

## ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ К ЗАДАЧЕ МНОГИХ ТЕЛ

В. М. Галицкий, А. Б. Мигдал

Показано, что энергия и затухание квазичастиц определяются полюсами одночастичной функции распространения. Установлена связь уравнения для двухчастичной функции Грина с кинетическим уравнением.

### Введение

Во многих случаях слабо возбужденные состояния системы взаимодействующих частиц могут быть приближенно описаны как совокупность элементарных возбуждений — квазичастиц. При таком рассмотрении возбужденное состояние системы характеризуется меньшим числом параметров, чем при точном описании. Поэтому элементарное возбуждение не является стационарным состоянием системы, а представляет собой пакет стационарных состояний с узким энергетическим разбросом. Расплывание этого пакета приводит к затуханию возбуждения. Описание состояний системы в терминах элементарных возбуждений возможно, если энергетическая ширина пакета, определяющая его затухание, мала по сравнению с энергией возбуждения.

Ниже рассматривается случай однородной неограниченной системы. В такой системе оператор импульса коммутирует с гамильтонианом, поэтому возбужденные состояния характеризуются, наряду с другими параметрами, значением импульса системы.

По-видимому, во всех ферми-системах существуют возбуждения, аналогичные возбуждениям в идеальном ферми-газе. Энергия такого возбуждения  $E(p_1, p_2) = \epsilon(p_1) - \epsilon(p_2)$ , где  $p_1$ ,  $\epsilon(p_1)$  и  $p_2$ ,  $\epsilon(p_2)$  — импульс и энергия частицы и дырки, составляющих возбуждение. При этом  $p_1 > p_0 > p_2$ ,  $p_0$  — граничный импульс ферми-заполнения для квазичастиц.

Квазичастица с импульсом  $p$ , близким к  $p_0$ , может уменьшить свою энергию, переводя другую квазичастицу из ферми-заполнения в состояние с  $p' > p_0$ . Из ограничений, налагаемых принципом Паули и законами сохранения энергии и импульса, следует, что вероятность этого процесса, определяющая затухание квазичастиц, пропорциональна  $(p - p_0)^2$ . Таким образом, описание возбужденных состояний ферми-системы при помощи квазичастиц, тем точнее, чем ближе импульсы квазичастиц к  $p_0$ .

Свойства возбуждений удобно изучать методами квантовой теории поля, вводя в рассмотрение функции Грина системы. При этом одночастичная функция Грина опеределает энергию и затухание квазичастиц. Однако в системе могут существовать возбуждения, энергия которых не изображается как сумма энергий квазичастиц. Энергетический спектр таких возбуждений может быть получен из двухчастичной функции Грина. Двухчастичная функция Грина, как будет показано ниже, позволяет также определить поведение системы в слабом внешнем поле.

Наряду с функциями Грина частиц можно ввести также функции распространения взаимодействия между частицами. Например, в задаче об электронах в металле, взаимодействующих с решеткой, такой функцией распространения является функция Грина фонона. Функция Грина фонона опеределает энергию и затухание возбуждений решетки.

### Одночастичные функции Грина и энергетический спектр

1. Одночастичная функция Грина определяется, как обычно, равенством

$$G(\mathbf{r}_1 t_1, \mathbf{r}_2 t_2) = i \langle T \{ e^{iHt_1} \psi(\mathbf{r}_1) e^{-iH(t_1-t_2)} \psi^+(\mathbf{r}_2) e^{-iHt_2} \} \rangle, \quad (1)$$

где  $\psi(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}} e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}}$ ; усреднение производится по функциям основного состояния гамильтониана системы  $H$ .

Аналогично определяется функция Грина поля  $\varphi$ , осуществляющего взаимодействие между частицами:

$$D(\mathbf{r}_1 t_1, \mathbf{r}_2 t_2) = i \langle P \{ e^{iHt_1} \varphi(\mathbf{r}_1) e^{iH(t_1-t_2)} \varphi(\mathbf{r}_2) e^{-iHt_2} \} \rangle. \quad (2)$$

В случае фононного поля

$$\varphi(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{q}} \alpha_{\mathbf{q}} (b_{\mathbf{q}} + b_{-\mathbf{q}}^+) e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}},$$

$b_{\mathbf{q}}$  и  $b_{\mathbf{q}}^+$  — операторы уничтожения и рождения фононов.

При отсутствии внешнего поля функции  $G$  и  $D$  зависят только от  $r = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$  и  $\tau = t_1 - t_2$ . Разлагая функции  $G(r, \tau)$  и  $D(r, \tau)$  в интеграл Фурье, получим

$$\begin{aligned} G(r, \tau) &= \int \frac{dp d\varepsilon}{(2\pi)^4} G(p, \varepsilon) e^{i(\mathbf{p}\mathbf{r} - \varepsilon\tau)}, \\ D(r, \tau) &= \int \frac{dq d\omega}{(2\pi)^4} D(q, \omega) e^{i(\mathbf{q}\mathbf{r} - \omega\tau)}, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $G(p, \varepsilon)$  и  $D(q, \omega)$  — функции Грина в импульсном представлении.

При отсутствии взаимодействия между частицами из (1) легко получить для ферми-системы<sup>1</sup>

$$G_0(r, \tau) = i \int \frac{dp}{(2\pi)^3} e^{i(\mathbf{p}\mathbf{r} - \varepsilon_p^0 \tau)} \begin{cases} 1 - n_p, & \tau > 0 \\ -n_p, & \tau < 0, \end{cases}$$

где  $n_p = a_p^+ a_p$ . Переходя к импульсному представлению по формуле (3), получаем

$$\begin{aligned} G_0(p, \varepsilon) &= 1 / (\varepsilon_p^0 - \varepsilon - i\Delta), \\ \Delta &\rightarrow \begin{cases} +0 & p > p_0 \\ -0 & p < p_0. \end{cases} \end{aligned} \quad (4)$$

Аналогично, из (3) находим

$$D_0(q, \omega) = \alpha_q^2 \left\{ \frac{1}{\omega_q^0 - \omega - i\delta} + \frac{1}{\omega_q^0 + \omega - i\delta} \right\}, \quad \delta \rightarrow +0. \quad (5)$$

2. Перейдем к фурье-представлению по  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ . Из (1) получаем для

$$G(p, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int d\varepsilon G(d, \varepsilon) e^{-i\varepsilon\tau}$$

выражение

$$G(p, \tau) = i \begin{cases} \langle a_p e^{-iH\tau} a_p^+ \rangle e^{iE_p \tau} & \tau > 0 \\ -\langle a_p^+ e^{iH\tau} a_p \rangle e^{-iE_p \tau} & \tau < 0. \end{cases} \quad (6)$$

<sup>1</sup> Ниже приводятся формулы для ферми-системы. Как легко видеть, большинство результатов сохраняется и для случая бозе-частиц.

