r^2 - lr^2 - 2\sqrt{1+l}Mr^{\sqrt{1+l}} + \sqrt{1+l}r^{1+\sqrt{1+l}}, \\
 G &= a^2 + a^2 l - 2Mr^{1+l} + r^{1-\sqrt{1+l}}, \\
 F &= -2Mr^{\sqrt{1+l}} + r^{1+\sqrt{1+l}} - a^2 l \cos^2 \theta, \\
 K &= \sqrt{1+l}F - r - 2lr^2 - D.
 \end{aligned}$$

Как и ранее, все остальные метрические компоненты равны нулю, а величины A, \dots, K используются только для обсуждаемого случая.

2.3. Скалярная гравитация Гаусса – Бонне

Скалярная гравитация Гаусса – Бонне – это модель, включающая всевозможные поправки второго порядка по кривизне [18, 22]:

$$\begin{aligned}
 S &= \int d^4x \sqrt{-g} \left[\kappa + \alpha_1 f_1(\vartheta) R^2 + \alpha_2 f_2(\vartheta) R_{ab} R^{ab} + \right. \\
 &\quad + \alpha_3 f_3(\vartheta) R_{abcd} R^{abcd} + \alpha_4 f_4(\vartheta) R_{abcd}^* R^{abcd} - \\
 &\quad \left. - \frac{\beta}{2} \left(\nabla_a \vartheta \nabla^a \vartheta + 2V(\vartheta) \right) + \mathcal{L}_{mat} \right].
 \end{aligned} \tag{13}$$

Здесь g – детерминант метрического тензора g_{ab} ; R – скалярная кривизна, R_{ab} и R_{abcd} – тензоры Риччи и Римана, а R_{abcd}^* – дуальный тензор Римана; \mathcal{L}_{mat} – лагранжиан материи, ϑ – скалярное поле, (α_i, β) – константы связи, $\kappa = (16\pi G)^{-1}$. Сферически-симметричное пространство-время параметризуется через метрические функции из уравнения (1) как

$$\begin{aligned}
 G(r) &= f_s \left(1 + \frac{\xi}{3r^3 f_s} \right) + o \left(\frac{1}{r^3} \right), \\
 F(r) &= \frac{f_s}{1 - \frac{\xi}{r^3 f_s}} + o \left(\frac{1}{r^3} \right), \\
 H(r) &= 2 \frac{K}{K_r} r,
 \end{aligned} \tag{14}$$

где $f_s = 1 - 2M/r$. После применения алгоритма Ньюмена – Яниса решение примет вид

$$\begin{aligned}
 g_{tt} &= \frac{r^2(E + F \cos^2 \theta)}{AB}, \\
 g_{t\phi} &= -\frac{aCD \sin^2 \theta}{AB}, \\
 g_{rr} &= -\frac{AB}{r^2(E + F)}, \\
 g_{\theta\theta} &= \frac{B}{3r^2}, \\
 g_{\phi\phi} &= \frac{T}{3r^2 AB},
 \end{aligned} \tag{15}$$

где

$$\begin{aligned}
 A &= \xi + 2Mr^2 - r^3, \\
 B &= 2\xi M + \xi r + 3r^4 + 3a^2 r^2 \cos^2 \theta, \\
 C &= 2\xi M + \xi r + 3r^4, \\
 D &= A + 16M^2 r^2 - 16Mr^4 + 4r^5, \\
 E &= 32\xi M^3 r - 16\xi M^2 r^2 - 8\xi M r^3 + 4\xi r^4 + \\
 &\quad + 48M^2 r^5 - 48Mr^6 + 12r^7, \\
 F &= -3a^2 \xi - 6a^2 M r^2 + 3a^2 r^3, \\
 G &= 16\xi M^3 r^5 + 2\xi r^6 + 24M^2 r^7 - 24Mr^8 + 6r^9, \\
 K &= 2\xi^2 M + \xi^2 r + 4\xi M^2 r^2 + 2\xi r^4 + 6Mr^6 - 3r^7, \\
 Q &= 4\xi^3 M(M+r) + \xi^2 r^2 (\xi + 2M^3 + 4M^2 r + \\
 &\quad + 10Mr^2 + 5r^3) + 3\xi r^6 (8M^2 + r^2) + 9r^{10} (2M - r), \\
 T &= 1 + Q + 9a^4 r^4 A \cos^4 \theta + 6a^2 r^2 G \sin^2 \theta + \\
 &\quad + 9a^4 r^4 A \cos^2 \theta \sin^2 \theta.
 \end{aligned}$$

Как и ранее, все остальные метрические компоненты равны нулю, а величины A, \dots, T используются только для обсуждаемого случая.

2.4. Петлевая квантовая гравитация

Рассмотрим модифицированную метрику Хейворда – черную дыру без сингулярности в центре, [18, 23, 24], в которой метрические функции параметризуются как

$$\begin{aligned} G(r) &= \left(1 - \frac{2Mr^2}{r^3 + 2Mt^2}\right) \left(1 - \frac{M\alpha\beta}{\alpha r^3 + \beta M}\right), \\ F(r) &= 1 - \frac{2Mr^2}{r^3 + 2Mt^2}, \\ H(r) &= r^2. \end{aligned} \tag{16}$$

Применяя модифицированный метод Ньюмена – Яниса, получим решение для вращающейся ЧД в конформной гравитации ($\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$):

$$\begin{aligned} g_{tt} &= -\frac{\rho^2 - A}{B}, \\ g_{t\phi} &= -a \sin^2 \theta \frac{\tilde{H} - r^2(1 - A)}{B}, \\ g_{\theta\theta} &= B, \\ g_{rr} &= \frac{B}{r^2 + a^2 - A}, \\ g_{\phi\phi} &= \sin^2 \theta \left(B + a^2 \sin^2 \theta \frac{2\tilde{H} - 2r^2 + \rho^2 + r^2 A}{B} \right), \end{aligned} \tag{17}$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{H}(r) &= r^2 \left(1 - \frac{M\alpha\beta}{\alpha r^3 + \beta M}\right)^{-1/2}, \\ A &= 2Mr^2 (r^3 + 2Mt^2)^{-1}, \\ B &= \tilde{H} + a^2 \cos^2 \theta. \end{aligned}$$

Умножив (17) на $C(r)$, где

$$C(r) = \sqrt{1 - \frac{M\alpha\beta}{\alpha r^3 + \beta M}},$$

получаем решение для вращающейся ЧД для исходной метрики (16).