Записывая операторы, входящие в  $G(p, \tau)$ , в энергетическом представлении имеем

$$G(p, \tau) = \begin{cases} i \sum_s |(a_p^+)_{s0}|^2 \exp\{-i(E_s - E_0)\tau\} & \tau > 0, \\ -i \sum_s |(a_p)_{s0}|^2 \exp\{i(E_s - E_0)\tau\} & \tau < 0. \end{cases} \quad (7)$$

Так как оператор  $a_p^+$  увеличивает импульс системы на величину  $p$ , а число частиц в системе на 1, то суммирование при  $\tau > 0$  производится по всем состояниям с импульсом  $p$  и числом частиц  $N + 1$ , если в основном состоянии число частиц было  $N$ , а импульс равнялся нулю. Аналогично этому суммирование при  $\tau < 0$  производится по состояниям с числом частиц  $N - 1$  и импульсом  $-p$ . Обозначим

$$E_s(N + 1) - E_0(N) = \varepsilon_s(N + 1) + E_0(N + 1) - E_0(N) = \varepsilon_s + \mu,$$

где  $\mu = E_0(N + 1) - E_0(N)$  — химический потенциал. Энергия возбуждения  $\varepsilon_s = E_s(N + 1) - E_0(N + 1)$  по определению положительна. Аналогично,

$$E_s(N - 1) - E_0(N) = \varepsilon_s(N - 1) - E_0(N) + E_0(N - 1) = \varepsilon'_s - \mu'.$$

Величины  $\varepsilon'_s$  и  $\mu'$  совпадают с  $\varepsilon_s$  и  $\mu$  с точностью  $1/N$ . Введем функции

$$\begin{aligned} A(p, E) dE &= \sum_s |(a_p^+)_{s0}|^2, & E < \varepsilon_s < E + dE, \\ B(p, E) dE &= \sum_s |(a_p)_{s0}|^2, & E < \varepsilon_s < E + dE \end{aligned} \quad (8)$$

и перейдем в выражении (7) к разложению Фурье по  $\tau$ . Имеем

$$G(p, \varepsilon) = \int_0^{\infty} dE \left\{ \frac{A(p, E)}{E - \varepsilon + \mu - i\delta} - \frac{B(p, E)}{E + \varepsilon - \mu - i\delta} \right\}. \quad (9)$$

Формула (9) представляет собой разложение Лемана [1] для одночастичной функции Грина системы, состоящей из конечного числа ферми-частиц. Она позволяет получить некоторые соотношения между вещественной и мнимой частью функции  $G(p, \varepsilon)$ . Действительно из равенства

$$\frac{1}{E - \varepsilon + \mu - i\delta} = P \frac{1}{E - \varepsilon + \mu} + i\pi\delta(E - \varepsilon + \mu)$$

вытекает

$$\text{Im } G(p, \varepsilon) = \pi \begin{cases} A(p, \varepsilon - \mu) & \varepsilon > \mu \\ -B(p, \mu - \varepsilon) & \varepsilon < \mu, \end{cases} \quad (10)$$

т. е. мнимая часть функции Грина меняет знак в точке  $\varepsilon = \mu$ . Используя (9) и (10), нетрудно получить формулу<sup>2</sup>, устанавливающую связь между вещественной и мнимой частью  $G$ :

$$\text{Re } G(p, \varepsilon) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P \frac{\text{Im } G(p, \varepsilon')}{\varepsilon' - \varepsilon} d\varepsilon'. \quad (11)$$

Заметим, что в случае системы бозе-частиц выражение для  $G(p, \varepsilon)$  отличается от (9) только заменой знака при  $B(p, \varepsilon)$ . Поэтому для бозе-частиц, в отличие от (10), мнимая часть  $G(p, \varepsilon)$  положительна для всех  $p$  и  $\varepsilon$ . Формула (11) сохраняется и для бозе-частиц.

<sup>2</sup> Эта формула получена Л. Д. Ландау.

Аналогичные формулы могут быть получены для  $D(q, \omega)$ :

$$D(q, \tau) = \begin{cases} i \sum_s |(\varphi_{-q})_{s0}|^2 \exp\{-i(E_s - E_0)\tau\} & \tau > 0 \\ i \sum_s |(\varphi_q)_{s0}|^2 \exp\{i(E_s - E_0)\tau\} & \tau < 0. \end{cases} \quad (12)$$

Здесь использована вещественность поля  $\varphi$ :  $\varphi_q^+ = \varphi_{-q}$ . В отличие от (7), число частиц  $N$  в состояниях суммы (12) равняется числу частиц в основном состоянии. Обозначим

$$\Phi(q, \omega') d\omega' = \sum_s |(\varphi_{-q})_{s0}|^2 = \sum_s |(\varphi_q)_{s0}|^2, \quad (13)$$

$$\omega' < E_s - E_0 < \omega' + d\omega',$$

тогда

$$D(q, \tau) = \int_0^{\infty} d\omega' \Phi(q, \omega') e^{-i\omega'|\tau|}. \quad (14)$$

Переходя в (14) к фурье-разложению по  $\tau$ , получим

$$D(q, \omega) = \int_0^{\infty} d\omega' \Phi(q, \omega') \left\{ \frac{1}{\omega' - \omega - i\delta} + \frac{1}{\omega' + \omega - i\delta} \right\}. \quad (15)$$