2.5. Конформная гравитация

Рассмотрим модель конформной гравитации. У этой модели имеется много расширений, например, модели с нелинейной реализацией симметрии [25, 26]. В нашей работе в качестве примера для расчета параметров теней используем метрику черных дыр в новой массивной конформной гравитации [18, 27]:

$$\begin{aligned} G(r) &= 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q_s^2}{r^2} + \frac{Q_s^2(Q_s^2 - M^2 + 6m_2^{-2})}{3r^4}, \\ F(r) &= 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q_s^2}{r^2} + \frac{2Q_s^2(Q_s^2 - M^2 + 6m_2^{-2})}{3r^4}, \\ H(r) &= r^2, \end{aligned} \tag{18}$$

где Q_s — скалярный заряд, m_2 — массивная мода со спином 2.

Применяя модифицированный метод Ньюмена – Яниса, получим решение для вращающейся ЧД в конформной гравитации ($\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$):

$$\begin{aligned} g_{tt} &= -\frac{\rho^2 + A^2}{\rho^2}, \\ g_{t\phi} &= a \sin^2 \theta \frac{A^2}{\rho^2}, \\ g_{\theta\theta} &= \rho^2, \\ g_{rr} &= \frac{\rho^2}{r^2 + a^2 + A^2}, \\ g_{\phi\phi} &= \sin^2 \theta \left(\rho^2 + a^2 \sin^2 \theta \frac{\rho^2 - A^2}{\rho^2} \right), \end{aligned} \tag{19}$$

где

$$A^2 = -2Mr + Q_s^2 + \frac{2}{3} \frac{Q_s^2}{r^2} (Q_s^2 - M^2 + 6m_2^{-2}).$$

2.6. f(Q)-гравитация

В данной работе мы будем рассматривать симметричную теорию телепараллелизма с ненулевым скаляром неметричности Q [28]. Для данной модели было получено несколько сферически-симметричных решений. Было выбрано решение, которое расширяет ОТО (I^+). Метрику данной теории можно представить как [18, 28]

$$\begin{aligned} G(r) &= 1 - \frac{2M_{ren}}{r} + \alpha \frac{32}{r^2}, \\ F(r) &= 1 - \frac{2M_{ren}}{r} + \alpha \frac{96}{r^2}, \\ H(r) &= r^2, \end{aligned} \tag{20}$$

где α — параметр разложения, M_{ren} — перенормированная масса. Заметим, что для удаленного наблюдателя нет разницы между перенормированной и обычной массами Шварцшильда. Далее мы будем использовать $M_{ren} = M$, нормируя все величины на нее.

Применяя модифицированный метод Ньюмена – Яниса, получим решение для вращающейся ЧД для $f(Q)$ -гравитации ($\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$):

$$\begin{aligned} g_{tt} &= -\frac{\rho^2 + A^2}{\rho^2}, \\ g_{t\phi} &= a \sin^2 \theta \frac{A^2}{\rho^2}, \\ g_{\theta\theta} &= \rho^2, \\ g_{rr} &= \frac{\rho^2}{r^2 + a^2 + A^2}, \\ g_{\phi\phi} &= \sin^2 \theta \left(\rho^2 + a^2 \sin^2 \theta \frac{\rho^2 - A^2}{\rho^2} \right), \end{aligned} \tag{21}$$

где

$$A^2 = -2Mr + 96\alpha.$$

Решение для вращающейся ЧД имеет такой же анзац, что и (19), за исключением разницы в определении $A(r)$.

3. ТЕНИ ЧЕРНЫХ ДЫР

3.1. Метод моделирования

Профиль тени черной дыры определяется последней устойчивой орбитой для фотонов, значит, необходимо найти решение уравнения Гамильтона–Якоби для изотропных геодезических [12]. В качестве первого шага для разделения переменных в уравнении Гамильтона–Якоби рассмотрим уравнение

$$g^{\mu\nu} \frac{\partial S}{\partial x^\mu} \frac{\partial S}{\partial x^\nu} = 0, \quad (22)$$

где S — функция Гамильтона–Якоби. С учетом известных интегралов движения $E = -p_t$ и $L_z = p_\phi$ (энергия и угловой момент) решение ищется в виде

$$S = -Et + L_z\phi + S_r(r) + S_\theta(\theta). \quad (23)$$

После разделения переменных имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(r) &= (K + a^2 - a\lambda)^2 - (FH + a^2) \left[\eta + (a - \lambda)^2 \right], \\ \Theta(\theta) &= \eta + \cos^2 \theta \left(a^2 - \frac{\lambda}{\sin^2 \theta} \right), \end{aligned} \quad (24)$$

где $\eta = Q/E^2$, $\lambda = L_z/E$, а Q — картеровская константа разделения. Для вычисления последней устойчивой орбиты необходимо найти решение уравнений

$$\mathcal{R} = 0, \quad \frac{d\mathcal{R}}{dr} = 0. \quad (25)$$

В результате можно найти вид функциональной зависимости величин λ и η от метрических функций. На последнем этапе рассматривается плоскость, перпендикулярная направлению на удаленного наблюдателя. Координаты тени ЧД на такой плоскости имеют вид

$$x' = -\frac{\lambda}{\sin \theta_0}, \quad (26)$$

$$y' = \pm \sqrt{\eta + a^2 \cos^2 \theta_0 - \frac{\lambda^2}{\text{tg}^2 \theta_0}}, \quad (27)$$

где θ_0 — телесный угол между плоскостью вращения и направлением на удаленного наблюдателя, λ и η здесь определены как

$$\lambda = \frac{K + a^2}{a} - \frac{2K'(FH + a^2)}{a(HF)'}, \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{4(a^2 + FH)}{((HF)')^2} (K')^2 - \\ &- \frac{1}{a^2} \left[K - \frac{2(FH + a^2)}{(HF)'} K' \right]. \end{aligned} \quad (29)$$

Для вычисления координат x и y на картинной плоскости используются уравнения (26), (27). Для их численного решения нами была усовершенствована написанная ранее на языке Python программа [17, 18]. В дополнение к этому ищем следующие величины: r_s — эффективный размер тени ЧД, D — смещение тени ЧД от центра, $\delta = \Delta_{cs}/r_s$ — искажение тени ЧД при вращении (Δ_{cs} — расстояние между левой границей тени ЧД и ее круговой аппроксимацией). Ранее по этой же схеме нами был получен профиль тени ЧД для нелокальной модели гравитации [17] для сравнения с изображениями Sgr A* [7] и M87* [1]. Как и ранее, мы рассматриваем наиболее вероятные конфигурации Sgr A*: наклон плоскости вращения относительно направления на наблюдателя равен $\pi/6$, а значения углового момента равны $a = 0.5$ и $a = 0.94$ (относительно массы M) [7]. Для сравнения было проведено моделирование поведения тени ЧД для статического случая ($a = 0$). Заметим, что из наблюдений релятивистского джета у M87* для нее было получено значение углового момента $a = 0.9375$ [9], таким образом, быстрое вращение этой черной дыры подтверждается наблюдениями.