Из (15) имеем

$$\text{Im } D(q, \omega) = \pi \Phi(q, |\omega|) > 0; \quad (16)$$

$$\text{Re } D(q, \omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega' \text{Im } D(q, \omega') P \left\{ \frac{1}{\omega' - \omega} + \frac{1}{\omega' + \omega} \right\}. \quad (17)$$

3. Выясним свойства функции Грина в комплексной плоскости  $\epsilon$ . Заменяя во втором слагаемом (9)  $E$  на  $-E$ , получаем

$$G(p, \epsilon) = \int_C \frac{F(p, E)}{E - \epsilon + \mu} dE. \quad (18)$$

Контур интегрирования  $C$  изображен на рис. 1. Выражение, стоящее в правой части (18), представляет собой интеграл типа Коши. Функции,

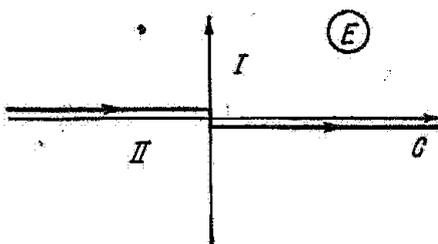


Рис. 1

определяемые такими интегралами, как известно [2], аналитичны во всей плоскости, кроме точек контура интегрирования. В нашем случае контур интегрирования  $C$  делит плоскость комплексного переменного  $\epsilon - \mu$  на две области, и интеграл (18) определяет две различные функции:  $f_I(\epsilon - \mu)$  — аналитическую в области I и  $f_{II}(\epsilon - \mu)$  — аналитическую в области II. Функция Грина  $G(p, \epsilon)$ , определяемая значениями интеграла (12) на вещественной

оси, совпадает для  $\epsilon < \mu$  с  $f_{II}$ , а для  $\epsilon > \mu$  с  $f_I$ . Таким образом,  $G(p, \epsilon)$  не является аналитической функцией  $\epsilon$  и имеет при  $\epsilon = \mu$  особую точку.

Используя действительность функции  $F(p, E)$ , нетрудно показать, что значения интеграла (18) для точек, лежащих по разные стороны контура  $C$  бесконечно близко друг к другу, комплексно сопряжены между собой. Поэтому функция  $f_I$  для отрицательных значений  $\epsilon - \mu$ , лежащих выше контура  $C$ , комплексно сопряжена с  $G(p, \epsilon)$ :

$$f_I(\epsilon - \mu + 2i\delta) = G^*(p, \epsilon), \quad \epsilon < \mu. \quad (19)$$

Таким образом,  $G(p, \epsilon)$  для  $\epsilon > \mu$ , аналитически продолженная в верхнюю полуплоскость, совпадает для  $\epsilon < \mu$  с  $G^*(p, \epsilon)$ , или, иначе говоря,  $G(p, \epsilon)$  для  $\epsilon > \mu$  и  $G^*(p, \epsilon)$  для  $\epsilon < \mu$  являются аналитической функцией  $f_{II}$ . Аналогично,  $G(p, \epsilon)$  для  $\epsilon < \mu$ , аналитически продолженное в нижнюю полуплоскость, совпадает для  $\epsilon > \mu$  с  $G^*(p, \epsilon)$ .

4. Установим связь одночастичной функции Грина со спектром возбуждений. Функция  $G(p, \tau)$  имеет простой физический смысл. Пусть в начальный момент система находится в состоянии  $\Psi(0) = a_p^+ \Phi_0$ , где  $\Phi_0$  — основное состояние системы  $N$  частиц (физический «вакуум»). В момент  $\tau > 0$  волновая функция системы равна

$$\Psi(\tau) = e^{iH\tau} a_p^+ \Phi_0.$$

Функция  $G(p, \tau)$  равна амплитуде вероятности найти систему в момент  $\tau$  в состоянии  $\Psi(0)$ .

Действительно,

$$(\Psi(0), \Psi(\tau)) = (\Phi_0 a_p e^{-iH\tau} a_p^+ \Phi_0) = -iG(p, \tau). \quad (20)$$

Аналогичное соотношение существует для  $\tau < 0$ . Согласно (7) и (8), для  $\tau > 0$

$$(\Psi(0), \Psi(\tau)) = e^{-i\mu\tau} \int_0^{\infty} A(p, E) e^{-iE\tau} dE. \quad (21)$$

При отсутствии взаимодействия для  $p$ , больших  $p_0$ ,

$$A(p, E) = \delta(E + \mu - \epsilon_p^0) \text{ и } (\Psi(0), \Psi(\tau)) = e^{-i\epsilon_p^0 \tau}.$$

При включении взаимодействия между частицами  $\delta$ -функция в  $A(p, E)$  заменяется на функцию, имеющую резкий максимум вблизи  $E = \epsilon_p - \mu$ , где  $\epsilon_p$  — энергия квазичастиц.

Рассмотрим поведение функции Грина для больших положительных времен. Пусть ближайшая к вещественной оси особая точка аналитического продолжения  $A(p, E)$  в нижнюю полуплоскость есть полюс первого порядка при значении  $E = \epsilon_p - \mu - i\Gamma$ . Тогда, смещая в (21) контур интегрирования в нижнюю полуплоскость, получим

$$G(p, \tau) = ie^{-i\mu\tau} \int_C A e^{-iE\tau} dE. \quad (21')$$

Контур интегрирования  $C$  изображен на рис. 2. Неэкспоненциальное слагаемое в функции  $G(p, \tau)$ , возникающее от интегрирования по мнимой оси вблизи  $E = 0$ , для  $\tau \gg 1/\Gamma$  имеет порядок величины  $\Gamma/\epsilon_p^2$ . Таким образом,

$$G(p, \tau) = c_p e^{-i\epsilon_p \tau - \Gamma \tau} + O[(\Gamma/\epsilon_p)^2]. \quad (22)$$