Проверим теперь условие приближения для круговых орбит. Запишем функцию $\mathcal{R}(r)$ и ее производную (а также условие перехода на круговую орбиту) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(r_{ph}) &= \mathcal{R}'(r_{ph}) = 0, \\ \mathcal{R}(r) &= [\chi(r)E - aL_z]^2 - \Delta(r)[K + (L_z - aE)^2], \\ \mathcal{R}'(r) &= 2E\chi'(r)[\chi(r)E - aL_z] - \\ &- \Delta'(r)[K + (L_z - aE)^2], \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \chi &= K + a^2, \\ \Delta(r) &= FH + a^2. \end{aligned}$$

Используя определение $\lambda = L_z/E$, получаем $E = L_z/\lambda$. Тогда условие перехода фотонов на круговые орбиты запишется в виде

$$\frac{2\chi'}{\Delta\lambda} = \frac{1}{\Delta} \left[\frac{\chi}{\lambda} - a \right].$$

Отсюда можем записать λ как

$$\lambda = \frac{\chi}{a} - \frac{2\chi'}{a} \frac{\Delta}{\Delta'}.$$

Ранее в ответе на комментарий А. Ф. Захарова [29] нами было показано [30], что данное выражение верно в случае нелокальной метрики. В продолжение, можно показать, что это выражение выполняется для метрики любого вида, записав условие перехода на круговые орбиты как

$$2\chi \frac{\Delta}{\Delta'} = 2\chi' \frac{\Delta}{\Delta'}.$$

В результате можно провести сокращение, и тогда выражение становится тождеством $1 = 1$. Значит, во всех случаях условие наличия тени ЧД выполняется.

3.2. Теория Хорндески

Для использования метрики вращающейся ЧД для модели Хорндески (8) введем новый параметр $\alpha = 8\alpha_5\eta/5$. На первом этапе вычислений были получены профили тени ЧД для различных значений параметра α (рис. 1 *a*). Затем оценивался эффективный размер тени ЧД (рис. 2 *a*): красным показаны области, в которых значения не совместимы с данными ЕНТ [7]. На рис. 2 *a* видно, что увеличение α приводит к увеличению размера тени ЧД. Значение $\alpha = 1$ исключено при $a = 0.5$, но остается разрешенным при $a = 0.94$. Значение $\alpha = 0.8$ при $a = 0.94$ также остается допустимым. При $\alpha < 0.5$ обе рассматриваемые конфигурации продолжают оставаться в разрешенной области. Также заметим, что при увеличении углового момента a размер тени ЧД уменьшается, при этом с ростом α он, наоборот, растет (аналогично [17]). Как и в случае невращающейся ЧД, большие значения α не совместимы с данными ЕНТ (разрешено только $\alpha = 1$ при $a = 0.94$).

Аналогично [17], смещение D линейно растет с увеличением углового момента a , причем для разных значений α не наблюдается существенных различий (рис. 3 *a*).

Наконец, рассмотрим параметр искажения тени δ (рис. 4 *a*). На рисунке видно, что при $a = 0.5$ для всех значений α искажение равно примерно 0.5–1%. При $a = 0.94$ искажение становится больше, оно растет от 2% для $\alpha = 1$ до 5.5% для чисто керровского случая. При этом снова с ростом α искажение, наоборот, уменьшается.

3.3. Модель бамбелби

Рассмотрим метрику вращающейся ЧД, относящуюся к модели бамбелби, а именно, уравнение (12). Как было показано ранее [18], в стандартной версии этой модели (где метрическая функция $G(r)$ соответствует метрике Шварцшильда) при отсутствии вращения размер тени ЧД соответствует метрике Шварцшильда ($r_s = 3\sqrt{3}M$). Поэтому на рис. 1 *b* показаны только значения при $a \neq 0$. Как видно на рис. 2 *b*, при $l \neq 0$ размер тени ЧД становится меньше, чем в случае метрики Керра. Ограничения от Sgr A* допускают все значения l . Здесь необходимо отметить, что для каждого значения l существует свое критическое значение углового момента $a = a_{crit}$, что было показано в других работах [16]. Значит, для $a = 0.94$ правильным будет только значение $l = 0.1$ (например, для $l = 0.2$ критическим будет значение $a_{crit} = 0.92$ вместо $a = 0.94$).

Смещение D в данной модели оказывается меньше, чем в чисто керровском случае (рис. 3 *b*). Такое поведение повторяет поведение смещения в модели Хорндески. Максимальное приближение к значению смещения D в случае Керра достигается при больших значениях a , а в случае $a = 0.5$ смещение меньше керровского.

Значения параметра искажения δ (рис. 4 *b*) в данной модели при $a = 0.5$ отличаются от соответствующих значений для чисто керровского случая и равны примерно 0.8–1.4% в зависимости от l . При больших значениях a искажение становится больше, чем в чисто керровском случае (примерно 5.5%) и продолжает расти с ростом l (до 9.2% при $l = 0.2$ и $l = 0.35$). Наконец, для различных значений l возможно совпадение значений искажения, так как для каждого l имеется свое значение a_{crit} . Поэтому если Sgr A* — быстро вращающийся объект, то последние данные дают дополнительную возможность проверки и подтверждения модели бамбелби.

3.4. Скалярная гравитация Гаусса – Бонне

Рассмотрим метрику вращающейся черной дыры в скалярной гравитации Гаусса – Бонне, а именно, уравнение (15). Как было отмечалось ранее [4, 10], когда параметр модели ξ принимает значения $\xi > 0.3$, фотонная сфера «срывается» и тень исчезает. Поэтому мы рассматриваем значения ξ , лежащие ниже этого предела. На рис. 1 *c* показаны профили теней ЧД в скалярной гравитации Гаусса – Бонне для различных значений ξ , а на рис. 2 *c* — зависимости эффективного размера тени r_s от угло-

вого момента. На рисунке видно, что в статическом случае ($a = 0$) размер тени уменьшается с ростом ξ . При некотором ненулевом значении a эффективный размер тени начинает расти быстрее. С дальнейшим ростом a размер тени начинает уменьшаться. Как и в статическом случае, все эти комбинации допускаются данными ЕНТ.

Аналогично модели бамбелби, при $a = 0.5$ смещение D оказывается больше, чем в керровском случае (рис. 3 *c*).

Заметим, что различие между значениями искажения δ при $a = 0$ (статический случай) и при $a = 0.5$ оказывается заметно больше, чем в случае модели бамбелби (рис. 4 *c*): при $a = 0.5$ искажение примерно равно $0.8 - 1.2\%$, причем для всех ξ оно больше, чем в чисто керровском случае. При $a = 0.94$ имеет место особый случай: с ростом параметра ξ искажение начинает уменьшаться. Например, для $\xi = 0.25$ искажение примерно равно 3.2% .