Этот результат можно интерпретировать следующим образом: в состоянии  $\Psi(0)$  с амплитудой  $c_p$  присутствует паке́т, изображающий квазичастицу с энергией  $\epsilon_p$  и затуханием  $\Gamma$ . Значения  $\epsilon_p$  и  $\Gamma$  определяются положением полюса  $A(p, E)$ , т. е. мнимой части  $G(p, \epsilon)$  в нижней полуплоскости. Полюсы  $\text{Im} G$  совпадают с полюсами  $G$  или  $G^*$ , однако аналитическое продолжение последней дает  $f_{II}(\epsilon - \mu)$  — функцию, аналитическую в нижней полуплоскости. Таким образом, энергия и затухание возбуждений определяются вещественной и мнимой частями полюсов аналитического

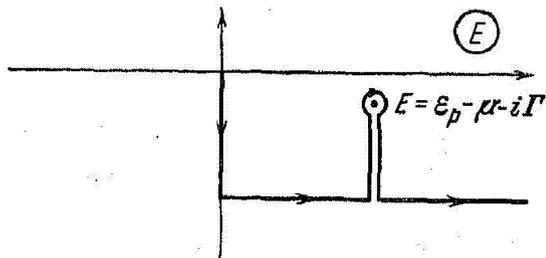


Рис. 2

продолжения  $G(p, \varepsilon)$  для  $\varepsilon > \mu$  в нижнюю полуплоскость. Аналогично, энергия и затухание дырок в распределении Ферми дается полюсами аналитического продолжения  $G(p, \varepsilon)$  для  $\varepsilon < \mu$  в верхнюю полуплоскость.

Введем неприводимую часть собственной энергии частицы  $\Sigma(p, \varepsilon)$ :

$$G^{-1}(p, \varepsilon) = \varepsilon_p^0 - \varepsilon - \Sigma(p, \varepsilon) = \varepsilon_p^0 - \varepsilon - \Sigma_0(p, \varepsilon) - i \Sigma_1(p, \varepsilon), \quad (23)$$

$\Sigma_0$  и  $\Sigma_1$  — вещественная и мнимая части  $\Sigma$ . Энергия и затухание квазичастицы определяются равенством

$$\varepsilon_p^0 - (\varepsilon_p - i\Gamma) - \tilde{\Sigma}(p, \varepsilon_p - i\Gamma) = 0, \quad (24)$$

где  $\tilde{\Sigma}(p, \varepsilon)$  — аналитическое продолжение функции  $\Sigma(p, \varepsilon)$  для  $\varepsilon > \mu$ . Приближенно для  $\Gamma/\varepsilon_p \ll 1$ :

$$\varepsilon_p^0 - \varepsilon_p - \Sigma_0(p, \varepsilon_p) = 0, \quad (24')$$

$$\Gamma_p = \Sigma_1(p, \varepsilon_p) / \left[ 1 + \left( \frac{\partial \Sigma_0}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon = \varepsilon_p} \right].$$

Аналогичные результаты справедливы для  $D(q, \omega)$ . Пусть  $\Pi(q, \omega)$  — неприводимая часть собственной энергии фонона

$$\begin{aligned} D(q, \omega) &= \alpha_q^2 / [\omega_q^{02} - \omega^2 - 2\omega_q^0 \alpha_q^2 \Pi(q, \omega)] = \\ &= \alpha_q^2 / [\omega_q^{02} - \omega^2 - 2\omega_q^0 \alpha_q^2 \Pi_0(q, \omega) - 2i\omega_q^0 \alpha_q^2 \Pi_1(q, \omega)]. \end{aligned}$$

Как и выше, энергия и затухание фононного возбуждения даются полюсами аналитического продолжения  $D(q, \omega)$  для  $\omega > 0$ :

$$\omega_q^{02} - (\omega_q - i\gamma)^2 - 2\omega_q^0 \alpha_q^2 \tilde{\Pi}(q, \omega_q - i\gamma) = 0, \quad (25)$$

$\tilde{\Pi}(q, \omega)$  — аналитическое продолжение функции  $\Pi(q, \omega)$  для  $\omega > 0$ . Приближенно для  $\omega_q \gg \gamma$ :

$$\begin{aligned} \omega_q^2 &= \omega_q^{02} - 2\omega_q^0 \alpha_q^2 \Pi_0(q, \omega_q), \\ \gamma_q &= \alpha_q^2 \frac{\omega_q^0}{\omega_q} \Pi_1(q, \omega_q) / \left[ 1 + 2\omega_q^0 \alpha_q^2 \left( \frac{\partial \Pi_0}{\partial \omega} \right)_{\omega = \omega_q} \right]. \end{aligned} \quad (25')$$

Определим импульс  $p_0$  из условия  $\mu = \varepsilon_p$ , где  $\mu$  — химический потенциал системы. Тогда из (10) и (24') в предположении непрерывности  $\text{Im } G$  в точке  $\varepsilon = \mu$  получаем  $\Gamma(p_0) = 0$ . Таким образом затухание возбуждений обращается в нуль в точке  $p_0$ , определяемой равенством  $\varepsilon_{p_0} = \mu$ .

Б. Одночастичная функция Грина позволяет найти также и другие характеристики системы. Так, распределение частиц по импульсам связано с функцией Грина следующим равенством [3]:

$$n_p = i \int_C G(p, \varepsilon) \frac{d\varepsilon}{(2\pi)}, \quad (26)$$

где контур  $C$  состоит из вещественной оси и полуокружности бесконечного радиуса, лежащей в верхней полуплоскости.

Как показано в [3], при переходе через  $p = p_0$  полюс  $G(p, \varepsilon)$ , лежащий вблизи вещественной оси, переходит в нижнюю полуплоскость  $\varepsilon$  и тем самым оказывается вне контура  $C$  формулы (26). Поэтому скачок  $n_p$  при  $p = p_0$  сохраняется и при наличии произвольного взаимодействия.