3.5. Петлевая квантовая гравитация

Рассмотрим метрику вращающейся ЧД, полученную из метрики Хейворда, а именно, уравнение (17). Это решение соответствует регулярной черной дыре без центральной сингулярности. В этой метрике параметр l характеризует центральную плотность энергии $(3/8)\pi l^2$, α — временная задержка между центром и бесконечностью, а β — константа, связанная с однопетлевыми квантовыми поправками к ньютоновскому потенциалу. Ранее [23, 24] было получено ограничение на эти параметры:

$$0 \leq \alpha < 1, \quad \beta_{max} = 41/10\pi \approx 1.305,$$

а при $l > \sqrt{16/27}M \approx 0.7698$ у объекта отсутствует горизонт. Также было получено, что в статическом случае при увеличении l размер тени ЧД уменьшается, а при увеличении α и β напротив, увеличивается [18]. При $\beta \geq 0$ минимальный размер тени достигается при $l = \sqrt{16/27}M \approx 0.7698$, $\beta = \alpha = 0$ и равен 4.92 , а максимальный размер тени возникает при $l = 0$, $\beta = 41/10\pi \approx 1.305$, $\alpha = 1$ и равен 5.32 . При этом из-за запрещений на основании данных от Sgr A* размер тени не может быть больше 5.3 . Ранее было показано [18], что данная конфигурация может быть описана пространством-временем Рейсснера–Нордстрема, и, следовательно, используя только размер тени ЧД, невозможно получить значения всех параметров без дополнительных наблюдательных данных. Поэтому при моделировании случая вращающейся ЧД особое внимание должно быть уделено граничным конфигурациям.

Сначала были построены профили тени ЧД для широкого спектра значений дополнительных параметров (рис. 1 *d*), при этом для каждого случая был оценен эффективный радиус тени (рис. 2 *d*). Как видно из последнего рисунка, по аналогии с моделью бамбелби, для каждого значения l существует свое критическое значение a_{crit} . При этом чем больше l , тем меньше a_{crit} (например, для максимального значения $l = \sqrt{16/27} \approx 0.7698$ значение $a_{crit} = 0.66$). Значения a_{crit} растут с ростом α или β . Например, при $l = \alpha = 0.5$ и $\beta = 0.2$ имеем $a_{crit} = 0.86$. При тех же значениях параметров, но при $\beta = 0.8$ в доступных конфигурациях рассматриваемая модель позволяет получить максимальное значение параметра вращения — $a = 0.94$. Как видно на (рис. 2 *d*), эта тенденция такая же, как и в статическом случае. Эффективный размер тени будет большим, чем в случае Керра, только при максимальном значении параметров α , β и $l = 0$ (данный случай не противоречит запрещением на основании данных от Sgr A*, если $a \neq 0$). Все остальные конфигурации возможны.

Далее, из графиков зависимостей параметра смещения D от углового момента (рис. 3 *d*) видно, что в случае $l = 0$ смещение растет линейно с ростом a , но при $l \neq 0$ вблизи критического значения параметра вращения a_{crit} его рост становится нелинейным.

На рис. 4 *d* приведены зависимости искажения δ от углового момента. На рисунке видно, что при $a = 0.5$ искажение при всех значениях параметров равно примерно $0.5 - 1\%$, кроме случая $l_{max} = 0.7698$ (когда оно равно 3%). Случай $a = 0.94$ возможен при $l = 0$ и максимальных значениях α и β : искажение будет меньше, чем в случае ЧД Керра, и равно 3.4% (в случае ЧД Керра оно равно 5.5%). При $l = \alpha = 0.5$, $\beta = 0.8$ искажение при быстром вращении превысит керровское и достигнет 13% . Для $l_{max} = 0.7698$ при $a = a_{crit} = 0.66$ искажение равно 12% . В случае $l = \alpha = 0.5$, $\beta = 0.2$ при $a = a_{crit} = 0.86$ искажение будет равно 11% .

3.6. Конформная гравитация

Рассмотрим метрику вращающейся ЧД в массивной конформной гравитации, а именно, уравнение (19). Ранее было показано [18], что при больших значениях Q_s и m_2 фотонная сфера отсутствует. Уменьшение значения m_2 приводит к уменьшению размера тени. Запрещения данными от ЕНТ исключают только большие значения Q_s и m_2 (например, если $m_2 = 2$, то $Q_s < 0.9$).