Выразим через функцию  $G$  энергию основного состояния системы. Дифференцируя  $G(p, \tau)$  по времени  $t$ , нетрудно получить формулу

$$\left( i \frac{\partial}{\partial t} - \varepsilon_p^0 \right) G(p, \tau) = -\delta(\tau) - i \langle T \{ [H'(t), a_p(t)] a_p^+(t') \} \rangle, \quad (27)$$

где  $H'(t)$  — гамильтониан взаимодействия между частицами, а  $[H', a_p]$  — коммутатор операторов  $H'$  и  $a_p$ . Сравнивая (27) в  $(p, \varepsilon)$ -представлении с выражением, связывающим  $G$  и  $G_0$ , находим общий вид произведения  $\Sigma(p, \varepsilon) G(p, \varepsilon)$ :

$$\Sigma(p, \varepsilon) G(p, \varepsilon) = i \int d\tau e^{i\varepsilon\tau} \langle T \{ [H'(t), a_p(t)] a_p^+(t') \} \rangle. \quad (28)$$

Интегрирование (28) с множителем  $e^{i\varepsilon\Delta}$  приводит в пределе  $\Delta \rightarrow +0$  к формуле

$$\lim_{\Delta \rightarrow +0} \int \frac{d\varepsilon}{2\pi} e^{i\varepsilon\Delta} \Sigma(p, \varepsilon) G(p, \varepsilon) \equiv \int_C \frac{d\varepsilon}{2\pi} \Sigma(p, \varepsilon) G(p, \varepsilon) = -i \langle a_p^+ [H', a_p] \rangle,$$

или

$$i \int_C \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \Sigma(p, \varepsilon) G(p, \varepsilon) = \int \langle a_p^+ [H', a_p] \rangle \frac{d^3p}{(2\pi)^3}, \quad (29)$$

где контур  $C$  совпадает с контуром интегрирования в (26).

В случае парного взаимодействия между частицами правая часть (29) сводится к среднему значению гамильтониана взаимодействия

$$\langle H' \rangle = -\frac{i}{2} \int_C \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \Sigma(p, \varepsilon) G(p, \varepsilon). \quad (30)$$

Добавляя к (30) среднее значение гамильтониана невзаимодействующих частиц, получаем окончательно

$$E_0 = \frac{i}{(2\pi)^4} \int_C \left\{ \varepsilon_p^0 - \frac{1}{2} \Sigma(p, \varepsilon) \right\} G(p, \varepsilon) d^4p. \quad (31)$$

Дифференцирование  $E_0$  по числу частиц  $N$  дает химический потенциал системы  $\mu$ .

### Двухчастичная функция Грина. Кинетическое уравнение

Для изучения энергетического спектра, а также поведения системы в слабых внешних полях, необходимо рассматривать двухчастичную функцию Грина. Двухчастичная функция  $K(1, 2; 3, 4)$  определяется равенством

$$K(1, 2; 3, 4) = i \langle T \{ \psi(1) \psi^+(2) \psi(3) \psi^+(4) \} \rangle, \quad (32)$$

1, 2; 3, 4 означают совокупности координат пространственно-временных точек. В случае  $t_1, t_2 > t_3, t_4$   $K$  может быть записана в виде

$$K(1, 2; 3, 4) = i \sum_s \chi_s(1, 2) \tilde{\chi}_s(3, 4), \quad (33)$$

где

$$\begin{aligned} \chi_s(1, 2) &= (T \{ \psi(1) \psi^+(2) \})_{0s}, \\ \tilde{\chi}_s(3, 4) &= (\tilde{T} \{ \psi(4) \psi^+(3) \})_{0s}^* \end{aligned} \quad (34)$$

$\tilde{T}$  располагает операторы в порядке, обратном тому, в котором их располагает  $T$ . Функции  $\chi_s(1, 2)$  для совпадающих времен,  $t_1 = t_2$ , имеют смысл волновых функций, описывающих поведение частицы и дырки в состоянии  $s$ . В отсутствие внешних полей в  $\chi$  может быть выделена зависимость от координат «центра тяжести»  $X = (x_1 + x_2)/2$ :

$$\chi_s(x_1, x_2) = e^{i\hbar X f_{k, \omega}(x)}, \quad (35)$$

$$\hbar X = \hbar R - \omega T, \quad x = x_1 - x_2, \quad k = p_s - p_0, \quad \omega = E_s - E_0,$$

$k$  и  $\omega$  — импульс и энергия возбуждения.

Как будет показано ниже, функция  $f_{k,\omega}(x)$  для  $t_1 = t_2$  в импульсном представлении, т. е.  $f_{k,\omega}(p)$  есть компонента Фурье функции распределения системы  $f(r, p, t)$ . В самом деле, матрица плотности, нормированная на полное число частиц:

$$P(r, r', t) = \sum_{l=1}^N \int \varphi^*(r_1, \dots, r', \dots, r_N; t) \varphi(r_1, \dots, r, \dots, r_N; t) \prod_{h \neq i} dV_h \quad (36)$$

( $\varphi(r_1, \dots, r_N; t)$  — волновая функция системы в конфигурационном пространстве), может быть записана в виде среднего значения интегрального оператора с ядром

$$(\hat{P}(r, r', t))_{r', r_i} = \sum_i \delta(r' - r'_i) \delta(r - r_i), \quad (37)$$

который можно назвать оператором матрицы плотности. В представлении чисел заполнения этот оператор имеет вид

$$\hat{P}(r, r', t) = \int \psi^+(r'_1) \delta(r' - r'_1) \delta(r - r_1) \psi(r_1) dV_1 dV'_1 = \psi^+(r') \psi(r). \quad (37')$$

$\chi_s(1, 2)$  для  $t_1 = t_2 = 0$  представляет собой, с точностью до независящего от точек 1 и 2 множителя, часть матрицы плотности, которая колеблется с частотой  $\omega = E_s - E_0$ . Компонента Фурье матрицы плотности по относительной координате  $x = r_1 - r_2$  связана, как известно, с функцией распределения (матрица плотности в смешанном представлении). Поэтому функция  $f$ , с точностью до нормировочного множителя, совпадает с компонентой Фурье функции распределения:

$$f_{k,\omega}(p) = c \int f(r, p, t) e^{-i(kv - \omega t)} dv dt. \quad (38)$$

Из (34) видно, что двухчастичная функция Грина  $K$  удобна для изучения возбужденных состояний системы  $N$  частиц, в которых присутствуют частица и дырка, в то время как одночастичная функция  $G$  позволяет исследовать состояния системы  $N + 1$  частицы, отличающиеся от основного состояния системы  $N$  частиц наличием (или отсутствием) одной квазичастицы. Существенным отличием состояний, представленных в двухчастичной функции Грина  $K$ , является взаимодействие между частицей и дыркой. Если это взаимодействие приводит только к рассеянию частицы на дырке, то энергия возбуждения равна энергии частицы и дырки на бесконечности  $E = \varepsilon(p_1) - \varepsilon(p_2)$ ,  $p = p_1 - p_2$ . В этом случае двухчастичная функция Грина не дает новых сведений об энергетическом спектре системы по сравнению с одночастичной. В ряде случаев взаимодействие может привести к появлению возбужденных состояний, которые можно интерпретировать как связанные состояния частицы и дырки. Такого рода возбужденные состояния изучались в работах Климонтовича и Силина [4, 5] и Ландау [6] и были названы нулевым звуком.

Уравнение для функции  $K$ , как показано в работах Швингера и Гелл-Манна и Лоу [7, 8], имеет вид

$$K(x_1 x_2; x_3 x_4) = iG(x_1 - x_4) G(x_3 - x_2) - iG(x_1 - x_2) G(x_3 - x_4) + \\ + i \int G(x_1 - x_5) G(x_6 - x_2) \Gamma(x_5 x_6, x_7 x_8) K(x_7 x_8; x_3 x_4) d^4 x_5 d^4 x_6 d^4 x_7 d^4 x_8, \quad (39)$$

$\Gamma$  — компактный четырехполюсник, т. е. совокупность графиков, начинающихся и оканчивающихся двумя сплошными линиями, причем эти графики не могут быть разделены на части, соединенные только двумя сплошными линиями. Свободный член этого уравнения описывает распространение невзаимодействующих частицы и дырки и не содержит частот, отвечающих связанным состояниям. Поэтому выделение функции  $\chi_s$ , опи-

связанной состояниями, приводит, как показано в [8], к следующему однородному уравнению для  $\chi$ :

$$\chi_s(x_1 x_2) = i \int G(x_1 - x_5) G(x_6 - x_2) \Gamma(x_5 x_6, x_7 x_8) \chi_s(x_7 x_8) d^4 x_5 d^4 x_6 d^4 x_7 d^4 x_8. \quad (40)$$

Подставляя в это уравнение  $\chi_s$  в виде (35), получим задачу на собственные значения, решение которой дает частоты нулевого звука и функции  $\chi_s$ . Ограничимся в дальнейшем случае системы частиц, взаимодействующих друг с другом слабым незападывающим потенциалом  $V$ . В первом по малости взаимодействия приближении в качестве функции Грина должны быть взяты нулевые функции Грина, а компактный четырехполюсник  $\Gamma$  определяется двумя графиками, изображенными на рис. 3. (Пунктир на этих графиках соответствует функции распространения взаимодействия частиц  $-iV_q$ .) Для дальнейшего рассмотрения необходимо учесть спин частиц. В наиболее распространенном случае спина, равного  $1/2$ , можно построить четыре функции  $\chi_s$ :



Рис. 3

$$\chi_s(1, 2; \sigma_1, \sigma_2) = (T \{ \psi_{\sigma_1}(1), \psi_{\sigma_2}^{\dagger}(2) \})_{0s}. \quad (41)$$

Нетрудно видеть, что функциям  $\chi_s(1, 2; 1/2, -1/2)$  и  $\chi_s(1, 2; -1/2, 1/2)$  отвечают возбуждения со спином 1 и проекцией  $+1$  и  $-1$ , соответственно. В качестве компактного четырехполюсника в уравнении для этих  $\chi_s$  может быть использовано  $\Gamma$ , изображающееся только первым из графиков рис. 3, так как вследствие независимости потенциала от спиновых переменных во втором взаимодействии могут участвовать частица и дырка с суммарным спином, равным нулю. Поэтому уравнение для этих функций в импульсном представлении имеет вид:

$$\chi_s(p_1, p_2; \sigma, -\sigma) = i G_0(p_1) G_0(p_2) \int V_q \chi_s(p_1 + q, p_2 + q; \sigma, -\sigma) \frac{dq}{(2\pi)^4}. \quad (42)$$

В отличие от этого компактный четырехполюсник в уравнении для функций  $\chi_s(1, 2; 1/2, 1/2)$  и  $\chi_s(1, 2; -1/2, -1/2)$  изображается обоими графиками рис. 3. Уравнение для этих функций:

$$\begin{aligned} \chi_s(p_1, p_2; \sigma, \sigma) = i G_0(p_1) G_0(p_2) \left\{ \int V_q \chi_s(p_1 + q, p_2 + q; \sigma, \sigma) \frac{dq}{(2\pi)^4} - \right. \\ \left. - V_{p_1 - p_2} \sum_{\sigma'} \int \chi_s\left(p + \frac{p_1 - p_2}{2}, p - \frac{p_1 - p_2}{2}; \sigma', \sigma'\right) \frac{dp}{(2\pi)^4} \right\}. \end{aligned} \quad (43)$$

Введем функции  $\chi_s^+(p_1, p_2)$  и  $\chi_s^-(p_1, p_2)$ :

$$\chi_s^+(p_1, p_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \chi_s\left(p_1, p_2; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) + \chi_s\left(p_1, p_2; -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \right\}, \quad (44)$$

$$\chi_s^-(p_1, p_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \chi_s\left(p_1, p_2; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) - \chi_s\left(p_1, p_2; -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \right\}. \quad (44')$$

Функция  $\chi_s^+(p_1, p_2)$  отвечает возбуждению со спином 0, функция  $\chi_s^-(p_1, p_2)$  — возбуждению со спином 1 и проекцией 0. Уравнения для этих функций могут быть получены сложением и вычитанием уравнений (43) для значений  $\sigma = 1/2$  и  $\sigma = -1/2$ . При этом уравнение для функции  $\chi_s^-$  совпадает с уравнением (42) для функций со спином 1 и проекциями  $\pm 1$ . Уравне-