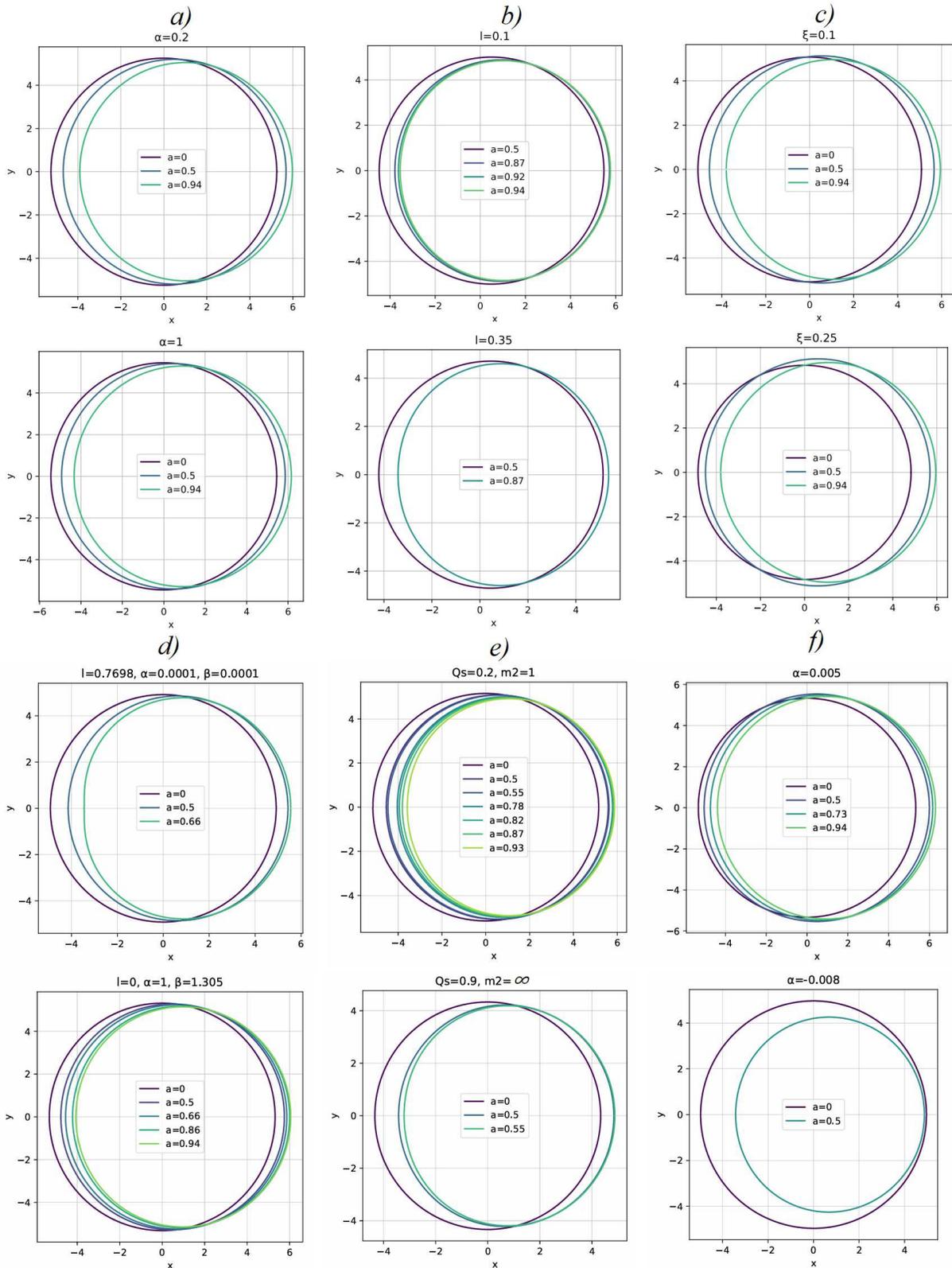


Рис. 1. Профили тени ЧД в зависимости от углового момента a для различных значений α в модели Хорндески (a), l в модели бамбелби (b), ξ в скалярной гравитации Гаусса–Бонне (c), l, α, β в петлевой квантовой гравитации (d), m_2 и Q_s в конформной гравитации (e), α в $f(Q)$ -гравитации (f). Показаны минимальные и максимальные значения дополнительных параметров теорий. Угол наклона плоскости вращения равен $\theta_0 = \frac{\pi}{6}$ (Sgr A*)

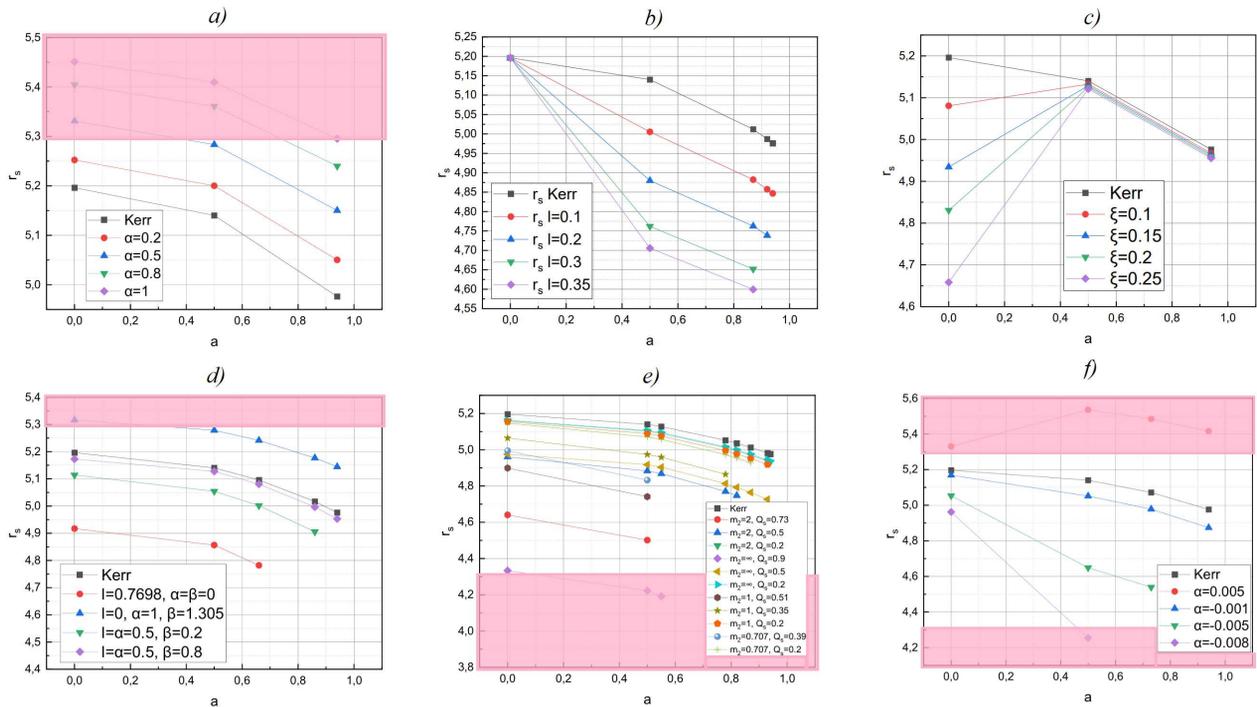


Рис. 2. Зависимости размера тени r_s от углового момента a для различных значений α в модели Хорндески (а), l в модели бамбелби (b), ξ в скалярной гравитации Гаусса–Бонне (с), l, α, β в петлевой квантовой гравитации (d), от m_2 и Q_s в конформной гравитации (e), α в $f(Q)$ -гравитации (f). Показаны минимальные и максимальные значения дополнительных параметров теорий. Угол наклона плоскости вращения равен $\theta_0 = \frac{\pi}{6}$ (Sgr A*). Красным обозначены области, запрещенные на основании данных от Sgr A*

Сначала были построены профили тени ЧД для широкого спектра значений дополнительных параметров Q_s и m_2 (рис. 1 e). Затем был вычислен эффективный радиус тени (рис. 2 e). Как видно на этом рисунке, из предложенных конфигураций состояние с $m_2 = \infty$ и $Q_s = 0.9$ запрещено на основании данных от Sgr A*. При увеличении m_2 увеличивается размер тени ЧД, как и в статическом случае. А увеличение Q_s , наоборот, уменьшает размер тени. Также для многих конфигураций существует критическое значение параметра вращения a_{crit} . Для $m_2 = 2$ и $Q_s = 0.73$ имеем $a_{crit} = 0.5$, для $m_2 = 2$ и $Q_s = 0.5$ — $a_{crit} = 0.82$, для $m_2 = \infty$ и $Q_s = 0.9$ — $a_{crit} = 0.55$, для $m_2 = \infty$ и $Q_s = 0.5$ — $a_{crit} = 0.93$, для $m_2 = 1$ и $Q_s = 0.51$ — $a_{crit} = 0.5$, для $m_2 = 1$ и $Q_s = 0.35$ — $a_{crit} = 0.78$, для $m_2 = 1$ и $Q_s = 0.2$ — $a_{crit} = 0.93$, для $m_2 = 0.707$ и $Q_s = 0.39$ — $a_{crit} = 0.5$, для $m_2 = 0.707$ и $Q_s = 0.2$ — $a_{crit} = 0.87$. Следовательно, из всех предложенных конфигураций медленное вращение Sgr A* ($a = 0.5$) возможно всегда, а быстрое ($a = 0.94$) — практически везде запрещено (хотя в некоторых случаях критический параметр вращения близок к этому значению).

Далее, были построены зависимости смещения D от параметра вращения a (рис. 3 e). Как следует из приведенных графиков, смещение вблизи $a = 0.5$ больше, чем вблизи $a = 0.94$. Наконец, были построены зависимости искажения δ от параметра вращения a (рис. 4 e). Как видно из этих графиков, искажения при $a = 0.5$, когда a_{crit} значительно больше 0.5, соответствуют керровским и равны 0.5 – 1.5%. Когда a_{crit} близко к 0.5, искажения становятся равными 3 – 4.5%. При этом максимальное искажение реализуется при $m_2 = \infty$ и $Q_s = 0.9$ и при $a_{crit} = 0.55$. При тех же значениях параметров и при $a = 0.5$ искажение составляет 7%, что уже больше керровского (при $a = 0.94$ оно равно 5.5%). Также стоит отметить, что при быстром вращении для черной дыры Керра наблюдаются сильные отклонения. При $a = 0.78$ и конфигурации $m_2 = 2, Q_s = 0.5$, а также конфигурации $m_2 = 1, Q_s = 0.35$ искажение примерно такое же, как для черной дыры Керра (при $a = 0.94$ оно равно 5.5%). При $a = 0.82$ и конфигурации $m_2 = 2, Q_s = 0.5$, а также при $a = 0.93$ и конфигурации $m_2 = 1, Q_s = 0.2$ искажение равно 7.5%. Самое большое искажение достигается при $a = 0.93$ и конфигурации $m_2 = \infty, Q_s = 0.5$, оно составляет 9.5%.

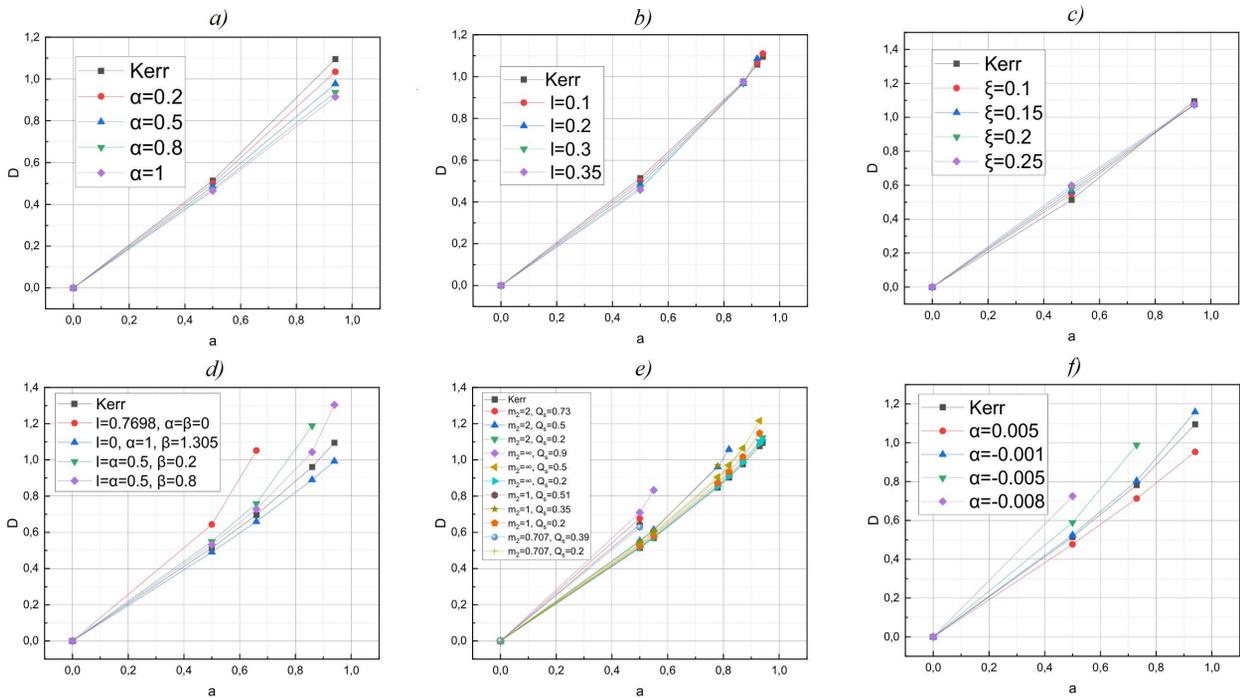


Рис. 3. Зависимости смещения D от углового момента a для различных значений α в модели Хорндески (а), l в модели бамбелби (b), ξ в скалярной гравитации Гаусса–Бонне (с), l, α, β в петлевой квантовой гравитации (d), m_2 и Q_s в конформной гравитации (e), α в $f(Q)$ -гравитации (f). Показаны минимальные и максимальные значения дополнительных параметров теорий. Угол наклона плоскости вращения равен $\theta_0 = \frac{\pi}{6}$ ($Sgr A^*$)