ние для  $\chi_s^+$  имеет вид:

$$\chi_s^+(p_1, p_2) = iG_0(p_1)G_0(p_2) \left\{ \int V_q \chi_s^+(p_1 + q, p_2 + q) \frac{dq}{(2\pi)^4} - 2V_{p_1 - p_2} \int \chi_s^+\left(p + \frac{p_1 - p_2}{2}, p - \frac{p_1 - p_2}{2}\right) \frac{dp}{(2\pi)^4} \right\}. \quad (45)$$

Переходя к «относительному» импульсу  $k = p_1 - p_2$ , равному импульсу возбужденного состояния и «суммарному» импульсу  $p = (p_1 + p_2)/2$ , получим следующие уравнения для возбуждений с суммарным спином нуль и единица, соответственно:

$$\chi_{k\omega}^0(p) = iG_0\left(p + \frac{k}{2}\right)G_0\left(p - \frac{k}{2}\right) \times \left\{ \int V_q \chi_{k\omega}^0(p + q) \frac{dq}{(2\pi)^4} - 2V_k \int \chi_{k\omega}^0(p) \frac{dp}{(2\pi)^4} \right\}, \quad (46)$$

$$\chi_{k\omega}^1(p) = iG_0\left(p + \frac{k}{2}\right)G_0\left(p - \frac{k}{2}\right) \int V_q \chi_{k\omega}^1(p + q) \frac{dq}{(2\pi)^4}. \quad (47)$$

Функция  $\chi_{k\omega}^0$  отвечает возбуждению с суммарным спином 0, функция  $\chi_{k\omega}^1$  — возбуждению с суммарным спином 1.

При отсутствии запаздывания компонента Фурье потенциала не зависит от четвертой компоненты  $q$ :  $V_q \equiv V(q)$ , поэтому уравнения (46) и (47) могут быть проинтегрированы по  $\varepsilon$  ( $\varepsilon$  — четвертая компонента  $p$ ). Интегрированию по  $\varepsilon$  функции  $\chi$  отвечает в координатном представлении приравнивание времен  $t_1$  и  $t_2$ , поэтому в результате интегрирования получаем уравнение для  $f_{k\omega}(p)$  — компоненты Фурье функции распределения

$$f_{k\omega}^0(p) = \frac{n_0(p + k/2) - n_0(p - k/2)}{\omega - kp - i\delta [n_0(p + k/2) - n_0(p - k/2)]} \times \left\{ \int V(q) f_{k\omega}^0(p + q) \frac{dq}{(2\pi)^3} - 2V(k) \int f_{k\omega}^0(p) \frac{dp}{(2\pi)^3} \right\}, \quad (46')$$

$$f_{k\omega}^1(p) = \frac{n_0(p + k/2) - n_0(p - k/2)}{\omega - kp - i\delta [n_0(p + k/2) - n_0(p - k/2)]} \int V(q) f_{k\omega}^1(p + q) \frac{dq}{(2\pi)^3}, \quad (47')$$

$n_0(p)$  — числа заполнения невзаимодействующих частиц.

Рассмотрим случай короткодействующих сил ( $ap_0 \ll 1$ ,  $a$  — размер области действия потенциала). Для возбуждений с малым импульсом  $k$ , функция  $f_{k\omega}(p)$  отлична от нуля в узкой области импульсов вблизи  $p_0$ . Благодаря этому потенциал  $V(q)$  может быть вынесен из-под знака интеграла и заменен так же, как  $V(k)$ , на  $V(0)$ . Записывая разность  $n_0(p + k/2) - n_0(p - k/2)$  в виде  $1/2 k \partial f_0 / \partial p$  ( $f_0 = 2n_0(p)$  — функция распределения невзаимодействующих частиц в основном состоянии) получаем

$$f_{k\omega}^0(p) = -\frac{1}{2} \frac{k \partial f_0 / \partial p}{\omega - kp - i\delta [n_0(p + k/2) - n_0(p - k/2)]} V(0) \int f_{k\omega}^0(p) dp / (2\pi)^3, \quad (46'')$$

$$f_{k\omega}^1(p) = \frac{1}{2} \frac{k \partial f_0 / \partial p}{\omega - kp - i\delta [n_0(p + k/2) - n_0(p - k/2)]} V(0) \int f_{k\omega}^1(p) dp / (2\pi)^3. \quad (47'')$$

Уравнение (46'') совпадает с кинетическим уравнением в приближении самосогласованного поля, но с уменьшенным в два раза числом частиц. Это уравнение имеет решение лишь в случае  $V(0) > 0$ , т. е. в случае отталкивания между частицами.

Формальное решение уравнения (47'') для случая притяжения не является обоснованным из-за перестройки ферми-заполнения, вызванного образованием коррелированных пар. Таким образом, при отталкивательном короткодействующем потенциале возможно распространение бесспинового нулевого звука.

В случае дальнедействующих сил отталкивания  $V(k)$  при  $k \rightarrow 0$  имеет полюс, поэтому второе слагаемое в (46') много больше первого, в котором в результате интегрирования полюс  $V$  несущественен (заметим, что этот результат сохраняется во всех приближениях). Пренебрегая первым членом, запишем (46') в виде

$$f_{k\omega}^0 = \frac{-k \partial f_0 / \partial p'}{\omega - kp - i\delta [n_0(p+k/2) - n_0(p-k/2)]} V(k) \int f_{k\omega}^0(p) \frac{dp}{(2\pi)^3}. \quad (48)$$

Это уравнение совпадает с кинетическим уравнением для  $k, \omega$  компоненты Фурье функции распределения в приближении самосогласованного поля.

Рассмотрим поведение системы в слабом произвольном электромагнитном поле  $A(r, t)$ . Гамильтониан взаимодействия системы с полем имеет вид

$$H' = \frac{1}{c} \int j^\alpha(r, t) A^\alpha(r, t) dv. \quad (49)$$

Суммирование по  $\alpha$  производится от 1 до 4.

При включении поля в момент времени  $t_0$  волновая функция системы меняется во времени по закону

$$\Phi(t) = T \left\{ \exp \left( -i \int_{t_0}^t H' dt' \right) \right\} \Phi_0 = T \left\{ \exp \left[ -\frac{i}{c} \int_{t_0}^t \int j^\alpha(r, t') A^\alpha(r, t') dv dt' \right] \right\} \Phi_0, \quad (50)$$

или, в первом приближении, по малому внешнему полю:

$$\Phi(t) = \left\{ 1 - \frac{i}{c} \int_{t_0}^t \int j^\alpha(r, t') A^\alpha(r, t') dv dt' \right\} \Phi_0. \quad (50')$$

В (50) и (50') оператор тока берется в гейзенберговском представлении невозмущенного гамильтониана системы. Ток системы в момент времени  $t$  определяется средним значением оператора  $j(r, t)$ , взятым по функциям  $\Phi(t)$ . Используя равенство нулю тока системы в невозмущенном состоянии  $\Phi_0$ , нетрудно получить

$$j^\beta(r, t) = -\frac{i}{c} \iint_{t_0}^t dt' dv' \langle [j^\beta(r, t), j^\alpha(r', t')] \rangle A^\alpha(r', t'), \quad (51)$$

где  $\langle \rangle$  означает усреднение по основному состоянию системы. Для  $k$ -компонент Фурье соотношение (51) принимает вид:

$$\begin{aligned} j_k^\beta(t) &= -\frac{i}{c} \int_{t_0}^t dt' \langle [j_k^\beta(t), j_{-k}^\alpha(t')] \rangle A_k^\alpha(t') = \\ &= -\frac{i}{c} \int_{t_0}^t dt' \iint dp dp' j^\beta(p) j^\alpha(p') \times \\ &\times \langle [a_{p-k/2}^+(t) a_{p+k/2}(t), a_{p'+k/2}^+(t') a_{p'-k/2}(t')] \rangle A_k^\alpha(t'), \end{aligned} \quad (51')$$

$j^\alpha(p) = p^\alpha$  для первых трех значений  $\alpha$ ;  $j^4(p) = 1$ . Среднее значение коммутатора, стоящее под знаком интеграла в (51), можно выразить через функции  $f_{k,\omega}(p)$

$$\begin{aligned} &\langle [a_{p-k/2}^+(t) a_{p+k/2}(t), a_{p'+k/2}^+(t') a_{p'-k/2}(t')] \rangle = \\ &= \sum_s \{ e^{-i\omega_s(t-t')} f_{k,\omega_s}(p) f_{k,\omega_s}^*(p') - e^{i\omega_s(t-t')} f_{-k,\omega_s}(p') f_{-k,\omega_s}^*(p) \}. \end{aligned} \quad (52)$$

Поэтому знание этой системы функций достаточно для определения тока системы. С другой стороны, интересующий нас коммутатор может быть непосредственно выражен через двухчастичную функцию Грина  $K$ . Обозначая через  $\tilde{K}$  двухчастичную функцию Грина в импульсном представлении для  $t_1 = t_2 = t$  и  $t_3 = t_4 = t'$  ( $t - t' = \tau$ ):

$$K\left(p + \frac{k}{2}, t, p - \frac{k}{2}, t; p' - \frac{k}{2}, t', p' + \frac{k}{2}, t'\right) \equiv \tilde{K}(p, p', k; \tau), \quad (53)$$

нетрудно получить

$$\langle [a_{p-k/2}^+(t) a_{p+k/2}(t), a_{p'+k/2}^+(t') a_{p'-k/2}(t')] \rangle = -i\tilde{K}(p, p', k; \tau) + i\tilde{K}^*(p, p', -k; \tau). \quad (54)$$

Подставляя (54) в (51'), имеем

$$j_k^\alpha(t) = -\frac{1}{c} \int_{t_0}^t dt' \iint dp dp' j^\alpha(p) j^\beta(p') \{ \tilde{K}(p, p', k; \tau) - \tilde{K}^*(p, p', -k; \tau) \} A_k^\beta(t'). \quad (55)$$

Переходя к случаю  $t_0 \rightarrow -\infty$ , получаем соотношение между компонентами Фурье по времени от  $j(t)$  и  $A(t)$

$$j_{k,\omega}^\alpha = \kappa_{\alpha,\beta}(k, \omega) A_{k,\omega}^\beta, \quad (56)$$

$$\kappa_{\alpha,\beta}(k, \omega) = \frac{i}{2\pi c} \int dp dp' \frac{d\omega'}{\omega - \omega' + i\delta} \{ \tilde{K}(p, p'; k, \omega') - \tilde{K}^*(p, p'; -k, -\omega') \},$$

где  $\tilde{K}(p, p'; k, \omega)$  — компонента Фурье по времени  $\tau$  от функции  $\tilde{K}(p, p'; k, \tau)$ .

В заключение авторы выражают благодарность Л. Д. Ландау и С. Т. Беляеву за интересные дискуссии.

Московский инженерно-физический институт

Поступила в редакцию  
12 июля 1957 г.;  
после переработки  
24 октября 1957 г.

#### Литература

- [1] Н. Лейтманн. Nuovo Cim., 11, 342, 1954 (Пробл. совр. физ., 3, 133, 1955).
- [2] М. Я. Лаврентьев, Б. В. Шабат. Методы теории функций комплексного переменного, ГИИТЛ, 1951, стр. 257.
- [3] А. Б. Мигдал. ЖЭТФ, 32, 399, 1957.
- [4] Ю. Л. Климонтович, В. П. Силин. ЖЭТФ, 23, 151, 1952.
- [5] В. П. Силин. ЖЭТФ, 23, 641, 1952.
- [6] Л. Д. Ландау. ЖЭТФ, 32, 59, 1957.
- [7] I. Schwinger. Proc. Nat. Sci. USA, 37, 452, 1951 (Пробл. совр. физ., 3, 28, 1955).
- [8] M. Gell-Mann, F. Low. Phys. Rev., 84, 350, 1951 (Пробл. совр. физ., 10, 43, 1955).

#### APPLICATION OF QUANTUM FIELD THEORY METHODS TO THE MANY BODY PROBLEM

V. M. Galitsky, A. B. Migdal

It is shown that the energy and damping of quasiparticles are determined by the poles of a single particle propagation function.

The relation between the two-particle Green's function and the kinetic equation is established.