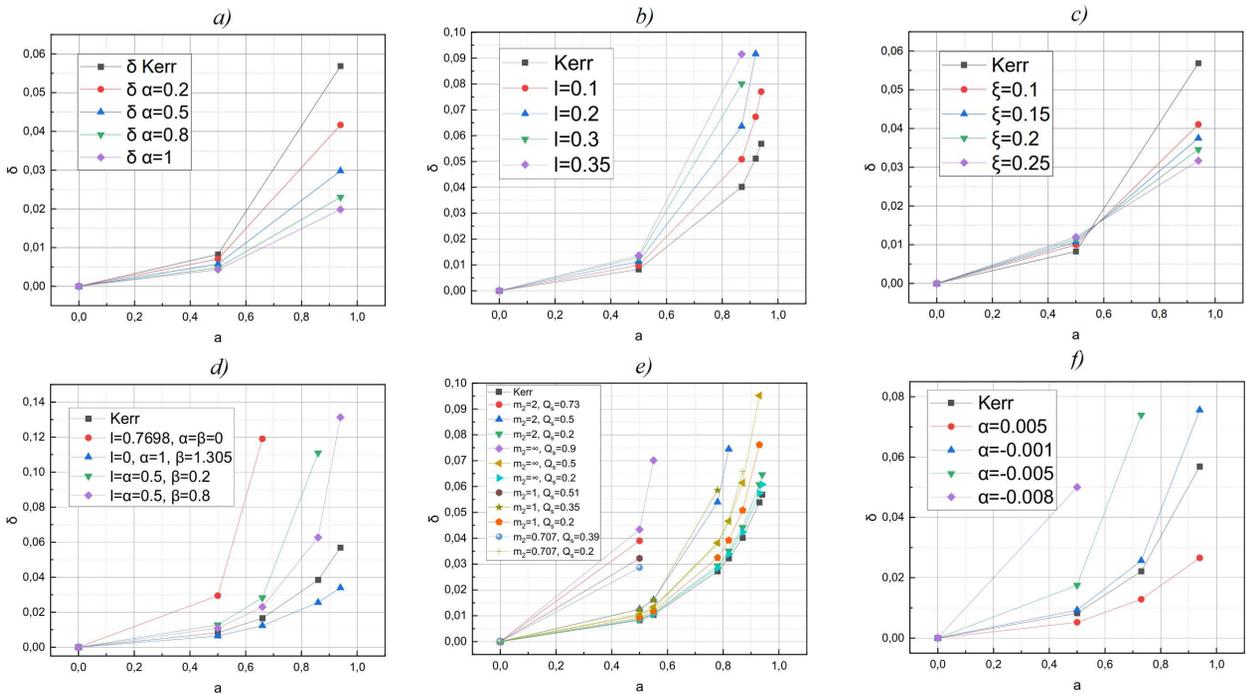


Рис. 4. Зависимости искажения δ от углового момента a для различных значений α в модели Хорндески (а), l в модели бамбелби (b), ξ в скалярной гравитации Гаусса–Бонне (с), l, α, β в петлевой квантовой гравитации (d), m_2 и Q_s в конформной гравитации (e), α в $f(Q)$ -гравитации (f). Показаны минимальные и максимальные значения дополнительных параметров теорий. Угол наклона плоскости вращения равен $\theta_0 = \frac{\pi}{6}$ ($Sgr A^*$)

3.7. $f(Q)$ -гравитация

Ранее было показано [18], что на параметр α в статическом случае имеется следующее ограничение: $-0.025 < \alpha < 0.005$, т.е. среднее значение α смещается ближе к отрицательной области. В соответствии с этой тенденцией, при дальнейшем уточнении наблюдательных данных параметр α должен сместиться в отрицательную область. С учетом этого нами были построены профили тени ЧД для различных значений α (рис. 1*f*) и рассчитаны эффективные радиусы тени для различных значений параметров (рис. 2*e*). Заметим, что из-за запрещений на основании данных от Sgr A* сверху на размер тени в обоих случаях для вращающейся ЧД (статический случай находится на границе) не подходит значение $\alpha = 0.005$, а из-за запрещений на основании данных от ЕНТ снизу на размер тени ЧД не подходит случай $\alpha = -0.008$. Также стоит отметить причину, почему не удается построить профили тени вращающейся ЧД для случая, когда параметр $\alpha < 0$, но имеет большое по модулю значение. Если $\alpha > 0$, то моделирование для случая быстрого вращения оказывается возможным. Однако если $\alpha < 0$, то для каждого значения α существует критическое значение параметра вращения a_{crit} . Так, для $\alpha = -0.001$ имеем $a_{crit} = 0.94$, для $\alpha = -0.005 - a_{crit} = 0.73$, а для $\alpha = -0.008 - a_{crit} = 0.5$.

На рис. 3*f* приведены зависимости смещения D от параметра вращения a . Можно видеть, что при $\alpha > 0$ смещение будет меньше, чем в случае ЧД Керра, а при $\alpha < 0$ — больше, особенно вблизи a_{crit} .

На рис. 4*f* приведены зависимости искажения δ от параметра вращения a . Можно видеть, что при $\alpha > 0$ искажение будет меньше, чем в случае ЧД Керра, а при $\alpha < 0$ — наоборот, больше. В случае медленного вращения при $\alpha = 0.005$ искажение примерно равно 0.5%, в случае $\alpha = -0.001$ оно равно керровскому (1%), а при $\alpha = -0.005$ искажение больше керровского и примерно равно 1.7%. Самое большое искажение (5%) реализуется при $\alpha = -0.008$ и при значении параметра вращения $a = 0.5$, которое для данного случая является критическим. Для случая быстрого вращения при $\alpha = -0.005$ (критический параметр вращения $a_{crit} = 0.73$) и $\alpha = -0.001$ (критический параметр вращения $a_{crit} = 0.94$) искажение примерно равно 7.5%, что больше керровского (при $a = 0.94$ оно равно 5.5%).

4. ОБСУЖДЕНИЕ И ВЫВОДЫ

Таким образом, с использованием улучшенной версии алгоритма Ньюмена–Яниса были получены решения для вращающихся ЧД для выборки из теорий, расширяющих ОТО разными способами. Эта выборка включает модель Хорндески (наиболее общий случай скалярно-тензорной гравитации с уравнениями поля второго порядка), модель бамбелби (гравитация с векторным полем), скалярную гравитацию Гаусса–Бонне, петлевую квантовую гравитацию, конформную гравитацию и $f(Q)$ -гравитацию. Для их статических версий ограничения уже были получены ранее [18]. Обе черные дыры, Sgr A* и M87*, фотографии которых получены в проекте ЕНТ, являются вращающимися [1, 7]. Поэтому представляется оправданным для теоретического моделирования теней этих черных дыр использовать метрики, учитывающие их вращение. Поскольку для Sgr A* наиболее вероятные значения момента вращения — $a = 0.5$ и $a = 0.94$, а для M87* — $a = 0.9375$, именно эти значения были использованы при моделировании.

При анализе профилей теней ЧД с учетом всех характеристик можно сделать следующие выводы.

1. Сферически-симметричные решения для расширенных теорий гравитации содержат ряд дополнительных параметров, которых нет в наиболее простом решении ОТО — метрике Шварцшильда. Далее, эти решения, кроме наличия одного или нескольких дополнительных параметров, имеют более сложную структуру по сравнению с метрикой Рейсснера–Нордстрема. Поэтому и получающиеся в результате метрики вращающихся ЧД имеют структуру, более сложную по сравнению со структурой метрики Керра–Ньюмена. Отсюда следуют дальнейшие эффекты.

2. Наличие дополнительных параметров теории, обусловленных более сложной структурой решения, порождает появление критических значений углового момента a_{crit} . Подобные значения существуют во всех рассмотренных теориях, кроме модели Хорндески и, частично, скалярно-тензорной гравитации Гаусса–Бонне (отметим, что там необходимо рассматривать значения $\xi < 0.3$, при которых обеспечено существование фотонной сферы).

3. В результате комплексного исследования выборки теорий подтверждается сделанный ранее вывод [17, 19], что для части рассмотренных моделей учет параметров теории или замедляет вращение

и связанные с ним эффекты (наиболее ярко это проявляется для теории Хорндески и скалярной гравитации Гаусса–Бонне), или усиливает их (наиболее ярко это проявляется для модели бамбелби). Для остальных рассмотренных моделей этот эффект также присутствует, но для учета вращения необходимо также использовать дополнительные параметры теории. Таким образом, с учетом полученных результатов в случае нелокальной гравитации можно заключить, что расширенная теория гравитации может как усиливать эффект вращения, так и ослаблять его. Это важно для дальнейшего моделирования профилей теней с учетом постоянно увеличивающейся точности фотографирования черных дыр.

4. Анализируя зависимости параметра смещения D от a и то, что его значения близки к керровскому, можно сделать вывод, что первые метрики вращающихся ЧД для трех рассмотренных теорий — моделей Хорндески и бамбелби и скалярной гравитации Гаусса–Бонне — лучшим образом и с минимальным количеством дополнительных параметров и ограничений работают в качестве основы для моделирования профилей теней ЧД. По-видимому, наилучшие результаты стоит ожидать от модели Хорндески (с учетом того, что в этой теории возможны новые типы решений, так как пока все рассмотренные в литературе решения представляют собой частные случаи теории). Модель бамбелби обеспечивает наилучшее совпадение с метрикой Керра.

5. Заметим, что несмотря на менее точное, чем в случае первых трех метрик, моделирование профилей теней ЧД, метрика Хейворда — метрика ЧД без центральной сингулярности — представляет дополнительный интерес, так как в рамках петлевой квантовой гравитации, по-видимому, удается избавиться от обеих сингулярностей кривизны: в центре ЧД (представленная метрика Хейворда) и в начале космологической эволюции, если заменить сингулярность отскоком, обеспечив существование инфляционной стадии [31].

Таким образом, с учетом вращения, фотографии теней ЧД, наравне с тестом GW170817 или постньютоновским формализмом [6], уже сейчас могут быть использованы для проверки и ограничения расширенных теорий гравитации.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, грант № 23-22-00073.

ЛИТЕРАТУРА

1. K. Akiyama, A. Alberdi, W. Alef et al. (The Event Horizon Telescope Collaboration), *Astrophys. J. Lett.* **957**, L20 (2023).
2. A. F. Zakharov, *Int. J. Mod. Phys. A* **20**, 2321 (2005).
3. N. Dadhich, R. Maartens, P. Papadopoulos, and V. Rezanian, *Phys. Lett. B* **487**, 1 (2000).
4. A. F. Zakharov, *Phys. Rev. D* **90**, 062007 (2014).
5. С. О. Алексеев, Б. Н. Латош, В. А. Прокопов, Е. Д. Емцова, *ЖЭТФ* **155**, 847 (2019).
6. S. Alexeyev and V. Prokopov, *Universe* **8**, 283 (2022).
7. K. Akiyama, A. Alberdi, W. Alef et al. (The Event Horizon Telescope Collaboration), *Astrophys. J. Lett.* **930**, L13 (2022).
8. K. Akiyama, A. Alberdi, W. Alef et al. (The Event Horizon Telescope Collaboration), *Astrophys. J. Lett.* **875**, L5 (2019).
9. Y. Cui, K. Hada, T. Kawashima et al., *Nature* **621**, 711 (2023).
10. V. Prokopov and S. Alexeyev, *Int. J. Mod. Phys. A* **35**, 2040060 (2020).
11. A. F. Zakharov, A. A. Nucita, F. DePaolis, and G. Ingrosso, *New Astronomy* **10**, 479 (2005).
12. С. Чандрасекар, *Математическая теория черных дыр*, Мир, Москва (1986).
13. E. T. Newman and A. I. Janis, *J. Math. Phys.* **6**, 915 (1965).
14. M. Azreg-Ainou, *Eur. Phys. J. C* **74**, 2865 (2014).
15. V. Karas and Z. Stuchlik, *Universe* **9**, 267 (2023).
16. S. Capozziello, S. Zare, D. F. Mota, and H. Hassanabadi, *JCAP* **05**, 027 (2023).
17. С. О. Алексеев, А. А. Байдерин, А. В. Немтинова, О. И. Зенин, *ЖЭТФ* **165**, 508 (2024).
18. В. А. Прокопов, С. О. Алексеев, О. И. Зенин, *ЖЭТФ* **162**, 108 (2022); *ЖЭТФ* **162**, 878 (2022).
19. С. О. Алексеев, А. А. Байдерин, О. И. Зенин, *Тени черных дыр в моделях Хорндески и бамбелби: учет вращения*, *ЭЧАЯ* **56(3)** (2025).

20. E. Babichev, C. Charmousis, and A. Lehebel, *JCAP* **04**, 027 (2017).
21. R. Casana, A. Cavalcante, F. P. Poulis, and E.B. Santos, *Phys. Rev. D* **97**, 104001 (2018).
22. N. Yunes and L. C. Stein, *Phys. Rev. D* **83**, 104002 (2011).
23. T. De Lorenzo, C. Pacilio, C. Rovelli, and S. Speziale, *Gen. Rel. Grav.* **47**, 1882 (2015).
24. J. Hu, L. Shi, Yu Zhang, and P. Duan, *Astrophys. Space Sci.* **363**, 3423 (2018).
25. A. B. Arbuzov and B. N. Latosh, *Universe* **6**, 12 (2020).
26. S. Alexeyev, D. Krichevskiy, and B. Latosh, *Universe* **7**, 501 (2021).
27. Y. S. Myung and D. Zou, *Phys. Rev. D* **100**, 064057 (2019).
28. F. D'Ambrosio, S. D. B. Fell, L. Heisenberg, and S. Kuhn, *Phys. Rev. D* **105**, 024042 (2022).
29. А. Ф. Захаров, *Комментарий к статье С. О. Алексеева и др. «Нелокальные гравитационные теории и изображения теней черных дыр»*, *ЖЭТФ* **167**, 220 (2024).
30. С. О. Алексеев, А. В. Немтинова, О. И. Зенин, А. А. Байдерин, *Ответ на комментарий А. Ф. Захарова к статье «Нелокальные гравитационные теории изображения теней черных дыр»*, *ЖЭТФ* **167**, 224 (2025).
31. A. Barrau, T. Cailleteau, J. Grain, and J. Mielczarek, *Class. Quant. Grav.* **31**, 053001 (2014).